MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS ALTER.

MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1760—1761.



A TURIN,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.

TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

ALBERTI

ALBERTI HALLER

EMENDATIONES ET AUCTARIA

AD

STIRPIUM HELVETICARUM

HISTORIAM.

INvitatione Sociorum praeſtantiſſimorum gratus utens, CIGNA *celeberrime, quae ad claſſes naturales Tetrapetalarum, ſiliquoſarum, Papilionacearum, Didynamiarum utriuſque generis, Dipſacearum, floreque compoſito corrigenda & addenda viſa ſunt, breviter expono, dum quae ex incerta ſpe ſenii mei pendet, majoris operis editionem ſecundis curis praeparo. Aliqua nova, multa emendatiora hic reperiuntur, poſtquam plantarum rariorum in locis natalibus lectarum mihi abunde copia facta eſt. Certo carptiones aliquas vitavero, ſi quae minus recte olim ſcripſi, ipſe non monitus correxero. Rupe d.* 24. *Decembris* 1759.

 PLAN-

PLANTAE SILIQUOSAE, TETRAPETALAE TETRADYNAMIAE Linn.

1. Draba *foliis hirſutis incanis, radicalibus ovatis Enum. helv. n. 2. p. 539.*

Rarior reliquis in *Chaux ronde vallis Ormond deſſus*, & in M. *Fouly* reperta. Folia roſulas ad terram efficiunt, fere ut *Aretia villoſa*, pariter ovata, integerrima, hirſuta, peculiari modo flaccida. Caulis, ut in *Draba vulgatiſſima*, unum, duo, tria folia, aut nullum etiam producit, prima ovato lanceolata, deinde longiora. Flores in ſingulo caule, ſex & ultra, calycibus hirſutis, petalis inciſis albis fructus ſimilis vulgari, glaber, in utroque loculo 10. & 11. ſemina continet, & tubam conſervat, ſed brevem, & capitatam.

2. Clypeola *perennis foliis ovatis, ſcabris, calyce deciduo.*

Jonthlaſpi luteo flore incanum diſcoides umbellatum montanum Columm. *Ecphraſ. p.* 281. *ic. p.* 280.

Non vulgarem in Helvetia plantam abunde legi ad pedem rupium arenoſi lapidis *Gyſenau* prope pontem Emmae fl. Deſcriptionem, quae in *Enum. helv. p.* 540. *n.* 2. nulla eſt, nunc addo.

Ex una radice, quae fibroſiſſima eſt, prodeunt caules innumerabiles, ſemierecti, ſimplices, dodrantales, hirſuti. Folia in petiolo folioſo dilatata, obtuſa, ovatis longiora; alba, ſcabra, hirſutie tecta. Flores ſecundum caulem in petiolis ſemiuncialibus, ſpicati. Calycis folia quatuor, ex ovatis lanceolata, deorſum paullum turgida, pallide flava, decidua. Petala multo majora, quam in vulgari ſpecie, ex ungue lateſcunt, ambitu cordiformi, flava. Stamina eminentia majora quatuor, duo breviora lateralia. Ad iſtorum originem interior haeret ſquama bidentata, brevis alias,

alias stamini pene aequalis, petalodes. Siliqua ovata, emarginata, utrinque turgens, hirsuta. In ea semen utrinque unum, lenticulatum, quorum alterum saepe abortit.

3. NAUSTURTIOLUM *alpinum folio alato* RAI *p.* 826. nunc crediderim, ex ipsius nominis vi, esse plantulam a *Nastŭrtiolo alp. tenuissime diviso* non diversam, quam ex praealto M. *Col de Ferry* habeo, foliis tamen potius ovatis, quam lanceolatis; petiolo, qui semper latus est, in hac herbula, etiam aliquanto latiori.

4. COCHLEARIA I. LINN. *foliis angulosis*. Utique sponte in Helvetia nascitur, abunde quidem in paludosis inter marmoris varii venas, & scaturiginem rivi *Furet* prope *Roche*: Dicitur etiam in valle *Moutier-Grand-val aux roche de Moutier près de la grande cascade de la Birse* nasci, sed planta ex ea valle missa majus fuit *Cardamines vulgatissimae* exemplum.

5. LEPIDIUM *latifolium* non tantum circa Urbam, & in Vaudensi agro ad vias sponte provenit, sed omnino, ut veram indigenam plantam esse constet, in altissimo, & *ferissimo* (ut solent vocare) M. *Prapioz*.

6. *Iberis* MATTH. *Lepidium* 12. LINNAEI p. 675. non est *diandria*. Stamina quatuor majora, parva duo habet; petala ovata; fructum ex lata basi contractum, ex angusti finis fissura eminentem tubam; semen in utrovis loculo unicum.

7. Ad *Lepidia* addatur elegans species *Thlaspi saxatile flore rubente* J. R. H. 5. *Lepidium foliis pulposis subrotundis antheris lateralibus Enum. Gott.* p. 245. Ad rupes prope *Ruchenette* reperit Cl. NEUHAUS.

Est *Iberis saxatilis* LINN. *Cent.* 11. *n.* 171.

8. DRABIS, ut recte Cl. ALLIONIUS noster conjicit, utcumque vicina est planta, quam ipse, nobiscum *Lepidium caule repente foliis ovatis amplexicaulibus* vocavit *l. c. p.* 27. *T. IV.* Siliqua enim pene quadrangula est, utique marginibus

magis,

magis, media linea, quae septo respondet, minus conspicua, sed tamen eminente. Septum ipsum non latitudini, & majori axi, sed commissurae acutae siliquae parallelum est. Quando tamen siliqua aperta semina dejecit, tunc septum perinde, ut in Alyssis, planum persistit, videturque valvis fructus parallelum fuisse. Inaequalitatem petalorum, ut inter Iberides reponi mereatur, neque ego observavi, aut nunc observo, neque Cl. amicus noster. In saxosis vicinarum alpium abunde nascitur.

9. *Alysson myagri folio n.* 3. *p.* 538. omnino *a cochlearia* differt, fructu quidem pene rotundo, non tamen transversum lato, valde convexo, sed cujus septum huic convexitati parallelum persistit. Foliis penitus pinnatis reperi in periculosa via *les ruines*, qua itur ad M. *Tompey*.

10. Denique ALYSSON *foliis pinnatis multiformibus floribus racemosis luteis* ALLIONE p. 40. T. 7. utique a Cl. LACHENAL p. 6. inter *Cliben*, & *pontem Wiesae*, tum inter *Neuhaus*, & *Haltingen* reperta est, nova civis, & nova planta.

11. HESPERIDIS secundae Enum. nomine tres plantae continentur, Helveticae omnes. Prima alpina a summarum rupium M. *Chasseral* pede a DD. SCHUH, & GAGNEBIN, & in *Creux du Vent*, *au pertuis de la Bise* a Cl. DIVERNOI lecta est. Et humilior omnino, & dodrantalis statura est, folia omnia oblonga, rariter dentata, dentibus saepe profundis; caulis non ramosus est nisi ex radice, idem in summa parte spicatus. Petioli florigeri sex linearum, robusti, ad grandem angulum de caule exeunt. Flos uncia paullo brevior. Calyx tubulosus, albidus, duobus foliis deorsum gibbis. Petala longo ungue, bractea pene orbiculari, sulfurea, venosa. Siliqua subhirsuta, cornu longum fine emarginato.

Hoc est *Leucojum angustifolium alpinum flore sulfureo* ALLIONE p. 44. T. 9. f. 3.

12. Altera in planitie Valesiae passim crescit supra *Leucam*, ubi & ipse legi, & Cl. RICOU, tum circa *Diedenheim* alsatiae vicum Cl. RISLER. Huic caulis ramosus, altior, cubitalis. Folia ad terram plurima, petiolata, longe lanceolata, scorzonerae similia, non dentata, glauca, tota subtiliter hirsuta, quae priori glabra sunt, ad caulem gracilia, linearia. Flos multo minor, caetera similis. Siliqua hirsuta quadrangularis. Stigma crassum globosum. Haec est *Leucojum sylvestre* CLUS. *p.* 299.

13. Ab hac specie modice differt planta Germanicae prosapiei, & sibiricae, quae abunde in rupibus M. *Altenstolberg*, & in muris rupibusque circa *Kelbra* a me decerpta est, & circa *Jenam* etiam nascitur. Huic caules bicubitales, valde ramosi, folia subhirsuta, dentata sed rariter, ut sint quae dentibus destituantur. Flos minor quam priorum, stigma emarginatum. Siliquae etiam quadrangulares, hirsutae. *Erysimum est foliis serratis lanceolatis* LINN. *Cent.* 1. *p.* 18. *flor. suec. n.* 602., sed hirsuta omnino siliqua est, quam LINNAEUS glabram fecit. Etsi possit videri statura, foliisque caulinis omnibusque serratis, differre, non tamen ausim a priori *n.* 12. separare, cui fructus ferat simillimos.

14. TURRITIS *foliis hirsutis amplexicaulibus siliquis nutantibus*.

Leucojum sylvestre angustifolium flore albido parvo RAI *p.* 786.

Magna copia provenit in rupestribus circa *Roche*, *à la Marbriére*, *Agauni*, circa *Bonne-ville*, & alibi.

Verno tempore haec planta pedalis & cubitalis, tota foliis, & caule molliter hirsuta est. Folia radicalia petiolata, hirta, cum mollitie tamen, longe petiolata, obtusa, ex ovatis lanceolata, paucis sed magnis dentibus serrata sunt. Caulem eadem amplectuntur, & lente diminuta latitudine, denticulis minoribus per marginem exasperantur. Versus summum caulem petioli florigeri exeunt, ut in hac classe solent, racemosi. Calyx coloratus, albicans, deorsum

ſum non gibbus, caryophyllaeus. Sic petala ex albis ſublutea, longe petiolata, leviter emarginata. Duae glandulae ad originem ſtaminum breviorum. Siliqua hirſuta, cornu brevi, fine rotundo, longiſſima trium quatuorve unciarum, per maturitatem nutans, compreſſa, oris undulatis. Semina plana, ovata, hilo inciſa, ala foliacea cincta. Calyces noſtris non rugoſi, ſed modice utique piloſi, ut cum Ammeniana conveniant LINN. *ſpec. p.* 665. *n.* 6. A *Monſpelienſi* planta differt caeterum ſimillima, quod ei Calyces deorſum gibbi ſint. Ita enim in ſpeciminibus reperio a praeſtantiſſimo COMMERSON miſſis.

15. ERYSIMUM 10. Bernae nunc deſideratur, cum tota ea ruderoſa area, in qua creſcebat, magnificis aedificiis repleta ſit.

16. *Siſymbrium* 11. 12. & 13. nunc denique paullo rectius licet conſtituere, plurimis undique, & ex locis natalibus collectis ſpeciminibus. Omnia autem ex nectariis aut ſinnapia erunt, aut Braſſicae; huic propiora, qualis a Cl. LINNAEO definitur.

17. SINAPI adeo *foliis levibus glaucis pinnatis, pinnis linearibus rariter dentatis Enum. n.* 11. *p.* 551.

Eruca tenuifolia perennis flore luteo C. B.

Siſymbrium tenuifolium LINN. Cent. 1. p. 1. 8. n. 50.

Genevae provenit ad portam *Cornevin*, & Baſileae in arenoſis ad *Wieſam* fl. *Badae* in arce diruta. *Aux allées de Colombier*. Frequens etiam in *Alſatia*, *Spirae*, *Manhemii*.

Concinnae plantae folia longe petiolata, fere polypodium imitantur. Nervus nempe a folioſa latitudine augetur, pinnaſque accipit alternas, aut oppoſitas, ipſeque in ſimilem, aliquanto majorem, lanceolam exit. Pinnae ſimplices rariſſime dentatae, ſed incerta & alternante latitudine, primae breviores, acutum cum nervo angulum faciunt. Ad caulem ſaepe integerrima, *linariae* ſimilia folia. Caulis ſubhirſutus, firmus pedalis, cubitalis. Calyx deorſim non gibbus, ad

lentem

lentem vitream visus subhirsutus, deciduus. Petala ex petiolo lente dilatantur, bracteis flavis, rotundis, patentibus, calyci duplo longiora. Stamina longiora brevia bina magna portione superant. Inter ea majora stamina, & calycem, tum inter stamen minus, & germen glandulae quatuor rotundae, virides sedent. Cornu siliquae breve, fine globoso. Maturescens eadem erigitur sescuncialis, compressa, paullum articulata, lata ultra lineam, cornu persistente, seminibus compressis, ovatis, cum hilo, non alatis.

18. SINAPI altera planta est *foliis semipinnatis rotunde dentatis hirsutis Enum.* n. 12. p. 552.

Eruca inodora J. B. II. *p.* 862.

Eruca lutea sylvestris caule aspero C. B.

Haec priori vulgatior *Ebroduni* abunde in fossis provenit: tum ad Arolam inter *Aarberg*, & *Worben*, in Valesia. Inter *Lausannam*, & les *Croisettes* ad viam. Basileae prope curiam Naviculariorum ad Rheni pontem. In arenosis *Wiesae*, & *Rheni*. Bernae etiam circa *un Stukhof* nascebatur, nunc destructa.

Huic caulis hirsutus, angulosus, caeterum sulcatus, parum firmiter erectus tripedalis, ramosus & brachiatus. Folia Jacobeae vulgaris similia, qualia Linnaeus *lyrata* vocat, longe petiolata, semipinnata, pinnis angulosis sensim majoribus, ultima impare maxima obtusa, omnibus angulosis, & maximis paucioribusque dentibus incisis. In caule haec omnia angustiora sunt, dentesque tanti, ut folia semipinnata sint. Tota cum nervis hirsuta sunt. Calycis folia patula, duo modice deorsum gibba, omnia subhirsuta, decidua. Petala longo petiolo, bractea rotunda, de calyce duplo longiora se efferunt, colore ochroleuco. Glandulae quatuor, positae, ut in priori planta 17. Fructus subhirsutus, tetragonus, cornu brevi, capitato, obtuso. Siliquarum petioli ad magnum angulum de caule recedunt, ipsae sursum recurvae, cauli pene parallelae, obtuse tetragonae, turgidae, sescunciales. Semen oblongum.

Eadem in *Arve* fl. alveo, inque veragrico agro, & in Valesia fere flavo flore nascitur.

Haec est *Sinapi sylvestre Genevense* J. B. II. *p.* 858. in alveo *Arve* lectum; uti ex plantis video, quas ex loco natali Cl. le CLERC ad me misit.

19. *Eruca Tanaceti folio* MORISONI. Pari jure, ut pleraeque Basileenses, & Genevenses pro Helvetica haberi potest, quam Cl. CLARET ad pedem montis S. Bernhardi in valle Augusta legerit.

20. *Brassica perfoliata* potest helveticis accenseri, quae circa Mulhusiam proveniat.

21. CARDAMINE *foliis pinnatis pinnis laciniatis*, saepe quidem apetala est, atque solis suis staminibus albis, de calyce eminentibus, florem mentitur, sed eadem tamen, in ipsa Suecia, alias petala alba calyce majora produxit (LINN. *flor. suec. nov. ed. p.* 464.).

22. CARDAMINEN *trifoliam* raram civem foliis hederaceis angulis in argutos denticulos exeuntibus, habuit inter suas Cl. le CLERC.

CARDAMINE *alpina bellidis folio, glabra*, quidem nuper a me in M. *Enzeinda* lecta est, & in summo *Pennino* a Cl. CLARETO.

23. Sed alia, neque a nobis dicta planta, & ex M. *Baldo* cum eo nomine mihi missa est, & lecta in M. *Sur champ* agri Aquilegiensis, penitus omnino diversa. Huic folia integerrima, ovata, radicalia, hirta & aspredine scabra. Caulis trium quatuorve unciarum, uno alterove folio ovato lanceolato ornatus, simplex, habitu omnino Turritidis ramosae vulgaris, sed flore toto differt, & fructu. Flos enim grandis, triplo ejus plantulae florem superat, idemque petalodem album calycem habet, deorsum insigniter gibbum. Petala lactea, ovata. Siliquas grandes latissimas ad lineam unciales, cornu brevissimo simplici, erectas praefert, & cauli parallelas. Num elasticae resiliant, seque convolvant,

vant, non rescivi. Videtur ex loco natali esse *Cardamine* 5. SEGUIER *veron.* p. 387. Nomen meretur, si glandulas habet, quod nunc quidem expedire nequeo, ARABIDIS *foliis radicalibus ovatis integerrimis scabris, caule subnudo*. A *Turritide minori* flore grandi separatur, latisque siliquis, & caule non folioso.

PAPILIONACEAE.

24. ASTRAGALORUM primum genus oportet expedire in quo ob specimina imperfecta, & fructus potissimum defectum multa mihi, dum majus opus scripsi, dubitatio, neque absque errore fuit. Nunc copia collecta exemplorum, & fructubus maturis conquisitis, haec possunt expediri.

Removere vero oportet ab Astragalis, primum Tragacantham, quae *alpina sempervirens flore purpurascente* J. R. H., & GARIDEL in ic.

In M. *Jeman*, *Cheville*, & inter *Javernaz*, & *Ovannaz* montes, a D. RICOU primum reperta, tum a D. des *Coppets*, aliisque.

Radix lignosa, maxima, ramosa, multiceps. Caules pedales, foliosi, ramosi. Petioli foliorum in spinulam terminantur, eorumque petiolorum reliquiae superstites, acuminatae, caulem circumstant. Folia subhirsuta, ovatis angustioru, pinnarum septem ad decem. Flores fructusque ad basin caulium congesti. Fructus hirsuti, turgidi, teretes, duri, breves. Calyx hirsutus, cylindricus, quinque longis & hirsutis dentibus. Flos longus, strictus, albidus. Vexillum emarginatum, venis saturati purpurei coloris pictum. Alae petiolum habent capillarem, hamum brevem & obtusum. Carina brevior, quam alae, hamis brevibus, obtusis, rostrello purpureo, mucrone perbrevi. Caeterum flos pallide carneus est. Stamina novem connata, unum singulare. Tuba filiformis longa, fine paullum crassiori. Siliqua constanter unilocula-

cularis, in ea quatuor nigra, reniformosa semina, aliquibus membranulis & septulis interstincta, non parallelis ad valvas, sed oblique & transversim normalibus.

A Massiliensi Tragacantha, quam a variis amicis accepi, non videtur differre.

Sive velis generis tueri dignitatem, sive alteri alicui generi addere, certe ex nostris experimentis cum Astragalo non potest relinqui. Si omnino alii Cl. viri Tragacanthas biloculares viderunt, erit in ipso genere varietas loculorum. Nimis enim multos fructus aperui, ut potuerim in meis septum praetervidisse.

25. Porro aliquot ab Astragalis plantas oportebit removere, quas ignorata fabrica fructus pro astragalis habui.

Astragaloides sive *phaca* adeo similis est *Astragalo*, ut vulgo cum ea conjuncta fuerit. Neque tamen sola siliqua differt, quam astragali nonnulli perinde inflatam habent, & ovatam, sed praeterea partium floris proportione. Cum enim *Astragalis* flos fere strictus, & vexillum praelongum esse soleat, *Astragaloidi* multo brevior, & ejusmodi est quales in viciis, in iis certe quinque phacae speciebus, quas inter meas habeo, & quarum tres sunt helveticae.

I. PHACA *caule procumbente foliis ovato lanceolatis*

Astragalus quidam montanus, vel onobrychis aliis J. B. II. *p.* 339.

Astragalus montanus LINN. *spec. p.* 960. *n.* 24.

Post priora lectus ad pedem rupis glacialis *Steinbey* in M. *Chapuise*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Sur champ*, *Ovanna*, *Enzeinda*, *Prapioz*, *Breitlawenen*, *Stokhorn*, *Galanda*, plerumque in lapidosis deciduis. Haec planta Astragalos inter, & Astragaloides sive phacam ambigit. Habet enim siliquam teretem, ovatam, lanceolatam, inflatam, hinc convexam, inde cava linea sulco divisam. In ea linea commissio valvarum mediam superiorem partem siliquae valde breviter elevatam contingit, eique araneosis nexubus adaptatur; &

ex

ex receptaculo utrinque ſeminales funiculi exeunt. Semina in duos ordines diſpoſita utrinque ad decem, compreſſa, reniformia. Adulta ſiliqua calveſcit, & omnino abſque veſtigio bilocularis naturae eſt, unaque folia contracto margine lanceolata fiunt, ut alia tunc planta videatur. Eos tamen loculos non membranaceum adeo alicujus longitudinis ſeptum, ſed contiguitas receptaculi ad mediam ſuperioris convexitatis ſiliquae ſedem elevati dividit. Caeterum flores breviter ſpicati, ad angulos rectos, rectiſque minores, tum ipſi, tum ſiliquae eriguntur: iidemque flores breviori ſunt vexillo, quam in *Aſtragalis* ſolent & latiori, ut *Viciae* florem penitus referat. Folia incerta figura ludunt, ovata, & ex ovatis lanceolata. Caules folioſi, auriculis ovato lanceolatis, ad originem folii poſitis, ſpica florali terminati.

26. II. PHACA *caule procumbente; foliis ovatis, ſiliquis pendulis* Enum. n. 10.

Aſtragalus alpinus foliis viciae ramoſus, & procumbens flore glomerato oblongo albo caeruleo SCHEUCHZER *itin.* VII. p. 509.

Aſtragalus alpinus minimus LINN. *fl. lapp.* p. 261. T. 9. f. 1.

Similibus locis, uti prior, ſed aliquanto rarior. In lapidoſis circa glaciales rupes *Steineberg*, *Stokhorn*, *Chapuiſe*, *Enzeinda*. Cl. RAMPSPEK in M. *Müirtſchen*, *Galanda*.

Vere a n. 25. differt, floribus rarioribus, minus in eadem ſpica numeroſis, petalis magis diſtinctis, vexillo ſtriato, floribus, & ſiliquis pendulis, radicibus, quae priori pedales, huic minimis, etſi lignoſae ſunt. Caeterum fructus ejuſdem naturae eſt, hirſutus, niger, & unilocularis, nullo ſepti veſtigio, idemque in meis curvus: verum ſatis maturas ſiliquas non vidi. Ab Aſtragalis pariter, ut prior breviori flore differt.

27. III. PHACA *caulibus erectis, ramoſis, foliis ovatis.*

Aſtragaloides alpina hirſuta erecta foliis viciae floribus dilute luteis TILLI *hort. Piſan.* p. 19. T. 14. f. 2.

Praeter

Praeter eos montes, quos in *Enum. Helv.* citavi, nascitur etiam in M. *Chapuise*, a nobis lecta, in *Prapioz*, in *Jeman*, *Ovanna*, *Sur champ*, *aux Nombrieux*. Adde descriptioni, radicem enormem, pedalem & cubitalem esse, caulem erectum ad pedem, & cubitum, foliorum paria quatuor, quinque, sex, mollia, hirsuta, ovata; ad eorum originem praegrandes stipulas, ovato lanceolatas; scapos florigeros ex alis prodire, spicasque ferre confertas, florum etiam retrorsum conversorum & pendulorum. Calyx cylindricus, compressus, pallens, nigris pilis hirsutus, denticulis quinque brevibus, nigro pilo totis barbatis. Flos ochroleucus, calyce duplo longior. Vexillum longe petiolatum plicatum, ovale & quasi mucronatum, album, dorso, & parte proxima flava: alae longe petiolatae, longe hamatae, ochroleucae, paullo carina breviores: carina unipes, hamis retrogradis obtusis, mucrone obtuso, curvulo, flavescente. Stamina novem connata, & decimum solitarium. Tuba filiformis. Siliquae pendulae, ovatae, mucronatae, styliferae, inflatae, intus glabrae, uniloculares, seminibus reniformibus.

28. Iterum ex fructus ignoratione mihi, & LINNAEO *spec. p.* 756., & ante nos SCHEUCHZERO accidit, ut inter Astragalos recenseremus HEDYSARUM *caule recto, ramoso, foliis ovatis, siliquis, levissimis, venosis.*

Hedysarum alpinum siliqua levi C. B.

Eam nunc plantam, multis locis, & diversis anni temporibus, repertam, utique rectius constituo.

Radix longa, crassa, lignosa, teres, nigra, multiceps. Caulis erectus, ramosus, dodrantalis, pedalis, etiam cubitalis. Sub foliis vaginae squalentes, siccae, longae, aristatae. Folia venosa, ovata, parium novem & ultra. Spicae in scapis ex foliorum alis prodeuntibus, floresque reflexi & penduli: calycis dentes subhirsuti, inferiori longissimo. Flores Hedysari, vexillo quam carina breviori, reflexo, plicato, emarginato. Alae curina breviores graciles, hamo longo

go retrogrado. Carina pene normalis, obtusa; omnibus petalis major, ex caeruleo purpurea. Fructus articulatus constat quatuor, aut quinque, articulis ovatis, planis, nervosis, alatis, monospermis per graciles isthmos sibi continuatis. Sibirica planta non videtur diversa, fructu, flore, folio, habitu. Sola magnitudo floris nostras separat.

Nascitur in M. *Ovanna*, *Sur champ*, *Chapuise*, *Enzeinda*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Neunenen*, *Stokhorn*, *Pilato*, *Breitlawenen*, *Wangenalp*, *Nombrieux*, *Schilt*, *montibus Switensium.*

29. Astragali veri praeter hos, quos nunc recensebo, in helvetia non sunt reperti. Quis sit *Astragalus II.* CLUS. *p.* CCXXXIIII., aut C. B. *helveticus* ignoratur, & difficile est conjecturam facere, quemnam potuerit cum *Orobo sylvatico purpureo verno* comparare CLUSIUS. Neque de Astragalo 12. 13. & 14. quidquam mihi ultra innotuit.

Vulgarem procumbentem omitto, & *Glaucem* RIVINI.

Qui sequuntur, veri sunt Astragali.

30. I. ASTRAGALUS *caule erecto, ex aliis spicifero, siliquis teretibus hirsutis Comm. Gott.* 1752. cum icone.

In Helvetia, circa castellum Octodurense, vetustate dirutum, in herbosis abunde nascitur, ibi lectus a me an. 1757.

An hic fuerit *Astragalus pilosus* LINN. *Spec. p.* 148.

Cicer montanum lanuginosum erectum C. B. *prodr. p.* 148.

Ad descriptionem alias datam remisisse liceat.

31. II. ASTRAGALUS *caule erecto, ramoso, foliis linearibus hirsutis, spicis erectis terminatricibus Enum. p.* 567. *n.* 7.

Onobrychis purpureo flore CLUS. *Pann. p.* 751.

Inter *Leucam* & *Siders* in herbosis abunde, etiam inter *Orsieres* & *Bovernier*.

Fructus, quem nunc demum vidi, brevis, vix trium linearum, subhirsutus, turgidus, curvo stylo instructus. Semina utrinque fere tria, nitida, reniformia, sed hilo eminente.

Hi

Hi aſtragali caulibus ramoſis: qui ſequuntur ſunt ſcapis ſpiciferis de radice prodeuntibus, neque ramoſis, neque foliosis.

32. III. ASTRAGALUS *caule diffuſo, foliis ovatis ſubhirſutis, ſcapis radicalibus, vexillo longiſſimo, ſiliquis teretibus* Enum. n. 2.

Aſtragalus monſpeſſulanus J. B. II. p. 338. (idem enim monſpelio miſſus eſt) LINN. *ſpec. p.* 761. idemque *Aſtragalus alpinus magno flore* C. B. *Enum. l. c. n.* 3.

Abunde in via *Tombey*, proxime ſuper *Olon*.

Radix cubitalis, lignoſa, inmenſum ceſpitem caulium fundit, & ipſos cubitalis diametri. Folia decem parium, eaque ovata, dum juniora ſunt ſubhirſuta, & obtuſa. Flos autem longus ad unciam, ſtrictuſque. Calyx longus, cylindricus, etiam roſeo colore tinctus, ſuperius exciſus, longis rectiſque ſegmentis. Vexillum, ut in praecedente, & in trifoliis, praelongum, ſtrictum, plicatum, emarginatum, purpureum. Alae, quod in tota claſſe rariſſimum, emarginatae in partem magnam & parvam diviſae, pallidi coloris. Carina brevior, obtuſa, ſaturate purpurea. Stamina novem connata, & unum ſingulare. Siliqua longa fine recurvo, tota gracilis, per maturitatem dura, uncialis, teres, paullum incurva, convexa, valvularum commiſſura latiori. Semina in utrovis loculo quinque & ſex, nigra, reniformia, ſed ſuperiori parte ſuper hilum craſſiori.

33. IV. ASTRAGALUS *ſcapis aphyllis, ſiliqua turgida ovato lanceolata ſtylifera, foliis ovato lanceolatis ſericeis Enum. n.* 5. *T.* 5.

Praeter ſcopulos *Neunenen* etiam naſcitur inter *Charat* & *Saxen* Valleſiae.

Adde deſcriptioni folia ſericea, ſplendentia, nonnunquam ſatis calveſcere. Calycem pariter ſericeum cum fructu ſupereſſe, qui nigro villo hiſpidus, ovalis inflata eſt ſiliqua, conſtanter acumine terminata. Semina in duobus loculis numeroſa: matura non vidi.

14. V.

34. V. ASTRAGALUS *ſcapis aphyllis foliis lanceolatis hirſutis, ſiliqua villoſa, inflata, ovata. Enum. n.* 8. *ic. T.* 13.

Aſtragalus Pyrenaicus barbae joris folio non ramoſus, flore ochroleuco glomerato SCHEUCHZER *It. alp. IV. p.* 330.

Aſtragalus campeſtris LINN. *ſpec. p.* 761. *n.* 30. Nobis utique alpinus eſt, neque in humiliores montes, aut *Juram* deſcendit.

Praeter priora loca nuper in itineribus legi ad M. glaciales *Steineberg*, & in *Wangenalp*, *Prapioz*, *Enzeinda*, *Ovanna*, *Fouly*.

Deſcriptioni adde, radicem enormi ſaepe craſſitie, & pollicarem reperiri. Fructum brevem, hirſutum, vehementer turgidum, ovatum ſtyliferum, ſepto diviſum eſſe. In eo ſemina numeroſa compreſſa reniformia.

35. *Coronilla prima Enum. ſive minima* J. R. H. naſcitur *au Richard*, & *Sur champ*, tum in M. *Jeman*, & inter S. *Aubin*, & M. *Falconiarum* & alibi. A ferro equino inprimis ſiliquis diſtinguitur, quas pendulas habet incipientes ex petiolo nodo circulari, deinde articulis conſtantes tribus, quatuor, & ultra. Ovati ſunt articuli, utrinque acuminati, & complanati, cum acie utrinque. Facies plana linea eminente ſeparatur. Acies habet alas membranaceas eminentes duas, interque eas duas lineas pariter paullum, ſed brevias elevatas. In articulo ſemen phaſeoli forma, longius, parum inciſum. Tamen etiam folia huic coronillae magis perfecte ovata, & craſſiora ſunt, parium fere quatuor & quinque in noſtris, cum extremo impare. Stipulae fuſcae, argute lanceolatae, gemellae. Longiſſima & craſſiſſima radix.

Haec eſt, quam Cl. GAGNEBIN reperit au *Rocher de la Chage des Corbeaux*, *Milledeux*, & à *Refrein*. Certo cum nomine *minimae* ex Gallia & Pedemontio amici miſerunt. Sed etiam Hiſpanica planta, in horto culta, noſtrae ſimilis eſt, diverſa tamen ſtipulis rotundis, aut nullis.

36. Ab iſtà *Coronilla* diverſiſſima eſt *quarta Enum. p.* 574. *erecta, foliis maximis, ovatis retuſis in acumen exeuntibus*, ſiliquis neque alatis, neque aciem habentibus, abitu minus duro. Conf. *Enum. Gott. p.* 268. Cl. GAGNEBIN reperit au *val de Ruz*. Ego maxima copia in M. *Kunisberg* prope Jenam, tum in ſylva *Welmeſen*. Cl. MIEG circa *Farnſpurg*.

Neutram, quod mireris, habet LINNAEUS, quarum utraque multis locis proveniat, & paſſim deſcripta ſit.

37. OROBUS *caule erecto, ramoſo, foliis ovato lanceolatis Enum. Helv. n.* 2., *qui Orobus alpinus latifolius* C. B. *Prodr. p.* 149.

An *Orobus* 8. LINN. *ſpec. p.* 729.?

In M. *Luan*, in *Ovaille* ſylva, in M. *Nombrieux* & alibi in Aquilegienſium montoſis abunde naſcitur.

Ex ſpecioſiſſimis papilionacearum. Caulis erectus bicubitalis, & ultra, ſulcatus & anguloſus: folia numeroſa, adſcendentia; ſtipulae ſub ramis grandes, deorſum hamatae, ex ovatis lanceolatae, ſerratae. Foliorum paria quatuor, parum ovato lanceolata, glabra. Ex alis foliorum perpetui ſcapi florigeri, foliis nudi, anguloſi, dodrantales. Florum ſpica laxa, iidemque, quando matureſcunt, retroverſi, penduli, heteromalli. Calyx cylindricus compreſſus: ejus ſegmenta ſuperiora brevia, lata, curvula, ſe mutuo reſpiciunt; inferiora recta, & triangularia ſunt. Flos longus, ochroleucus. Vexillum anguſtum, replicatum, conduplicatum, quaſi emarginatum, dorſo flavo. Alae obtuſae, mucronatae, carinae longitudine, hamis binis obtuſis. Carina petiolo fiſſili, bractea recta modice roſtrata. Stamina novem connata & unum ſolitarium. Tuba fine latiuſculo. Siſiliqua praelonga glabra, polyſperma; ſemina matura nondum vidi.

Orobi caule ramoſo nomen nunc reformare oportet, ut ſit *Orobus caule ramoſo erecto, foliis ellipticis obtuſis.*

38. Viciae nova in Helvetia ſpecies noſtris addita eſt a Cl. Clareto, circa octodurum lecta, quam, quia multa habet vulgaris multiflorae ſimilia, eo accuratius oportet definire.

Caulis in radicem annuam, exiguam continuatur, debilis idem, pedalis & cubitalis, ramoſus, folioſus, ſtriatus, ſubhirſutus. Stipulae peculiares bipartitae, portione ſuperiori majori, utraque ſtriata, lanceolata, ariſtata, ſaepe ſerrata: duobus inferior inprimis dentibus, ſuperior etiam quinque & ſeptem ita magnis notata, ut pene ſemipinnata ſit. Foliorum paria ad octo, dura ea, nervo conſpicuo, linearia, ut tamen lateſcant ad finem, qui obtuſus eſt, & ariſta diſtinguitur, lata ad lineam. Scapi florigeri quatuor & ultra unciarum. Spica rara, flores in pedicellis vix lineam longis, ipſi 9. ad duodecim numerantur. Calycis duo ſegmenta ſuperiora breviſſima, ad ſe invicem curva, tria inferiora majora triangularia, omnia ſubhirſuta. Vexillum reliquis petalis multo majus, ſature caeruleum, fere totum coloratum, petiolo brevi, elevatum, emarginatum. Alae carina longiores, hamis obtuſis, bractea rotunda caerulea. Carina bipes fiſſilis hamis obtuſiſſimis, tum mucrone, qui caeruleus eſt; cum reliqua carina alba ſit. Siliqua glabra plana, lata, & in medio latior. Semina ad duodecim: maturam non vidi.

Cum deſcriptione *Viciae onobrychidis flore* convenit C. B. *Prodr. p.* 149., & cum nomine *anguſtifoliae purpuro violaceae ſiliquis latis glabris* ex Delphinatu miſſa eſt, ſed ea, cum ſemina tantum quatuor habeat, noſtra non eſt. Erit adeo *Vicia* 6. Linn.

A *multiflora* ſegetum floribus multo grandioribus, paucioribus, ſtipulis ſerratis, ſiliquis pro portione longioribus, & magis polyſpermis, toto habitu duriori differt.

39. *Clymenum Pariſienſe* paſſim in Helvetia naſcitur. Reperi abunde in pratis ad lacum Lemanum prope *Ebro*, tum

ad *Broyam* fl. inter la *Sauge* & *Sugy*, & in pratis paluſtribus inter *Chambon* & *Cheſſel*. Cl. GAGNEBIN circa *Landeron*.

40. Inter plantas THORELLII helveticus omnes, & circa *Vevai* inque Aquilegienſi ditione lectas, fuit *Anagyris foetida*: locus autem natalis nullus additus eſt.

41. Inter Geniſtas certo diverſa eſt ab ea, quae eſt *hyperici folio*, ſpecies a Cl. GAGNEBIN reperta à la *chaux de fond dans la grande pature la Breche*, & in Burgundiae Ericetis; tum a D. CHATELAIN a *Roulier mairie de la Brevine*. Haec ſtirps & a me, & a Cl. GARCIN pro varietate habita *Geniſtae* 2. *Enum.*, vere differt, mereturque novum nomen GENISTAE *caule decumbente ramoſo*, *foliis ovatis*, *floribus longe petiolatis*. Comparavi ſollicite cum Geniſta foliis hyperici, cui propior eſt, & multa reperi ſimilia, etiam angulofos caules & ramoſos. Folia non valde differunt, niſi quod piloſa magis ſunt, neque ſericea; caeterum ovatis longiora, obtuſa. Petioli florigeri incipiunt differre: hi enim in *hyperici-folia*, germanica & monſpelienſi, breves ſunt, linea paullum longiores, ut flores ſeſſiles videantur: in noſtra unciam aequant. Porro, flos proportione multo major eſt, & plus duplo. Calyx, qui *hyperici-foliae* ſtrictus, ſuperiora duo ſegmenta aequalia lata triangula & acuta habet, inferiora tria connata, huic campaniformis eſt, bilabiatus & ſegmenta duo ſuperiora connata curvula, breviter ſeparata habet. Vexillum ex breviori proportione petiolo, amplum eſt, & emarginatum, venis pictum. Alae evidentiori hamo, proportione latiores. Carina, quae illi obtuſiſſima, huic roſtrum habet, modice acutum. Porro vexillum & carina *hyperici-foliae* exterius ſericeae ſunt, in noſtra glabrae. Totus denique habitus mollior noſtro eſt, & folia minime aut dura, aut plicata, minorque pars ramorum indureſcit.

42. *Me-*

42. *Medicae* 3. *Enum.* in colore varietas fere ejusmodi est, ut exterior vexilli pars ex violaceo in flavum langueat; unde, dum clausus flos a vexillo fere totus continetur, idem violaceus apparet, explicatus autem ochroleucum colorem expedit, qui in nostris flavo frequentior est.

43. TRIFOLIUM *pratense purpureum minus foliis cordatis Enum. helv. n.* 13. *p.* 585. nunc, utrisque speciminibus comparatis, conjungo cum *Trifolio caule hirsuto, scabro, foliis mollibus, integerrimis spicis subvillosis ochroleucis* Cl. LACHENAL *p.* 2., quod Cl. vir in M. *Vogelberg*, & versus *Schaumburg* & *Prattelen*, & D. BERDOT *in monte Beligardo* reperit. Folia ima saepe cordata, emarginata; superiora sub floribus stricta & linearia sunt, omnia dentibus destituuntur, & ea nota ab *albo* pratensi distant. Ad originem foliorum caulinorum vaginae venosae, bicaudes, caudis ex latiusculo principio longe subulatis. Spicae brevi petiolo super folia se efferunt, floresque longos & strictos habent, ochroleucos. Dentes calycis quatuor graciles, aequales, imus latior & longior; omnes ex lateribus molliter pilosi.

Non habet LINNAEUS.

44. TRIFOLIUM *flosculis albis in glomerulis asperis cauliculis proxime adnatis* VAILL. *T.* 37. *f.* 1., & a Cl. LACHENAL in arenosis ad Birsam, & a me an. 1757. in arcis S. *Triphon* area, cum *medica echinata*, maxima copia repertum paullo accuratius nunc describo. Ex una radice, numerosi caules nascuntur, secundum terram prostrati, semipedales & aliquanto longiores. Folia firma, subhirsuta venosa, obtuse rhomboidea, ex angulo initio facto, fine in arcum. Capitula parva, sessilia ad foliorum alas, subaspera ob calyces grandiusculos. Ii campaniformes, contracti pene globosi, dentibus quinque triangularibus, quorum duo superiores minimi, medii mediocres sunt, imus minimus. Flos paullo calyce longior, strictus, inapertus, albus. Vexillum plicatum, sursum flexum, alarum hamus brevis, & quatuor petala distincta.

45. In

45. In Anonide 5. sive *spinosa lutea minore* C. B. sunt quae emendes. Adfinis *pusillae glabrae angustifoliae*, quae monspelio cum nomine *minutissimae* LINN. *n.* 3. *p.* 717. missa est, tamen differt foliis totoque habitu hirsutis. Caulis humilis vix sex unciarum ramosus, parum erectus, totus obductus foliis & stipulis siccis lineatis, lanceolatis, aristatis, & dentatis. Folia hirsuta, & aliquantum viscida, in forti petiolo ternata, pene ovata, argute circumserrata. Flos sessilis: calyx patulus, profunde in quinque lanceolatas, lineatas, longe aristatas, partes fissus. Vexillum pallidum, purpureis lineis pictum, peramplum, ovale, plicatum. Alae saturatius flavae, quam carina longiores, hamatae. Carina ad obtusum angulum flexa, mucrone obtuso, in lato, brevissimo petiolo. Tuba filiformis. Fructus brevis, ovatus, sub-conicus, turgidus, niger. Semina quatuor flava, phaseoli similia, sed breviora. Abunde secundum viam le *Tombey* & circa *Bex*, & in M. *Fouly*.

RINGENTES ROYEN.

46. LENTIBULARIA *minor* in paludosis à la *Chételaz* vallis minoris Monasteriensis reperta est a Cl. GAGNEBIN. Eam Cl. LINNAEUS in *flor. suec. p.* 10. descriptam dedit.

47. *Euphrasiam tenuissime dissectam* vere a vulgari minori flore differre vehementer dubito. Abundat circa *Bex*, *Agaunum*, etiam versus fontem *Furet*.

48. Pedicularibus nullam novam speciem addo, plerasque aliis in locis repertas confirmo.

In mucronatis illis fructibus speciei I., ultimae, & procul dubio aliarum etiam alpinarum, loculi septo imperfecto distinguuntur, quod paullatim versus apicem fructus evanescit; ut in summo cornu loculus unicus sit.

49. Pe-

49. *Pedicularis* 3. Enum. ab eo tempore a nemine in Helvetia reperta, neque a LINNAEO repetita, tamen ab omnibus noſtris differt, adfinis quidem primae, ſed roſtro floris multo breviori, foliorum etiam pinnulis brevioribus & obtuſis.

50. Contuli etiam cum Cl. virorum plantis meas. *Pedicularis* I. J. Fr. SEGUIER eſt omnino noſtra 8. Non autem *Pedicularis foliis bis pinnatis, calyce non criſtato, floribus ochroleucis in ſpicam nudam congeſtis* Cl. ALLIONE *p.* 50. *T.* 11., quae quidem non foliorum longiorum de ſpica eminentium defectu a noſtra differt, ſed foliis multo minus profunde bipinnatis.

51. *Pendicularis foliis alternis, pinnis ſemipinnatis floribus roſtratis ochroleucis denſe ſpicatis* ALLIONE *p.* 51. *T.* 11. differt a noſtra *atrorubente* nervo non folioſo, atque adeo ad eam pertinere nequit: adque noſtram certe PEDICULARIS *foliis alternis pinnis ſemipinnatis floribus laxe & longiſſime ſpicatis* EJUSD. Cl. viri p. 54. T. 12. ob eam notam potius accedit.

PEDICULARIS EJUSD. p. 52. T. 12. f. 1. ab omnibus noſtris differt.

PEDICULARIS *caulibus reflexis ſpica laxa purpurea* SEGUIER p. 125. eſt omnino noſtra 2.

Pedicularis alpina lutea EJUSD. p. 126. habet multo tenuiora folia, & minus repetito pinnata, quam noſtra ejus nominis.

52. Cymbalariam hybridam eſſe, & ex utraque Elatine adulterio proveniſſe dicitur a Cl. Auctore *plant. hyb.* n. 30. Glabritie fabrica, foliis, ſede natali ab utraque differt, nam ſegetales ſunt, cymbalaria autem eſt muralis, & naſcitur iis locis, quos nulla Elatine frequentat; ab iis vero perpetuo abeſt, in quibus utraque abunde provenit, ſegetibus nempe etiam frigidioribus Germaniae Septentrionalis & Helvetiae.

VER-

53. NOva civis eſt CASSIDA *procumbens*, *foliis ovatis*, *crenatis ſubhirſutis*, *ſpicis folioſis*.

Niſi a SCHEUCHZERO forte cum nomine *Teucrii inodori magno flore*. *Itin. V. p.* 428. deſcribitur, non addito loco natali. Certe fructus, eo loco dictus, ad *Caſſidam* utcunque pertinere videtur, cum *quatuor* ei *loculamenta* tribuat SCHEUCHZERUS. Sed *atropurpureus flos*, quem dicit *Itin. VII. p.* 519. & nigredo, quam in foliis ſupervenire addit IDEM *Itin.* I. p. 50. & IV. l. c. & locus, quem in alpium ſaxoſis ponit, tanquam plantae vulgo notae; denique, quod *Staeheliniae* nunquam meminit, quam multo minus quam noſtram, raram certe ſtirpem, praetervidere non potuit, haec faciunt omnia, ut eum Cl. Virum *Staeheliniam* teucrii nomine voluiſſe perſuadear. Noſtra enim Caſſida unico hactenus loco in Helvetia certo viſa eſt, in M. *Fouly*, ſecundum lacum.

Specioſa planta radicem habet ſeſquipedalem, ramoſam, teretem; caulem procumbentem, ramoſiſſimum, ramis dodrantalibus & pedalibus. Folia petiolata, ex ovatis obtuſa, mucronata, & obtuſe pariter dentata. Bracteae ovales, ſubhirſutae, integerrimae. Flores ſpicati, congeſti. Spica dum floret uncialis. Calyx, qualem character generis requirit, brevioris calcei ſimilis. Flos ſpecioſa magnitudine: labium ſuperius caeruleum, ſubhirſutum: ſegmenta lateralia duo ſubrotunda: pars inferior palato contra galeam tumet; barba obtuſa emarginata, parva parte caerulea, reliqua alba & pallente.

A *Caſſida ſpicis folioſis* praeter colores differt foliis glabris, bracteis pro portione floris minoribus, caetera valde ſimilis.

54. Salviam helveticis addo.

Salvia *foliis petiolatis, cordiformibus, obtusis, verticillis nudis.*
Horminum sylvestre III. Clus. *p. XXIX.*

Nascitur in M. *Luan*, in ipso pago *Leisin*, in pratis circa *Escharpigny*, & in rupestribus prope *Roche* versus scaturiginem le *Furet*.

Folia longe petiolata, circa petiolum emarginata, circumserrata, hirsuta. Ima saepe duas auriculas habent, petiolo sub ipso folio adnatas, exiguas, serratas, a Clusio minime neglectas. Caulis longe nudus, frequentibus, nudis, densis, florum verticillis ambitur, qui breves, aequales, in circulum non longum, multoque foliis minorem congesti caulem ambeunt. Flores in hoc genere ex minimis, quos recte *lavandulae* flores non superare Clusius monet. Calycis dentes snperne tres, inferius duo, triangulares, majores: Flos sature caeruleus. Vexillum cavum, simplex, integrum, cochlearis similitudine. Alae laterales ad perpendiculum longiores, barba profunde excisa. Antherae duae in bifidi filamenti altero cornu sessiles.

55. Horminum *foliis cordato obtusis, caule nudo*, Linn. spec. p. 590.

Melissa pyrenaica caule brevi plantaginis folio J. R. H. Magnol *hort. Monsp.* cum icone.

Cl. Schinzius legit in alpe *Teuri* & *Alveney*, & mecum communicavit Cl. Gesnerus.

Folia ad terram petiolata, perfecte ovata, circumserrata. Caulis dodrantalis, pedalis, pene aphyllos, praeter bracteas aliquas, ex ovatis lanceolatas, integerrimas. Verticilli pauciflori, in meis plerumque ad alterum latus conversi, ad caulem sessiles. Calycis de more tres dentes sursum reflexi, duo alii deorsum, omnes aristati. Flos grandis, peculiariter latus, eminente tuba, quem recentem non vidi.

56. Cattaria *hispanica betonicae folio* circa Rupem ubique provenit, in scopulis versus scaturiginem le *Furet*, in sepibus *aux Gauges*, passim etiam in via regia.

Sed aliam speciem Cattariae indigenis addidit Cl. le CLERC, ad pedem M. Jurae lectam, quam etiam circa *Wasen* SCHEUCHZERUS indicat.

CATTARIA *tomentosa, foliis longe acuminatis, acute crenatis. Cattaria angustifolia minor* J. R. H.

Cum *Cattaria vulgatissima* convenit, caeterum folia proportione multo longiora habet, & angustiora, tota cum caule albo tomento obducta, calycem perinde tomentosum. Flos violaceus: odor virulentus pulegii.

57. MELISSA offic. utique sponte provenit, passim circa *Rupem*, *Aquilegiam*, (*a Verpousaz*) Octodurum, a *fulleyn.*

58. LAVENDULA *angustifolia* in monte *Vuilly* super vineas maxima copia in sabuletis a me lecta est, tum a D. DIVERNOI in desertis montium.

59. HYSSOPUS ad rupes Valesiae & Delphinatus: *Rosmarinus* non vere quidem spontaneus, in rupibus supra *Ivorne*, tum ad pedem gypsariarum rupium prope *Bex*, & alibi se sponte propagat, atque arborescit.

MENTHA *angustifolia I. spicata* C. B. a D. GAGNEBIN haud longe a *Ferriere*, in Burgundia quidem a *Goumey* prope *Dubim* fl. tum à la *laiche*: a me in vallis Vaudensis viis publicis reperta est, haud longe Vivisco.

Mentha palustris verticillata ab *Arvensi* staminibus eminentibus *Enum. Gott.* diversa passim in Helvetia provenit, ut circa *Anet*.

60. *Marrubiastrum vulgare, quod stachys minima* RIV. circa *Bevieux* in segetibus legi, & in vineis *Mulhusiae* Cl. HOFER *Act. helvet.* T. II.

61. CALAMINTHA *pulegii odore* florem valde similem habet *montanae Germanicae*, cum qua frequentissima nascitur circa *Roche*. Sed quae pulegii odore est, florem habet multo minorem, dilute violaceum, tubam tamen proportione longiorem, folia rotundiora. Altera habet folia acuminata, grandiora multo, florem purpureum, duplo majorem, tubam breviorem.

62. MOLDAVICA *foliis fasciculatis ellipticis, integerrimis, nervo divisis.*

Chamaepytis Austriaca RIVIN. T. 73.

Passim in montibus Aquilegiensibus provenit *aux Nombrieux, à Prapioz, Sur champ*, & in M. *Richard*.

Cum *Ruyschiana glabra foliis integris* AMMANNI omnino eadem planta est, ut specimine Gmeliniano cum alpinis collato facile confirmavi. A *Ruyschiana foliis cartilagineis*, pariter ex Sibiria missa, manifeste differt, foliis quidem tenuioribus, nervo medio eminente divisis, qui in Sibirica nullus est, foliis novi rami longis, quae isti brevia sunt, unde habitus fasciculatus; calycis aristis multo brevioribus: caeterum neutrum folia partita habet, aut spinarum quidquam. Nostrae calycis segmenta quinque, supremum triangulare latius, quatuor reliqua angustiora similia. Flos uncialis sature caeruleus, hirsutus, labium superius incisum, alae sive partes laterales ovatae lanceolatae. Barba bifida, circumserrata, maculata. Stamina quatuor, antheris nigris, albo polline.

DIPSACEAE.

63. VALERIANA *foliis integerrimis, radicalibus ovatis, caulinis linearibus obtusis.*

Nardus celtica J. B. *T. III. p.* 205. & omnium auctorum.

In tenui gramine altissimorum montium ad dextra lacus *Ferraire*, tum in montibus vallis Augustae, donec e regione sis vici *Estrouble*, & supra S. *Bernhardum* CLARETUS. In M. *Scheinberg* Switensium Cl. SCHINZ. Etiam a Cl. ALLIONE accepi.

Plantae characterem nunquam, quantum video definitum, ad recentes plantas designavi. Radix odore forte & stabili, Valerianae, multis squamis obnupta, fibras plurimas cylindricas, durasque, demittit, & multos caules producit. Cau-

lis triuncialis & semipedalis, erectus, simplex. Folia ex radice quatuor, aut paullo plura, petiolo unciali latiusculo, ipsa elliptica, aut longe ovata, obtusa, crassiuscula, pallida. In caule unicum par foliorum linearium obtusorum. Caulem terminat spica nuda, duobus, tribus, quatuorve verticillis florum facta. Eorum verticillorum quilibet constat duobus petiolis trifloris, in supremo unifloris. Semina anulo striato, deinde evoluto pappo terminata, ut in tota gente: Flos campanula lata, patula, quinqueffida, aequalis, extus purpurea, intus fere cinerea: segmenta lanceolata. Tuba flava, longe eminens, terminatur tribus clavis. Stamina in his exemplis nulla. In aliis vero floribus aliorum exemplorum tres antherae flavae, grandes, suis in filamentis extra florem elatae, bifidae, tum flos purpureus, & tamen semen. Explicat rem Claretus, ut vere non dioica planta sit, sed mascula stamina prima prodeant, iisque senescentibus pistillum trifidum succedat.

A Cl. Morenio multo majora, caeterum similia exempla accepi.

Si Valeriana vulgaris laudes meruit Cl. Hillii, majorem spem ab ista specie licet concipere, quae in altissimis montibus nata, multo acrioribus sit viribus, odore vulgarem valde superet.

Celticam vero spicam *Valerianae maximae cacaliae folio* radicem esse (Hill. *mat. med.* p. 580.), comparatis speciminibus, non inveni, neque ea Valeriana in Germania alpina provenit, ex qua in Aegyptum mittitur Hasselquist p. 537.

De Scabiosa 2. 3. 4. valde dubito.

CAPITATAE.

64. Cinara *foliis petiolatis, lanceolatis, ad pediculum emarginatis.*

Rhapon-

Rhaponticum alterum angustiori folio LOBEL ic. p. 288.

Nobilis planta, neque cognita nuperis, etsi ad medicinariam rem pertinet, nascitur in M. *Jeman* altiori dorso.

Radix crassa, pollicaris, teres, longa, aromatica quando recens est, per siccitatem rugas longas agit, & corona foliorum siccorum terminatur. Folia ad radicem multa, longe petiolata, plerumque ad lapathorum morem longe lanceolata, ad pedunculum emarginata, per oram non profunde dentata, in parte aversa albo tomento obnupta. Non rarum est tamen, aliquot paria pinnarum acutarum & gracilium ad hunc petiolum accedere. Caulis latus, digitalis, cubitum altus. Ad caulem folia pauca, similia, sed breviter petiolata, aliquando pinnata. Flos semper unicus caulem terminat, maximus inter capitatas indigenas, ut soli cinarae cedat, biuncialis undique. Squamae calycis multorum ordinum siccae, petiolatae, fine dilatato, ora lacera & laciniata, ut in Rhapontico vulgari. Flosculi omnes fertiles, semine columnari longo pappo coronato, qualis etiam in placenta est. Flosculi tubo gracili, campanula inclinata, purpurea, tuba eminente.

JACCA *incana capite pini* non recedit, etiamsi folia pleraque pinnata & aliquanto, quam nostra planta, magis villosa habet, uti quidem solent in calidis regionibus tomenta foliorum augeri. Caput enim squamaeque calycis conveniunt. Folia semipinnata MILLERI T. 153. in nostra pariter reperiuntur.

65. Carduus γ, etsi multiflorum caulem habet, non differt a n. 4.

Carduus 3. *Acanthoides* J. B. T. III. p. 56. passim a me repertus est ad vias, etiam albo flore prope *Salzderhelden*.

Caulis ramosus, flavis robustis, eminentibus lineis, & alis foliosis percursus, serratis dentibus, in flavescentes fortes aculeos exeuntibus, quales etiam ex foliorum dentibus producuntur. Folia aliquantum *carduo turbinato* affinia, pinnata, nisi

nisi quod nervus foliosus est, pinnis retroversis, singulo nervo in similem fortem aculeum exeunte, subtus pilosa. Flores summos ramos terminantes minores quam nutanti, sessiles, absque petiolis, hinc minime nutantes, squamis numerosis, vagis, etiam reflexis, in similes aculeos, non fortissimos terminatis.

66. CIRSIUM 2. *Enum.* abunde reperi in adscensu des *iles d'Ormond à la Croix*, circa molendinum *arveja*, & alias in pratis vallis *Ormond dessus*, tum in pratis vallis Juranae. GAGNEBIN *à l'échelette sur l'Anvers de Renan, au Bugnenet, aux Convey, à la ronde de Chaux de fond*, circa Monpelgardum D. BERDOT. Cl. le CLERC aux environs *de la dole*, & in M. ad *Gex* pertinente, in adscensu a *Gex* ad *Misoux à la faucille*.

Idem est *Cirsium decimum Enum.*, & demum *Cirsium nonum ejusd. Enum.*, quas species expungere oportet.

Proprium huic plantae est, habere ima folia integra, dentata, superiora vero eo magis laciniata, quo altiora sunt, donec pinnata sint, ut in polypodio, a quo nomen habent, pinnis longis, aliquot praegrandes dentes emittentibus, ut in carduis *turbinatis*, per oram molliter spinosis, extrema tamen pinna semper longiori. Caulis profunde sulcatus, cubitalis & bicubitalis, parum foliosus, sub flore tomentosus. In summo caule, & in ramis, tres quatuorve flores brevibus in pedunculis. Flos conicus, quando floret, squamis plurimorum ordinum, glabris, sublividis, mollissimo mucrone, triangulis, & eo longioribus, quo sunt interiores. Pappus plumosus. Flosculi de more gentis, alias ochroleuci, alias purpurei, cum tuba insigniter eminente. Semina ovata, compressa, linea percursa.

Vicinum *cirsio pratensi acanthoidi* folia nulla floribus substrata habet.

Proliferum etiam reperit Cl. GAGNEBIN fere singulis calycis foliis in florem imperfectum exeuntibus in pratis *de Convey*.

67. CIR-

67. CIRSIUM *foliis triangularibus*, *lunate dentatis*, *subtus tomentosis Enum. Gott. n.* 16. in M. *Fouly* florens contemplatus sum. Flores in umbellam potius, quam spicam, septem vel octo. Calycis folia hic magis, quam in speciminibus circa pontem *Diaboli* olim a me lectis, lanata, triangularia, brevia. Flosculi omnes androgyni, violacei, tubo stamineo eminente, de quo tuba leviter incisa prodit.

Non repugno esse *Cynoglossi folio* HORTI ELTHAMENSIS, etsi in Anglia, ac suecia folia lata non habet (LINN. *flor. suec. n.* 714.). Serratula vero caule ramosissimo 6. ZINNII *p.* 387. differt flosculis carneis calycem non superantibus.

68. Cyanum 3. legit D. LACHENAL circa Basileam.

DISCOIDEAE.

69. TANACETUM *flore nutante* nascitur in *Goldey* prope *Underseen*, repertum a D. BERDOT, & circa Mulhausen a Cl. RISLER. Characterem dedi in *Enum. Gott. p.* 371. Ab astere omnino recedit cum semina pappo destituantur, & flosculi in ambitu feminini imperfecti sunt, & absque ligula.

70. *Absinthium Romanum* vera indigena est, & ad rupes circa *Lavey* abunde nascitur.

Sic & ARTEMISIA *foliis duplicato pinnatis*, *pinnulis parallelis tomentosis Enum. Gott. p.* 372. sive *Absinthium tenuifolium* in M. *Chetillon* circa scaturiginem torrentis *Grisonne* provenit, & in Rhaetiae M. *Beverin* a Cl. SCHINTZIO lectum est, tum *à Couvet*, *à Travers*, & *au cul des Roches* a Cl. GAGNEBIN.

Artemisiae 6. Enum. Helv. folia prima sericea & incana sunt, ut aliam omnino plantam promittant.

71. Artemisiae 3. nomine duas plantas Cl. viri conjunxerunt. Earum rarior est, ARTEMISIA *foliis sericeis*, *caulinis pinnatis*, *radicalibus bis tripartitis*.

Absin-

Absinthium alpinum spicatum foliis petiolatis bis trifidis, caulinis pinnatis Cl. ALLIONE *stirp. Pedem.* T. 1. p. 5. huc omnino pertinet.

Nascitur in M. *Fouly* Valesiae, nova planta. Folia ad terram petiolata, sericeo brevi & adpresso tomento obducta, incana, tripartita. Segmentum quodlibet ex petiolo tripartitum, laterale inaequaliter, medium aequaliter. Ultima segmenta lanceolata, obtusa, obtusiora etiam in caulinis foliis. Caulis dodrantalis & semipedalis, non ramosus. Folia ad caulem sessilia, pinnata, pinnarum paribus quatuor, extremo segmento maximo, & latiori, pariter sericea. Petioli floriferi solitarii ex alis foliorum, in longam foliosam spicam digesti, cujus pars summa densior est, & petioli breviores, erecti omnes. Calycis folia ovata, subhirsuta, ora fusca. Flosculi in ambitu feminini, sola cum tuba; semine plano, pene cordiformi, & absque staminibus. Interiores androgyni, cum lutea campanula, & staminibus. Placenta nuda.

Icon BARRELIERII n. 642. & sylvii BOCCONE T. 71. huic propior est.

72. ARTEMISIA *foliis sericeis caulinis pinnatis, radicalibus petiolatis pinnatis, pinnis trifidis & quinquefidis.*

Absinthium alpinum incanum C. B.

Haec multo vulgatior, in plerisque montibus editis & frigidis, alpium tamen, provenit, tum ad Rhenum superiorem & lacum Rivarium: in alpibus Uriensium, Angelimontanorum, Abbatiscellanorum J. GESNER. SCHEUCHZER in M. *Joch Tittisperg*, *Gemmi*. Ego in *Gemmii* meridionali descensu, in M. *Scheidek*, *Mettenberg*, *Grindel*, *Wangenalp*, in alpibus Aquilegiensium *Enzeinda*, *Prapioz*, *Chapüise*, *Jeman*, *Sur champ*, *Richard* legi; tum *ex valle de Bagnes*, *S. Bernhard* & aliunde habui.

Alia planta omnino, etsi leviter adspicienti eadem videri possit. Radix brachiata multiplex, lignea, teres, tuberculosa. Folia ad radicem petiolata, pinnata, pinnarum paribus duobus,

duobus, extrema impare: pinnarum quaelibet iterum trifida eſt & quinquefida, ſericeae quidem omnes, ſed anguſtiores, hinc acutiores quam priori, caulis pariter ſubhirſutus, purpuraſcens. Folia ad caulem pinnata, duorum, triumve parium, pinnis anguſtioribus, quam prioris, & ſimplicibus, lanceolatis; demum ſimplicia ex ovatis lanceolata. Flores in petiolis longioribus etiam ſeſcuncialibus erecti, niſi quod imi, forte ſoli, in gracili pedunculo nutant. Calycis folia hirſutiora, quam priori, viridiora, ora minus fuſca, aut omnino alba. Circulus caeterum ſimilis floſculorum femininorum, imperfectorum, cum interiores androgyni ſint, & campanulam quinqueffidam, luteolam habeant. Placenta nuda. Tota planta priori minus dura, odorata, aromatica, uti prior, ſed aliquanto diverſo odore. Vocant *Genipì blanc* alpicolae, & ea pariter ut Achillea in pleuritide utuntur.

Inter ſibiricas GMELINI haec eſt *Artemiſia* 95. etſi alio cum ſynonymo, teſte planta ſicca MARTINIANA. *Abſinthium V.* GMELINI *p.* 128. *T.* 62. alia omnino planta eſt, vel receptaculo teſte, altiori etiam habitu.

73. Abſinthium I. Enum. ſeu *alpinum candidum humile* a n. 72. non differt, cui perfecte convenit figura Cl. ALLIONII. Unice minora exempla ſunt, floribus nullis petiolatis, iiſque in ſummo caule congeſtis.

74. *Gnaphalium* 3. *ſeu Americanum latifolium* omnino totum collem late operit ad dextram villae *Drakau*, ſupra Arolam. Non repugno vero primordia ex horto habuiſſe.

75. *Gnaphalium* 7. ENUM. habet multo plures flores ſeſſiles, congeſtos, breviores, calycibus villoſis, ſquamis lanceolatis, ora fuſca: floſculos in ambitu pariter feminas, minimo floris tubo, & eminente cum tuba: androgynos tamen etiam numeroſos, campanulatos.

76. *Gnaphalium* 8. ENUM. habet flores tres quatuorve in ſummo caule congeſtos: ſquammas calycis lividas fuſcas, ſubhirſutas, oris nigris, juniores tamen penitus albas. In

ambitu flosculi feminini pauci, tuba eminente facti, & tubo florali; interius androgyni numerosi. Iis campanula quinquefida pallens, de qua tuba bifida cum pappo longe eminet. Folia prima, subrotunda. In Montibus *Sur champ* & *Richard*. Vera & diversissima planta est. Erit FILAGO *caule simplici, floribus cylindricis, fuscis, in summo caule quaternis papposis*.

77. Alia iterum planta est FILAGO 6. Enum. *caule simplicissimo, paucifloro, calyce fusco, glaberrimo*.

Gnaphalium supinum Lavandulaefolio BOCCONI p. 107. T. 85. ut videtur.

In *Wangenalp*, *Jeman*, *S. Bernhard*, montibus vallis de *Bagnes* &c.

Huic caules simplicissimi, dum floret, vix erecti, aegre triunciales, postquam defloruit etiam semipedales. Flores in summo caule tres, duo, saepe etiam unicus congesti dum planta viget; postquam defloruit remoti: proportione plantae magni, cylindrici, sed breviores quam Filagini 7.: squamae calycis glaberrimae, fuscis oris. Flosculi in ambitu pauci imperfecti, plures androgyni, campanula flava in fuscum colorem degenerante. A filagine 8. calyce glaberrimo differt, a spicata, quae etiam in alpes adscendit, habitu paucifloro, flore non conico.

Hoc est ex descriptione *Gnaphalium* 29. LINNAEI, etsi alia habet synonyma. De flosculis vero androgynis non adtinet dubitare.

78. PETASITES *floribus spicatis, flosculis paucissimis androgynis, calycis foliis lanceolatis* abunde nascitur in sylva *Traversin*, ubi legi, qua itur au *Torrent des males pierres*, & à *Roulier mairie de la Brevine* a Cl. CHATELAIN lectus, tum in valle *Ormond dessus* passim, & alibi in frigidis alpium, *Breitlawenen &c.*

Cum Petasite 3. in multis convenit, diversa tamen, non solum multo foliorum, & caulis tomento, sed potissimum etiam spica brevissima, pauciflora, flore sextuplo majori;

segmen-

segmentis calycis lanceolatis, quae in Petasite 2. obtusa sunt. Character similis, & duo, vel tres unice androgyni flosculi, cum multis femininis.

Xeranthemum, a me descriptum p. 709. omnino varietas est vulgaris *Xeranthemi* junioris, nondum explicati, valde ramosi.

RADIATAE.

79. Inter Erigerontis species oportet conjungere duas, quas primo & secundo loco enumeravi. Nam vere omnino continua serie progredi licet ab exemplaribus caule unifloro calyce albo tomento obducto, quae species in M. *Enzeinda* abunde provenit, altioribusque montibus vallis *Bagnes*; inde ad speciem 2. ejusque varietatem *minorem*, cui calyx & folia subhirsuta, & denique glabra sunt; caulis etiam uniflorus, & quae *Conyza caerulea alpina minor* C. B. est: denique ad varietatem 3. altiorem, cubitalem, foliis etiam ad caulem subrotundis, caule brachiato, aliquot floribus terminato, quae *Conyza caerulea alpina major* C. B. Varietatem 2. albo flore reperi in *Enzeinda*, *Chapuise*, *Forclettaz*, & *Prapioz*. Varietas altior crescit in M. *Dansex*, *Richard*, *Sur champ*, & *Ovannaz*. Nomen autem melius dici potest Erigeron *foliis imis petiolatis subrotundis, ad caulem lanceolatis, petalis femininis ligulatis*.

80. Asteribus oportet tres species addere, noviter in Helvetia inventas, flavo flore omnes.

Aster *caule ramoso, foliis ovato lanceolatis subtus incanis, odoratis, floribus luteis umbellatis*.

Helenium montanum salicis folio subtus incano Vaill., ut ex specimine sicco confirmor, quod a Vaillantio per Staehelinum ad me pervenit: synonima vero huc referri nequeunt, cum *Aster III. Pannonicus* Clusii diserte ab Ill. Viro dicatur odore carere.

Passim

Passim circa Bernam a me lectus est inter arundines supra praedium *Inseli* ad *Arolam fl.*, deinde inter salices *aufm bodenaker*, inque insulis circa *Hunziken*, & in solitudine *die Eymatte*, autumnalis planta, parum nuperis cognita. Radix lignosa, teres, deorsum fibras numerosas demittit. Caulis bicubitalis, ramosus, superne brachiatus, valde multiflorus, rectus, firmus, lineatus, hirsutus, saepe purpureus. Tota planta odore conyzae est, & pene pulegii. Folia inordinata, sicca, ex ellipticis lanceolata, rariter dentata, rugosa, subhirsuta, subtus pene tomentosa, alba. Flores in umbellam planam dispositi, dense congesti ad quemlibet ramum aliquot: Calycis folia exteriora lata, lanceolata, reflexa, vaga, duorum ordinum: interiora erecta, & ad florem appressa pariter duorum ordinum. Petala plana 40. & ultra, obtusa, quinque dentata, aliquot ordinum, sibi fere paralla, flava. Flosculi copiosissimi, discus planus. Staminum aculei retrogradi, ut LINNAEO *Inula* sit. Seminis pappus longiusculus.

Odores & colores, qui sensibus percipiuntur, quando constantes sunt, in plantarum nominibus excludere, in animalibus admittere ejus est, qui leges nutu figat atque refigat.

81. II. ASTER *foliis radicalibus petiolatis ellipticis, ad caulem lanceolatis, sub caulis divisione laciniatis.*

Aster luteus major folio succisae RUPP. p. 180. *ed. meae*, non vero C. B., qui *Inula* 4. LINN. *spec. p.* 882. uti quidem suspicor.

In Germania legeram Jenae, locis a RUPPIO citatis, tum circa *Salzderhelden*, ad *Werram* fl. prope *Witzenhausen*, & alibi. In Helvetia abunde reperi ad oras lacus Lemani, aux *Grangettes*, haud longe *Noville*.

Satis adfinis Asterisco, ejusque iconi CLUSIANAE, & ab Astere 3. Enum. *Stirp. Helv.* diversissimus est. Radix exigua, dura, capillata, multifida. Caulis hirsutus, purpureus, cubitalis aut aliquanto altior. Folia prima utique cum Suc-

cisa conveniunt, petiolata, elliptica, mucronata, perpaucis denticulis notata, aut nullis, leviter utrinque hirsuta. Folia caulina evidentius serrata, ora saepe purpurea, principio angustiori, petioli simili; inferiora latiori basi quasi caulem amplexa, ex ellipticis lanceolata; superiora etiam plicata & laciniata. Flores in summo caule aliquot; grandes, uncia latiores. Folia calycis exteriora lata caulinorum similia, retrograda: interiora angusta, subhirsuta, apicibus longe lanceolatis, reflexis, laxa, neque sibi, ut in Astere 4. adplicata. Petala semper numerosa, quinquedentata, angusta, plurium ordinum. Semiflosculi minimi, discus paullum convexus, pappus longus & copiosus.

82. ASTER *foliis omnibus integerrimis, ovatis, tomentosis, caule unifloro.*

Aster montanus hirsutus LOBEL p. 350.

Auf der Kandermatt Cl. KOCH pharmacopola Thunensis: Circa *Kertzen* Cl. RAMPSEK. Ego nunquam reperi. Facile adgnoscitur foliis nitentibus, sericeis, crassulis, utraque superficie albo tomento obnupta, ora levissime serrata. Ima petiolata sunt, suprema amplexicaulia, lanceolata. Flos grandis uncialis. Calycis squamae imae nitidae, non ita reliquae, latae omnes, lanceolatae, in meis speciminibus per aetatem repandae. Semiflosculi lati, aurei, quinquedentati. Flosculi numerosissimi, pappus copiosissimus. Non omnino singulares, sed duo, tresve in uno caule flores sedent.

Asterem 9. nemo recentiorem reperit.

Inulae genus, ut a minuto, & in minoribus speciebus aegerrime percipiendo charactere sumtum, totum artificiale est.

Ad *Senecionam* II. *S. Chrysanthemum alp.* 1. CLUS. *Pann.* p. 566. adde abunde nasci in M. *Jeman*, & popularibus dici *Genipì Jaune*, & in montibus etiam supra *Bagnes* lectum esse, & in *Bovinaz*, montibus vallis Augustae, atque supra *S. Bernhardi* M.

Calycis ſegmenta unius ordinis, obtuſa, nigro margine finiuntur, cum pauciſſimis, aut omnino nullis ſquamis, ad baſin floris acceſſoriis. Petala lata, lineata, obtuſa, inciſa, pauca, duo, tria. Floſculi grandes & ipſi pauci: pappus praelongus.

84. *Jacobeae vulgaris* ſpecimina prope *Roche à la marbrière* menſe Octobri reperi, quae perfecte abſque radiis eſſent.

Sencionem 6. parum diverſum a *vulgari Jacobaa*, cui & ipſi juniori calycem ſaepe lanuginoſum reperi, legi ad lacum lemanum.

De *Senecione* 12. 14. 15. 16. 17. nihil porro inaudivi.

85. *Anthemis* MICHELI *Chamaemelum* quidem eſt VAILLANTII, ſed eae plantae, quas nunc expono, facile poſſunt cum *Achilleis* manere, quarum ſemifloſculi breves ſint latique. Difficillimum vero fuerit, tres, quatuorve ſibi ſimiles ſtirpes ſeparaſſe, quas tamen ſeparare, vel ob vires medicas oportet, quas habent diverſiſſimas, aliae acres, aromaticas aliae, aliae omnino nullas, quae ſenſibus percipiantur.

86. I. ACHILLEA *foliis pinnatis, pinnulis acute trifidis, laxe diſpoſitis*.

Parthenium alpinum CLUS. Pann. p. 262. *hiſt.* p. 336.

Anthemis alpina ſaxatilis umbellata perennis calyce nigricante MICHELI p. 33. Vetat huc referre Cl. SEGUIER, quod uniflora ſit. Verum CLUSIANA multiflora huc MICHELANIANAM ducit.

Haec ſpecies reliquis multo vulgatior, paſſim rivos alpinos obſidet, ut torrentis *Avancon Scaturigines* in M. *Enzeinda*, aut ſaxa *Gemmii*, *Gotthardi*, *Grimſulae*, *furcae* M., *Ovanna*, *Prapioz*, *Sur champ*, *Richard*, & *Chapuiſe*.

Radix nigra, lignoſa, ramoſa, fibroſa, reptans, multos caules producit, eademque guſtata fatua primum, demum igneum in lingua & durabilem pyrethri ſaporem relinquit. Caules dodrantales, pedales, duri, inferne glabri, ſuperne

hirſuti,

hirsuti, ut petioli denique tomentosi sint. Folia sature virentia, pinnata, petiolo plano, pinnis distinctis planis, decem, duodecimve parium, quarum primae simplices, quae sequuntur acute & saepissime inaequaliter trifidae sunt, ultimae simplices. Flores in umbellam, sex & duodecim etiam florum. Calyx inverse conicus, cujus folia prima viridia hirsuta, reliquis in ordinibus lutea, cum ora nigerrima, ut in cyano. Petala plana ovata, lata, obtusa, tridentata, alba, decem, duodecim. Squamae inter flosculos fuscae: ipsi flosculi albi, staminum tubus flavus. Planta tota inodora.

87. II. ACHILLEA *aromatica foliis pinnatis, pinnis simplicibus punctatis, glabris.*

Anthemis alpina saxatilis odorata minima perennis floribus exiguis umbellatim compactis MICHELI p. 59.

Tanacetum alpinum odoratum C. B. SCHEUCHZER *Itin.* II. p. 242. T. 21. f. 3. I. VI. p. 462.

C. GESNERUS in M. *Braulio*; J. BAUHINUS in montibus Rhaeticis, SCHEUCHZERUS in Praegalliensibus, nos ex M. *Jeman*, *Fouly*, montibus supra *Bagnes*, & *S. Bernhardi.*

Véritable Genipì Medicorum circa alpes medentium.

Difficile judicium est, num a priori diversum sit, ut Cl. Viri senserunt, num varietas, ut ego in priori opere. Accurate vero rimando haec discrimina reperi. Radix non acris. Caules humiliores, minus sub floribus tomentosi. Folia pallidius viridia, pinnis plerisque simplicibus, parium pauciorum, fere sex & octo; eadem plenissima foveolarum, hinc pulposa, & ad microscopium reticulata. Squamae calycis proportione breviores, inprimis si extremas compares, levissime ad vitream lentem hirsutae, magis compactae, ora potius fusca quam nigra. Flores minores. Tota planta odore grato aromatico, penetrabili, quem etiam culta retinet. Vere adeo differt.

Haec planta ad pleuritides febresque antidotus est alpicolarum, & in theae modum pota sudorem movet *Journ helv.* 1758.

1758. M. Sept.: calida tamen, & nocitura, quoties non ſanat.

Altitudo bicubitalis *Achilleae* GMEL. T. 83. f. 1. vix videtur admittere, ut noſtrae eadem ſit, cum praeterea Cl. noſter amicus flores ampliſſimos, radicem parvam faciat, nec aromatici, gratiſſimi, odoris meminerit.

88. III. ACHILLEA *aromatica foliis pinnatis, pinnulis acutis, villoſis.*

In M. *Fouly* Valeſiae.

Multo ſubtilius huic a priori eſt diſcrimen, cum perinde odorata ſit, perinde folia habeat reticulata, & punctata, pulpoſaque: alius tamen, etiamſi etiam gratus, odor eſt. Folia diverſa, tota hirſuta, pinnis plurium parium, duodecim, ſibi propioribus, magis aequalibus, latioribus proportione longitudinis, ſaepiſſime ſimplicibus, niſi in radicalibus foliis, quibus breviter bifidae pinnae ſunt & trifidae. Hinc totum folium longius. Juniora, quae priori glabra, huic villoſa ſunt; adulta, in hac varietate, pene calveſcunt, non tamen unquam penitus hirſuties deficit.

A floribus congeſtis non poteſt diſcrimen ſumi, nam etiam in 1. & 2. ſaepe perinde congeſtos vidi.

89. Haec eadem 88. tomento penitus obvoluta in altiſſimis montibus naſcitur, & eſt

Millefolium alpinum tomentoſum BOCCONE T. 170. *odoratum nanum* p. 166., qui hoc ipſum vult dici *Genipì*; uti quidem dici meretur.

Achillea foliis pinnatis lanugine totis obductis floribus albis umbellatis ALLIONE *plant. pedem* p. 9. T. 2.

In eo ſtatu, etſi ſummarum alpium, tamen vulgatius eſt. SCHEUCHZERUS in jugis *Averſanorum* & *Praegallienſium*, & in deſcenſu *Furcae* M. verſus *Valeſiam*. Ibi & ego abunde legi: frequens etiam eſt in M. *Bernhardo*, in montibus vallis *Bagnes*. *Hinterrhein* Cl. SCHINZ.

Humi-

Humilius aliquanto est. Caulis saepe curvus, cum foliis totus albo tomento obnuptus, ut fere in Creticis stirpibus solet. Florum umbella compacta, calyce hirsuto, oris foliorum fuscis, semiflosculis minoribus similiter obtuse incisis. Folia proportione longa, pinnis vicinis brevibus, trifidis, quadrifidis, foveolis balsamicis minus conspicuis, aut nihil quidquam. Non ob aetatem tomentum dejicit, nam utraque species perinde florens & perfecta reperitur. Sed ob loci natalis diversitatem, villosior, quo altiori loco nascitur, cum in humilioribus villum dejiciat adulta. Separassem omnino, nisi omnes medios inter utramque gradus possiderem, a perfecta glabritie ad summam tomenti ubertatem.

90. Vereor, ut *Achillea* 10. a vulgari satis diversa sit; quam circa *Branson* Valesiae abunde legi an. 1757.; continuos enim hoc inter, & *vulgare millefolium* gradus mihi sum visus adnotasse. Idem de n. 7. metus est.

Achillea 11. seu *lutea* maxima copia circa *Branson* in rupibus provenit.

PLANIPETALAE.

91. IN hac classe ea nostra fortuna fuit, ut plusculas addere cives; alias, in quibus haeseramus dubii, nunc expedire possimus.

I. *Lampsana caule nudo indiviso, foliis semipinnatis, pinnis retrogradis dentatis.*

Leontodoides alp. glaber, erysimi folio, radice crassa foetida MICHELI p. 31. T. 28.

Dens Leonis minimus C. B. ex fide horti sicci.

Nihil vulgatius in sylvis umbrosis & udis montium Aquilegiensium. Legi super *Roche* in sylva le *Traversin* cis torrentem *des males pierres*, in adscensu M. *Enzeinda*. Miserunt Cl. Viri SEGUIER & MORENI.

Folia ad terram peculiari habitu pinnata, pinnis retroversis, aliquot non multis dentibus incisis, saepe super se invicem reduplicatis & imbricatis. Caulis aphillus, semipedalis. Squamae ad calycis basim accessoriae capillares aliquae. Verae calycis squamae septem, nigricantes, lanceolatae. Flos, quam taraxacis, minor saturate flavus, petalis dentatis. Semina fusca, columnaria, neque squamis distincta, neque ullo modo coronata, nisi flosculo.

92. II. LAMPSANA *foliis ovatis dentatis, caule nudo, floribus nutantibus* Enum. hort. Gotting.

Hieracium VII. CLUS. *Pannon.* p. 649.

Abunde provenit in agris septentrionem spectantibus inter *Hindelbank* & *Rormooss* ad dextram viae, quae ducit ad oppidum *Burgdorf*.

93. TARAXACON 2. est varietas primi.

Quintum Enum. p. 741. misit etiam Cl. ALLIONIUS. Foliis glaberrimis a 6. differt, non tamen, ut vereor, satis diversum est.

Ad n. 6. omnino refero Taraxacon 7. *Enum.*, ut verae species supersint 1. 3. 4. 5. 8.

94. HIERACIIS accensere oportet.

I. HIERACIUM *foliis ovatis lanatis*.

Hieracium montanum tomentosum DILL. *hort. Elth.* T. 150. f. 180. MILLER T. 146.

Radix perennis, dura, squamis aspera. Ex ea & caules florescentes prodeunt, & alii, qui altero anno florebunt. Folia ad terram petiolata, ovata, & paullum lanceolata, margine integerrimo, crassa substantia, tota tomento albo villosa. Ad caulem unum alterumve folium simile, acutum, sessile. Caulis aliquoties brachiatus, triflorus, quadriflorus. Calycis folia albissimo longo tomento villosa. Flos flavus. Describit LINN. *Cent.* 1. n. 76.

Legit in rupibus ad *Saillon* CLARET, tum inter *Charat* & *Saxon* ad viam Sedunum ducentem.

95. II. HIERACIUM *caule unifloro, foliis ad caulem ovato lanceolatis dentatis amplexicaulibus.*

Hieracium montanum rapifolium C. B. *Prodr. p.* 65. *Basil. p.* 38.

C. B. in M. *Wasserfall* legerat, ego diu desideratam plantam in M. *Luan* frequentissime legi. *Aux Nombrieux* rupestri loco *supra les plans* etiam nascitur.

Speciosa inter Hieracia magnitudine planta est, radice lignosa, terete, curva, pilis longis barbata, quae sunt petiolorum siccatorum reliquiae: foliis ex radice numerosis, longe petiolatis, ellipticis, lanceolatis, pedem longis, petiolo folioso: foliis vero ad caulem quatuor vel quinque, amplexi caulibus, auriculis obtusis, margine dentibus longis rariter serrato. Figura folii ex ovata lanceolata est, acuta, tota glabra sunt, nervo solo villoso. Caulis cubitalis, longe plerumque uniflorus, raro biflorus, crassus, lineatus, sub flore albo tomento barbatus. Flos grandissimus, fere in tota classe eminet. Calyx pilis & tomento nigro barbatus, caetera lignei coloris, segmentis latis, trium ordinum. Color flavus, & numerus semiflosculorum maximus.

LINNAEUS non habet Hieracium 24. GMELINI T. 10. a nobis in horto Gottingensi cultum, differt caule ramoso, multifloro.

An fuerit *Hieracium alpinum villosum pulmonariae foliis caulem ambeuntibus* Cl. GARCIN, lectum in sylvis supra *Vallangin*?

96. III. HIERACIUM *foliis lanceolatis, glaucis, caule brachiato multifloro.*

Hieracium VI. montanum CLUS. *Pannon.* p. 645. 646.

Hieracium montanum angustifolium nonnihil incanum C. B., sed nostrum non est uniflorum, neque scabrum LINN. *spec. p.* 799.

In rupibus, quibus eremitae Agaunensis cellulae subjiciuntur, maxima copia provenit, tum in arenosis *de la grande*

 eau:

eau: & Octoduri ; etiam Verona missum a Cl. MORENIO.

Radix perennis, lignosa, fusca, teretibus crassis fibris capillata. Folia ad radicem plurima, ad caulem perpauca, glauca, longe lanceolata, acutissima, vix supra 8. lineas, rarissime dentata, ad caulem nulla fere nisi stipulae. Caulis durus, striatus, brachiatus & ramosus, multiflorus, non tamen in umbellam, cubitalis. Flores multo, quam in hieraciis pilosellae similibus grandiores, calyce nigro farinoso, hirsuto.

Idem crediderim esse *Hieracium alpinum scorzonerae folio* SCHEUCHZER Enum. n. 27.

97. Ad Hieracium 10. sive *radice praemorsa* adde, in calidioribus Helvetiae non solum viscidum, sed grate etiam odoratum nasci cum radice crassa, lignosa, teretibus radiculis capillata. Folia ei ima petiolata, ovato lanceolata, per marginem longis dentibus, fere ut *rapifolium*, serrata, ad caulem ovato lanceolata, vix dentata. Caulem hirsutum, habet cubitalem, aliquoties brachiatum, singulo ramo multifloro, petiolis villosis unguentatis. Calyx obscure viridis, pilis & ipse capitatis, globuliferis villosus. Meretur nomen HIERACII *foliis ovato lanceolatis, obiter dentatis, viscidis, caule brachiato, multifloro*.

LINNAEUS non habet; nam ejus *Hieracium praemorsum* a nostro differre videtur calyce non hispido, odoris & viscoris absentia V. *flor. suec.* p. 273.

98. Emendare etiam oportet descriptionem Hieracii 10. sive *foliis ad caulem amplexicaulibus pilosis, rarissime dentatis, caule multifloro*, quod *Hieracium montanum majus latifolium* J. B. T. II. *p.* 1036.

Legi in pascuis M. Jurae, in laetis pratis M. *Jorogne*, in adscensu *aux Granges* ad *Forclaz a Chapuise*.

A *Griesbachiano latifolio* differt omnino. Folia ovata acuminata, ex hora pilosa, pilis de nervis omnibus, totoque rete inferiori exeuntibus: ad caulem amplexicaulia, auricu-

lis

lis retrocedentibus, obtusis, dentibus ubique brevissimis: cubitali caule, floribus in summa planta numerosis, multo, quam in latifolio Griesbachiano, majoribus, calyce nigricante, duris & nigris pilis barbato. Non habet LINNAEUS.

99. *Hieracium latifolium montanum alterum Genevense folio conyzae majoris Monspeliensis* J. B. II. *p.* 1026.

Hieracium montanum alterum leptomacrocaulon COLUMN. *Ecphras.* p. 249. ic. p. 248. habet folia, nervis exceptis, glabra, longiora, angustiora, multo frequentius dentata, auriculis acutis aristatis caulis amplexa; florem quam sequenti grandiorem, nigris villis barbatum. Dixerim HIERACIUM *foliis amplexicaulibus serratis auritis, auriculis aristatis, calycibus villosis.*

100. Denique *Hieracium foliis ad caulem glabris serratis lanceolatis, supremis profunde dissectis.*

Hieracium latifolium glabrum ex valle Griesbachiana J. B. T. II. p. 1023.

Hieracium 21. GMELIN T. IX. omnino, ex foliis & calyce nigris pilis hirto.

In sylvis nostris humidis pratisque familiare, ab utroque diversum est. Cum proxime priori convenit foliorum nervis insignibus, foliorum crebris denticulis, auriculis acutis, foliis etiam magis glabris absque pilis. Differt dentibus multo grandioribus, floribus exiguis, calyce nigro paullum, & multo minus quam priori barbato, dentibus folii grandiobus, & sub caulium brachiis adeo profundis, ut folia pene laciniata sint. A penultimo glabritie, dentibus & auriculis, cauleque glaberrimo differt.

101. Expungi posse credo *Hieracium* 2. 11. 15. 19. De 24. 25. 28. 30. 31. porro oportet quaerere, & de 14. dubitari posset, an pro varietate haberi praestet.

102. Intybi duas species hirsutas, ut distinguerem, elaboravi. Ergo INTYBUS *foliis omnibus ellipticis hirsutis, serratis*, qui *Hieracium fruticosum latifolium hirsutum* vulgo dicitur,

citur, cumque eo nomine ab Ill. DILLENIO ad me missus est, & Octoduri, & in via *Tombey*, tum Bernae, tum in prato praecipiti optimi D. Ith secundum oram pinastreti *Dalholzlém* provenit, is quidem similis Intybi glabri est, durior, caule firmissimo, rectissimo, in summa planta paniculato, caetera vix ramoso: foliis ad caulem numerosissimis, dense congestis, firmis, siccis, hirtis, elliptico lanceolatis, paucis, sed magnis dentibus serratis, squamarum calycis lividarum ora pallente. Uniflorum reperit prope *Battenberg* Cl. BERDOT. Non habet LINNAEUS.

103. Alter autem Intybus *foliis inferioribus ellipticis hirsutis serratis, superioribus ovato lanceolatis*, quem *Hieracium fruticosum latifolium folio subrotundo* vocant, omnino diversus, Gottingae in sylvis provenit, altior quidem planta, & bicubitalis, sed debilior. Folia inferiora quidem satis similia habet, sed superiora longe diversa, sessilia, lata, brevia, ex ovatis lanceolata: calycis squamae etiam totae nigrae sunt, & flos potius grandior. Est *Hieracii Sabaudi varietas*. *Erinus quibusdam* MATTH. *dicta* J. B. T. II. p. 1030., & *Hieracii Sabaudi varietas altera* ibid. *Hieracium* 30. GMELII T. 24.

Receptaculum, quod nudum vocat Cl. LINNAEUS *flor. suec.* p. 274. omnino alveolatum est, uti memini me an. 1750. Cl. MISSAE jam ostendisse.

Inter stirpes D. le CLERC fuit *Hieracium fruticosum folio angustissimo, lineari, incano, glabro*, cum uno alterove dente, quod nunc non memini me alias reperisse.

Crepim, quae *Hieracium dentis leonis folio flore suaverubente*, in M. *Wasserfall* nasci scribunt auctores *der Basler Merkwurdigkeiten* p. 1800. Nondum audeo inter nostrates referre.

104. *Scorzonerae* duae helveticae, quas dubia ex fide, neque visas, recensueram, nunc abunde lectas facile constituo.

Scorzonera caule nudo, unifloro, foliis petiolatis ovato lanceolatis.

Scorzo-

Scorzonera humilis latifolia Pann. II. Clus. hist. p. CXXXVIII.

Abunde provenit Rupe, Agauni, circa sacellum *N. Dame du Sex* &c.

Radix maxima, teres, anulata, corona pilorum ad exitum de terra ornata. Folia ad terram plurima, longe petiolata, nervosa, glabra, ex ellipticis lanceolata. Caulis pedalis, simplicissimus, praeter aliquas, ex ovatis lanceolata ligulas, nudus. Flos in singulo caule unicus, grandis, calycis foliis 3. & 4. ordinum triangularibus, eo latioribus, quo interiora. Petala numerosa, pallide lutea, lineata, dentata. Hanc non visam habueram pro Germanica.

105. II. Scorzonera *caule nudo unifloro, foliis linearibus nervosis*.

Scorzonera humilis angustifolia Pann. III. Clus. ibid.

An *Scorzonera caule simplici unifloro foliis ex lineari lanceolatis* Gmelin *flor. sibir.* T. 2. T. 1.

Radix similis, & pariter pilis coronata: similis etiam caulis simplicissimus, & flos, minor tamen. Folia vero angusta, nervosa, linea non latiora, cauli aequalia. Flos similis, sed minor, petalis pariter lineis striatis, quas purpureas fuisse vidi. Semina sulcata, curva, sessili plumoso pappo ornata.

Au Tombey inter *Aquilegiam* & *Ollon* primo vere floret.

A caule *basi villoso* nomen sumi nequit, quum species I. perinde villum habeat in summa radice; neque pediculus nostris *incrassatur*.

CAROLI

CAROLI ALLIONII
SYNOPSIS METHODICA STIRPIUM
HORTI TAURINENSIS.

POſtquam Horti Taurinenſis cura ab Auguſtiſſimo, & Invictiſſimo REGE *noſtro mihi commiſſa fuit, muneris mei omnino eſſe putavi ſtirpes omnes in eodem contentas diligenter recenſere, & alienis aut vagis nominibus ſatas expendere, ut tyrones ea qua decet ratione inſtituere poſſem, & hortum magis, magiſque locupletare. Hujus laboris fructus eſt haec ſynopſis, in qua plantae omnes, quas hoc anno coli obſervavi, enumerantur eodem ordine, quo adoleſcentibus eaſdem explicandas ſuſcepi. Nomina ſunt* trivialia *Celeb.* LINNAEI, *quorum uſum opportunum exiſtimavi, ut brevitati conſulerem, nec anguſtos commentarioli limites tranſgrederer; eo vel maxime quod praedictis nominibus alia ab auctoribus uſitata facile reperiri poſſint in libro ejuſdem* LINNAEI, *cui titulus* ſpecies plantarum. *Eas porro herbas, quarum trivialia nomina nondum conſtant, aut quae diſtinctas ſpecies conſtituere viſae ſunt, ſeparatim recenſendas curavi. Genera, ut quiſque videt, ſervanda mihi fuerunt qualia a* LINNAEO *proponuntur, pariterque ſpecies ſecundum ipſius praecepta, ad propria genera referuntur. Aliquot denique minus notae ſtirpes accurata deſcriptione illuſtrantur, & quaenam Pedemontanae hujus regionis indigenae ſint, aſteriſco notatur.*

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopetalo simplici.

I. MONOSTEMONES.

Canna indica.

II. DISTEMONES.

A. Gymnotetraspermae.

Salvia officinalis *
horminum *
sclarea *
pratensis *
agrestis [1]
verbenaca
verticillata *
glutinosa *
canariensis
ceratophilla
aethiopis *
afr. caerulea
. . . . . [2]
. . . . . [3]
. . . . . [4]
. . . . . [5]

Rosmarinus officinalis *
Lycopus europaeus *
Ziziphora tenuior
Monarda didyma

B. Diangiae.

G Vero-

1 *Horminum pratense niveum foliis incanis* Bauh. *pin.* 238. V. Linn. *amoen.* *T. III. p.* 399.

2 *Salvia orientalis frutescens, foliis subrotundis, acetabulis moluccae*, Tourn. *cor. p.* 10.

3 *Salvia cretica angustifolia* Clus. *hist.* 343. *Salviae officinali* similis, diversa tamen. Folia minime aspera, subincana, & brumali tempore omnino incana, mollia, acutiora. Verticilli decemflori & nudi. Flos minor barba magis pendula, & ad suam originem striis & maculis violaceis picta. Antherarum, quae luteae sunt, margo obscurus. Semina magna compressa subrotunda duo tantum fere maturantur. Suavius & minus vehementer odorata est. *Salvia cretica* Linn. alia omnino planta esse debet cum calyces diphillos ei tribuat Celeb. Auctor.

4 *Salvia villosa & viscosa, foliis lanceolato-ovatis, versus petiolum angulatis.* Exoticae originis planta, neque, quod sciam Botanicis nota. Ex duro & fere lignoso caudice erigit virgas ad summum cubitales. Folia similia sunt foliis *salviae officinalis*, sed minora, viridia, non aspera, sed cum tota planta viscosa, & alto densoque villo barbata. Folia prima petiolata, & sensim deinde sessilia, versus petiolum ampliora, & angulata. Calix striatus bilabiatus. Labii superioris dentes tres minimi approximati aegre distinguendi; inferioris aristati aliquantulum divaricati. Flos albus tubo corollae calycem aequante: Galea villosa fornicata, truncata, non falcata, Alae subrotundae rectae. Barba concava, obverse cordata, subpurpurea, triangulariter emarginata. Antherae luteae extra galeam protensae. Semina laevia, nigra, subtrigona oblonga. Odor totius plantae validus, qualis *salviae sclareae*.

5 *Salvia americana chia dicta*. Olim hoc nomine ad me misit Cl. Pontedera.

Veronica ſpicata *
officinalis *
alpina *
ſerpillifolia *
beccabunga *
anagallis *
chamaedrys *
agreſtis *
arvenſis *
hederaefolia *
Juſticia adathoda
Syringa vulgaris *
perſica

C. Fructu pulposo.

Nictanthes ſambac
Jaſminum officinale
azoricum
fruticans *
odoratiſſimum
Olea 6
Phillyrea latifolia *
Liguſtrum vulgare *

III. TRISTEMONES.

A. Flore caliculato.

Trichoſanthes anguina
Cucurbita lagenaria
pepo
verrucoſa
melopepo
citrullus
Cucumis colocynthis
melo
dudaim
ſativus
Momordica balſamina
charantia
luffa
cylindrica
elaterium *
Bryonia alba *
africana
Sicyos angulata.

B. Calice destitutae.

Crocus ſativus *
Ixia chinenſis
Gladiolus communis *
Iris ſuſiana
germanica *
variegata
graminea
pſeudacorus *
hermodactylus.
Valeriana dioica *
phu
officinalis *
calcitrapae *
tripteris *
cornucopiae
locuſta *

IV.

6 *Olea ſilveſtris folio duro ſubtus incano* Bauh. *pin.* 472.

IV. TETRASTEMONES.

A. Gymnodispermae.

1. *Flore plano.*

Galium verum *
boreale *
aparine *
parisiense *
. . . . .[7]
. . . . .[8]
Rubia tinctorum. *

2. *Fl. infundibuliformi.*

Crucianella angustifolia *
Sherardia arvensis *
Asperula odorata *
arvensis *
taurina *
cynanchica *

B. Gymnotetraspermae.

1. *Galea plana*

a. *Vix fissa*

Melittis melissophillum *
Mentha crispa
pulegium *
cervina
arvensis *
rotundifolia *
aquatica *
Origanum majorana
aegyptiacum
dictamnus
vulgare *
Thymus vulgaris *
Acinos *
serpillum *
. . . . .[9]

b. *Profunde secta*

Lavandula spica *
multifida
Glechoma hederacea *
Sideritis perfoliata
romana
hirsuta *
Marrubium vulgare *
pseudodictamuus
peregrinum

2. *Galea concava*

Lamium purpureum *
amplexicaule *
album *
. . . . .[10]

7 *Gallium album vulgare* Tourn. *inst.* 115. *
8 *Gallium montanum latifolium ramosum* Tourn. *inst.* 115. *
9 *Thymus foliis ellipticis & caule hirsutis* Hall. *gott.* 341.
10 *Lamium montanum hirsutum, folio oblongo, flore purpureo D. Pontederae* Tilli. *pis.* Tota planta hirsuta, & odore forti lamii. Caules habet spithamaeos, aut etiam duplo altiores. Folia ex cordato-triangula, statim a petiolo dentata dentibus geminatis, non nitentia, obtuso non acuto dente terminata; & minora, quam in *Lamio albo*. Corollae tubus tertia circiter parte extra calycem protenditur. Galea surrecta, pilosa, erosa; barba vero recta descendit. Antherae luteae, vix pilosae. Verticilli minime nudi, sed involucro donati, h. e. stipulis linearibus quinque aut septem verticillum cingentibus.

Galeopsis ladanum *
tetrahit *
galeobdolon *
Stachys silvatica *
alpina *
germanica *
palustris *
cretica
Dracocephalon canariense
peltatum
moldavica
canescens
. . . . . [11]
Leonurus sibiricus
cardiaca *
marrubiastrum *
Phlomis tuberosa
leonurus
fruticosa
Moluccella laevis
spinosa
frutescens *

Prunella vulgaris *
grandiflora
laciniata *
Ballota nigra *
Betonica hirsuta *
glabra *
officinalis *
. . . . . [12]
Nepeta cataria *
nuda
. . . . . [13]
Melissa officinalis *
calamintha *
nepeta *
Cilnopodium vulgare *
Scutellaria supina *
galericulata *
. . . . . [14]

3. *Galea nulla, seu limbo semiquinquefido.*

Verbena bonariensis
urticifolia

com-

11 *Dracocephalon foliis ex lanceolato-linearibus, rarius dentatis, spinulosis, floribus gemellis* MARTINI. HALL. *gott.* 335.

12 *Betonica foliis hirsutis, floribus purpureis amplissimis* MONT. in ZANON. *p.* 46. *l.* 30. *

13 *Cataria tenuifolia* CLUS. *hist.* XXXIII. *

14 *Cassida caule quadrangulo rubente, teucrii serrato folio, fl. caeruleo, labro albo.* TILLI. *pis.* Duro & repetito ramoso caule se se ad tricubitalem & ultra altitudinem erigit. Postremi rami longissime simplices & continuo florigeri, floribus binatis. Folia petiolata, glabra, venosa, cordato-ovata, acuta dentibus utrinque tribus aut quatuor serrata. Floralia elliptica, acuminata, integerrima, subsessilia. Calix de more gentis cum crista & ora longius pilosa. Flos gracilis ex violaceo purpureus alarum extrema parte albescente. Semina quaterna, inaequalia, ex cinereo obscura, subtriangula, minutissime alveolata. Universa planta amarissima est, & non sine principio aromatico. Densi & subtiles pili obsident ramos florigeros, & ex iis stillat globulus tenuissimae, & amarae resinae.

communis *

4. *Galea nulla, ſeu flore unilabiato.*

Teucrium ſcorodonia *
ſcordium *
flavum *
chamaedrys *
. . . . . [15]
botrys *
. . . . . [16]
chamaepithys *
polium *
montanum *
marum

Ajuga pyramidalis *
reptans *

C. MONANGIAE.

Orobanche major *
ramoſa *

D. DIANGIAE.

1. *Corolla non labiata.*

Sanguiſorba officinalis *

Plantago major *
virginica
lanceolata *
lagopus *
coronopus *
pſiyllium *
cynops

Celſia orientalis.

2. *Corolla labiata.*

a. *Calyce quadrifido.*

Rhinanthus glaber *

Melampyrum criſtatum *

Euphraſia officinalis *

b. *Calyce quinquefido.*

Antirrhinum cymbalaria *
ſpurium *
triphillum
purpureum
monſpeſſulanum *
multicaule
linaria *
majus. *

Scrophularia nodoſa *
aquatica *
canina *

Digitalis ferruginea
lutea *
. . . . . [17]

Che-

15 *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, ſpicis oblongis denſiſſimis ex Hircania* MARTINI HALL. *comm. Gotting.* 1752.

16 *Teucrium ſupinum, perenne, paluſtre, apulum, glabrum, foliis laciniatis, fl. albo D. Michelii.* TILLI. *piſ. cum icone.* Procumbit ramis, & foliis oppoſitis glabrum. Folia ſulcata, & trifida ſegmentis lateralibus tridentatis, & medio iterum trifido. Verticilli biflori. Calycis dentes ſpinuloſi. Alae ovatae duorum parium: barba cordato ovata. Floris color albus, ſed ſtriae, & maculae purpureae pingunt alas primas & barbae originem. Semina quaterna aſpera.

17 *Digitalis alpina magno flore* BAUH. *pin.* 244.

Chelone hirſuta [18]
Bignonia catalpa
radicans.
Lantana annua
camara
Ruellia ſtrepens.
Seſamum orientale.
c. *Calyce polyphillo.*
Acanthus mollis
aculeatus.

E. Fructu pulposo.

Callicarpa americana
Ilex aquifolium *

V. PENTASTEMONES.

A. Monostylae.

1. *Gymnomonoſpermae.*

Plumbago europaea *
Baſella rubra
Mirabilis Jalappa
. . . . [19]

2. *Gymnotetraſpermae.*
a. *Squamulis in fauce.*
Symphitum officinale *
tuberoſum *
Anchuſa officinalis *
Cynogloſſum officinale *
linifolium
Lycopſis veſicaria *
variegata
Aſperugo procumbens.
b. *Fauce nuda.*
Cerinthe maculata *
Echium vulgare *
italicum *
Lithoſpermum officinale *
arvenſe *
purpuro-caeruleum *
Heliotropium indicum
europaeum *
Myoſotis ſcorpioides *
lappula *
3. *Monangiae.*
a. *Valvis duabus.*
Anagallis . . . [20]
. . . . [21]
Menyanthes trifoliata *
b. *Valvis quinque.*
Samolus valerandi *
Cyclamen europaeum *
c. *Valvis decem.*
Primula elatior *
acaulis *
vitaliana *
auricula *
Lyſimachia vulgaris *

num-

18 Quintum ſterile villoſiſſimum ſtamen anthera deſtitutum reliquis fertilibus longius ego quoque adnotavi.

19 *Mirabilis foliis viſcidis villoſis, tubo floris cylindrico villoſo foliis longiore* Zinn. *comm. Gott. T. V.*

20 *Anagallis phaeniceo flore* Bauh. *pin.* 252. *

21 *Anagallis caeruleo flore* Bauh. *pin.* 252. *

nummularia *

4. *Diangiae*.

Nerium oleander

Vinca major *

minor *

Datura ftramonium *

. . . . [22]

Hyofcyamus niger *

albus

pufillus

Nicotiana tabacum

minor

paniculata

Verbafcum thapfus *

lychnitis *

nigrum *

finuatum

blattaria *

phaeniceum *

Gratiola officinalis *

5. *Tri-aut Pentangiae*.

Convolvulus arvenfis *

fepium *

panduratus

tricolor

. . . .

hederaceus

ficulus

. . . . [23]

Ipomoea quamoclit

coccinea

triba

Phiteuma fpicata *

Campanula rapunculus *.

erinus *

perficifolia *

trachelium *

glomerata *

. . . . [24]

fpeculum *

6. *Fructu pulpofo*.

Mandragora officinarum

Atropa belladonna

phifalodes.

Solanum pfeudocapficum

dulcamara *

tuberofum

lycoperficon

officinarum

. . . . [25]

melongena

indicum

22 *Stramonium aegyptiacum flore pleno intus albo, foris violaceo* TOURN. *inft.* 118.

23 *Convolvulus ferpens maritimus fpicaefolius* TRIUMF. *obf. p.* 91. Plures teretes, vimineae radices plurimos producunt caules ad fummum palmares procumbentes. Folia ex longo & foliofo petiolo longe elliptica, acuto fine, non plana, fulco medio eadem dirimente, breviffimo & fericeo villo nitentia ita tamen, ut adhuc viridia appareant. Summus cauliculus faepe unicum florem fuftinet, raro duos brevi pedunculo nixos, qui ftipulis duabus linearibus cinguntur. Calycis foliola fericea; & eorum duo exteriora majora. Fructus calycinis foliis ex parte agglutinatur; iifdem brevior & fericeo villo tectus. Minime igitur confundi poteft cum *convolvulo cneorum*?

24 *Campanula hortenfis folio & flore oblongo* BAUH. *pin.* 94.

25 *Solanum guineenfe fructu magno inftar cerafi* DILL. *elth.* 366.

indicum
ſodomeum
incanum
tomentoſum.
Phyſalis ſomnifera
alkekengi *
angulata
. . . . [26]
Capſicum annuum
. . . . [27]
. . . . [28]
. . . . [29]
. . . . [30]
Lonicera caprifolium *
periclymenum *
nigra *
Xyloſteum *
Lycium afrum
Rhamnus paliurus *
ziziphus
catharticus *
Coffea arabica.

B. Distylae.

Gomphrena globoſa
Gentiana centaurium *
ſpicata *
aſclepiadea *
Cynanchum acutum
erectum
Aſclepias incarnata
curaſſavica
ſyriaca
vincetoxicum *
fruticoſa
tuberoſa

C. Tristylae.

Viburnum tinus *
lantana *
opulus *
Sambucus ebulus *
nigra *
laciniata
racemoſa *

VI. HEXASTEMONES.

A. Monostylae.

Aloe diſticha
ſpiralis
retuſa
variegata
. . . . [31]
. . . . [32]
. . . . [33]
. . . . [34]

26 *Alkekengi barbadenſe nanum alliariae foliis* Dill. *elth. p.* 10.
27 *Capſicum fructu flavo pyramidali oblongo* Tourn. *inſt.* 153.
28 *Capſicum ſiliqua latiore & rotundiore* Tourn. *inſt.* 153.
29 *Capſicum ſiliquis ſurrectis oblongis* Tourn. *inſt.* 153.
30 *Capſicum fructu cordiformi erecto* Hall. *Gott.* 216.
31 *Aloe africana ſeſſilis foliis carinatis verrucoſis* Dill. *elth. p.* 22.
32 *Aloe africana humilis ſpinis inermibus & verrucoſis obſita* Comm. *prael. p.* 77.
33 *Aloe africana flore rubro folio maculis ab utraque parte albicantibus notato* Comm. *hort. II. p.* 15.

. . . . . [34]
. . . . . [35]
. . . . . [36]
. . . . . [37]
. . . . . [38]
. . . . . [39]

Agave americana
Hyacinthus non ſcriptus
orientalis
cernuus
Polianthes tuberoſa
Convallaria majalis *
verticillata *
ſtellata
polygonatum *
Ariſtolochia clematitis *
rotunda *

B. Tristylae.

Colchicum autumnale *

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne mezereum *
laureola *
cneorum *
Dioſpyros lotus.

VIII. ENNEASTEMONES.

Rheum rhaponticum

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon umbilicus *
Oxalis acetoſella *
corniculata *
ſtricta

X. POLYSTEMONES.

Mimoſa ſenſitiva
pudica
pernambuccana
glauca
. . . . . [40]
ſcorpioides. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalo floſculoſo.

I. ANTERIS DISJUNCTIS.

Dipſacus fullonum *
. . . [41]

34 *Aloe africana folio in ſummitate triangulari margaritiferà flore ſubviridi* Comm. *hort. II. p.* 10.
35 *Aloe africana foliis glaucis margine, & dorſi parte ſuperiore ſpinoſis, flor. rubro.* Comm. *prael. p.* 75.
36 *Aloe africana cauleſcens foliis ſpinoſis maculis ab utraque parte albicantibus notatis* Comm. *hort. II. p.* 9.
37 *Aloe africana cauleſcens foliis glaucis breviſſimis, foliorum ſummitate interna & externa nonnihil ſpinoſa.* Comm *prael. p.* 73.
38 *Aloe ſuccotrina anguſtifolia ſpinoſa flore purpureo.* Comm. *hort. I. p.* 91.
39 *Aloe foliorum margine luteo.*
40 *Acacia americana non ſpinoſa, foliis viciae multiflorae, floribus in ſpicam triuncialem diſpoſitis, ſiliqua palmari compreſſa & intorta.* Manetti. *vir. flor. n.* 12.

. . . . . [41]
pilosus *
laciniatus *
Scabiosa alpina *
succisa *
syriaca
arvensis *
leucantha *
tartarica *
columbaria *
stellata
atropurpurea
. . . . . [42]
Knautia orientalis
Globularia vulgaris *

II. ANTHERIS COALITIS.

A. Capitatae.

Echinops sphaerocephalus
ritro *
Onopordon acanthium *
illyricum
Cynara scolymus
Arctium personata *
lappa *
. . . . . [43]
Carduus lanceolatus *
crispus *
stellatus
marianus *
helenioides *
eriophorus *
nutans *
acanthoides. *
Serratula tinctoria *
arvensis *
Carthamus tinctorius *
Cnicus benedictus
Carlina acaulis *
corymbosa *
Centaurea crupina *
moschata
cyanus *
montana *
paniculata *
ragusina
scabiosa *
jacea *
aspera *
eriophora
calcitrapa *
solstitialis *
galactites *
salamantica *
sonchifolia *
napifolia *
centaurium.

B. Discoideae.

1. *Semine nudo.*

Tana-

41 *Dipsacus sativus* Bauh. *pin.* 385.
42 *Scabiosa foliis planis carnosis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* Gmelin. *sibir. II. p.* 213.
43 *Lappa major montana capitulis tomentosis* Bauh. *pin.* 298.

Tanacetum vulgare *
crispum
balsamita
Santolina chamaecyparissus *
rosmarinifolia
Cotula coronopifolia
Artemisia abrotanum *
campestris *
pontica
absinthium *
vulgaris *
caerulescens
dracunculus
. . . . [44]
. . . . [45]
Micropus supinus *

2. *Semine pappis coronato.*

Gnaphalium dioicum *
fœtidum
margaritaceum *
germanicum *
arenarium
Sthaechas *
. . . . [46]
Chrysocoma graminifolia
Eupatorium cannabinum *
caelestinum
altissimum
Tussilago farfara *
petasites *

3. *Sem. aristis coronato.*

Xeranthemum annuum *
Bidens tripartita *
cernua *
pilosa
frondosa
bipinnata
. . . . [47]

C. Radiatae.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta paleacea.*

Helianthus annuus
multiflorus
Rudbeckia hirta
laciniata
oppositifolia
Buphthalmum grandiflorum *
helianthoides
Siegesbekia orientalis
Achillea ageratum *
tomentosa *
ptarmica *
nana *
millefolium *
nobilis *
Anthemis nobilis
millefolia
tinctoria *
maritima *

44 *Absinthium alpinum candidum humile* Bauh. *pin.* 139. *
45 *Absinthium arborescens* Lob. *ic.* 753.
46 *Filago foliis tenuissimis, floribus umbellatis cylindricis* Hall. *Gott.* 377. *
47 *Bidens foliis ovatis & tripteris, caulibus hirtis brachiatis* Hall. *Gott.* 383.

arvenſis *

b. *Placenta nuda.*

Oſteoſpermum uvedalia
moniliferum

Calendula . . . [48]
. . . . . [49]

Chryſanthemum leucanthemum *
ſegetum *
coronarium
corymboſum *

Matricaria parthenium *
chamomilla *
recutita *

Bellis perennis *

2. *Sem. pappis coronato.*

Aſter alpinus *
novae angliae
novi belgii
chinenſis
dumoſus

Inula helenium *
dyſenterica *
pulicaria *
hirta *
. . . . . [50]

Erigeron canadenſe *

Senecio hieracifolius
vulgaris *
incanus *
jacobea *
ſarracenica *
paludoſus

Solidago ſarracenica *
mexicana
virga aurea *
canadenſis
ſempervirens

Doronicum pardalianches. *

3. *Sem. ariſtis coronato.*

Tagetes patula
erecta

D. Planipetalae.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta nuda.*

Lapſana communis *
ſtellata
rhagadiolus.

b. *Placenta paleacea.*

Catanance caerulea *

Cichorium intybus *
endivia
ſpinoſum

Scolymus maculatus. *

2. *Sem. pappis coronato.*

a. *Placenta nuda.*

Leontodon taraxacum *
hiſpidum *

Hieracium alpinum *
auricula *
piloſella *
murorum *
. . . . [51]

48 *Caltha vulgaris* Bauh. *pin.* 275.
49 *Caltha arvenſis* Bauh. *pin.* 275. *
50 *Aſter montanus hirſutus* Lobel. *ic.* 350.

. . . . . [51]
amplexicaule *
umbellatum *
. . . . . [52]
Crepis barbata
fœtida *
. . . . . [53]
Picris echioides *
hieracioides *
Sonchus aſper *
laevis *
Prenanthes muralis *
Chondrilla juncea *
Lactuca ſativa
perennis. *
viroſa *
Scorzonera laciniata *
hiſpanica
tingitana
Tragopogon pratenſe *
b. *Placenta ſquamis diſtincta.*
Hypochoeris maculata *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Coriſpermum hiſſopifolium
Circaea lutetiana *

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Cneorum tricoccon *
Commelina tuberoſa
Tradeſcantia virginiana
Bromelia ananas
Chamaerops humilis *
Aliſma plantago *

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Epimedium alpinum *
Cornus mas
Sanguinea *
Potamogeton lucens *
Criſpum *

II. HEXASTEMONES.

A. Siliculosae.

Myagrum perfoliatum .
Sativum *
Draba verna *
alpina *

Lepi-

51 *Hieracium murorum laciniatum minus piloſum folio anguſtiore* Bauh. *pin.* 129. *
52 *Hieracium caule folioſo, ramoſo, foliis & calyce longo villo barbatis* Hall. *helv.* 744. *
53 *Crepis foliis glabris, floribus minimis, caule ramoſiſſimo* Hall. *Gott.* 412.

Lepidium latifolium *
iberis *
ſativum
Thlaſpi ſaxatile *
arvenſe *
alliaceum
campeſtre *
burſa paſtoris *
Cochlearia coronopus *
armoracia *
glaſtifolia
officinalis *
Iberis ſemperflorens
umbellata
amara *
Alyſſum incanum *
montanum *
Halimifolium *
ſinuatum
clypeatum
Clypeola . . . [54]
. . . . . [55]
Biſcutella didyma *
auriculata
. . . . . [56]
Lunaria rediviva *
. . . . [57]

B. Siliquosae.

Cardamine pratenſis *
Siſymbrium ſophia *
tanacetifolium *
irio *
Strictiſſimum *
Eryſimum alliaria *
Cheiranthus cheiri
incanus
tricuſpidatus
Heſperis matronalis *
dentata
. . . . [58]
. . . . [59]
Arabis thaliana *
Turritis glabra *
hirſuta *
Braſſica orientalis
campeſtris *
napus
rapa
Sinapis arvenſis *
alba *
nigra *
Raphanus ſativus
raphaniſtrum *
Bunias erucago *

orien-

54 *Thlaſpi alyſſon dictum campeſtre minus* Bauh. *pin.* 107.

55 *Clypeola perennis incana, foliis ſubrotundis, calyce deciduo, ſiliculis ovato acutis.* Habitat in ſummis alpibus cottiis nova planta, cujus deſcriptionem, & iconem dabo in Enumeratione ſtirpium Pedemontii propediem edenda.

56 *Jondraba alyſſoides apula ſpicata* Col. *ecphr. p.* 285.

57 *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis* Roy. *Leyd.* 533.

58 *Heſperis maritima ſupina exigua* Tourn. *inſt.* 222.

59 *Heſperis exigua lutea folio dentato auguſto* Boerh. *ind. alt. II.* 20.

orientalis
+ Isatis tinctoria *
Crambe maritima
hispanica
Cleome gynandra
ornithopodioides
viscosum

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera bonariensis
biennis *
. . . . . [60]
Epilobium hirsutum *
angustifolium *
montanum *
palustre *
Ruta graveolens *
Cardiospermum halicacabum

IV. POLYSTEMONES.

A. Monostylae.

Euphorbia maculata
pilosa *
chamaesyce *
peplus *
lathyris *
spinosa *
dulcis *
helioscopia *
verrucosa *
orientalis
platiphillos *
cyparissias *
palustris *
neriifolia
caput medusae
. . . . [61]
officinarum
+ Chelidonium majus *
glaucium *
corniculatum
hybridum
+ Papaver rhaeas *
orientale
+ somniferum
Argemone mexicana
+ Actaea spicata nigra *
Capparis spinosa

B. Tetrastylae.

Philadelphus coronarius *

C. Polystylae.

Tormentilla erecta *
Talictrum foetidum *
+ flavum *
+ minus *
+ aquilegifolium *
+ Clematis recta *
+ vitalba *
flammula *
integrifolia

CLAS-

60 *Onagra foliis glabris, flore suave purpureo* Hall. *comm. Gott.* 1751. *p.* 224.
61 *Euphorbium humile procumbens, ramis simplicibus, copiosis, caule crassissimo tuberoso* Burm. *afr. p.* 20. *t.* 10.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra-aut pentapetalo papilionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. HEXANTHERAE.

+ Fumaria bulbosa *
lutea
+ — officinalis *
+ — spicata *

B. OCTANTHERAE.

Polygala vulgaris *

C. DECANTHERAE.

1. *Uniloculares.*

Trifolium repens *
rubens *
agrarium *
montanum *
squarrosum
angustifolium *
arvense *
clypeatum
glomeratum *
melilotus corniculata
melilotus officinalis *
melil. caerulea *
melil. italica

Lotus tetragonolobus
conjugata *
hirsutus *
corniculata *
dorychnium *
orinthopodioides *
recta *
Anthyllis tetraphilla *
vulneraria *
barba jovis *
Medicago radiata
sativa *
falcata *
lupulina *
orbicularis *
scutellata *
tornata *
intertexta *
Ononis spinosa *
alopecuroides
natrix *
mitissima
viscosa
rotundifolia *
Cytisus laburnum *
. . . . . [62]
Genista tinctoria *
Phaseolus coccineus
caracalla
vulgaris
lunatus
Dolichos lablab

soja

[62] *Cytisus minoribus foliis ramulis tenellis villosis* BAUH. *pin.* 390.

ſoia
Hedyſarum canadenſe
onobrychis *
gallo-provinciale *
violaceum
paniculatum
Vicia faba
narbonenſis
ſativa
dumetorum *
benghalenſis
Ervum lens
tetraſpermum *
hirſutum *
ervilia
Orobus tuberoſus *
vernus *
niger *
Lathyrus aphaca *
cicera
ſativus *
tingitanus *
pratenſis *
latifolius *
Zeylanicus
Piſum ſativum
maritimum
Cicer arietinum
Colutea arboreſcens *
aethiopica
herbacea
Galega officinalis *
Indigofera tinctoria
Aeſchynomene americana
aſpera
Amorpha fruticoſa [63]
Crotalaria laburnifolia
Robinia pſeudoacacia *
Coronilla emerus *
ſecuridaca *
varia *
Hippocrepis uniſiliquoſa *
Lupinus albus
hirſutus
Scorpiurus ſubvilloſa *
2. *Biloculares*.
Aſtragalus glyciphillos *
uliginoſus
montanus *
epiglottis
Biſerrula pelecinus *
Glycine apios.

II. PENTAPETALAE.

Glychirriza echinata
ſiliquoſa
Ulex europaeus
Spartium junceum *
ſcoparium *
monoſpermum
Pſoralea corylifolia
bituminoſa *
Cercis ſiliquaſtrum *
Sophora alopecuroides

 Caſſia

63 Unico exemplo habet AMORPHA florem monopetalum *h. e.* tantummodo vexillum, alis & carina deficientibus.

Cassia senna
fistula
occidentalis
chamaecrista
Parkinsonia aculeata

CLASSIS VII.

Plantae flore pentapetalo, & Gymnodispermae.

II. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CONJUNCTIS.

Eryngium planum
maritimum *
campestre *

II. SEM. COMMUNI PLACENTA CARENTIBUS.

A. Obscura umbella.

Phillis nobla
Hydrocotyle vulgaris

B. Manifesta umbella.

1. *Sem. Gibbis striatis.*
a. *Petalis aequalibus.*
Apium petroselinum
graveolens
Anethum hortense
foeniculum *
Ligusticum vulgare *
Sium sisarum
falcaria *
Sison amomum
canadense
Bupleurum falcatum *
Crithmum maritimum *
Althamanta cretensis *
oreoselinum *
b. *Petalis inaequalibus.*
Smyrnium olusatrum *
Aegopodium podagraria *
Carum carvi *
Seseli annuum *
Pimpinella saxifraga *
Oenanthe biennis *
Aethusa cynapium *
Conium maculatum *
2. *Sem. gibb. & alatis*
a. *Alis duabus.*
Peucedanum officinale *
Angelica archangelica *
sylvestris *
lucida
Imperatoria ostruthium *
b. *Alis quatuor, & ultra.*
Laserpitium latifolium *
siler *
Astrantia major *
3. *Sem. planis alatis.*
Pastinaca sativa
. . . . . [64]

Tordy-

64 *Pastinaca folio quasi libanotidis latifoliae* Boerh. *ind.* 1. 67.

Tordylium syriacum
maximum *
Heracleum sphondylium *
Ferula glauca
ferulago
Thapsia . . . . . [65]
4. *Sem. asperis.*
Caucalis grandiflora
platycarpos *
Sanicula europaea *
5. *Sem. villosis, nec rostratis.*
Daucus . . . . [66] .
. . . . . [67] .
b. *Sem. rostratis.*
Scandix odorata *
pecten *
chaerefolium
nodosa
Chaerefolium sylvestre *
hirsutum *

CLASSIS VIII.

Plantae flore pentapetalo, nec Gymnodispermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.
Geranium capitatum
zonale
inquinans
odoratissimum
alchimilloides
pratense *
robertianum *
molle *
. . . . [68]
bohemicum
sylvaticum *
nodosum *
sanguineum *
malacoides *
cicutarium *
gruinum *
myrrhifolium
triste
Sida spinosa
abutilon
Napaea dioica
Alcea rosea
Malva caroliniana
rotundifolia *
sylvestris *
mauritiana
verticillata
alcea *
Lavatera arborea *
lusitanica
trimestris
thurin-

65 *Thapsia sive turbith garganicum semine latissimo* BAUH. *hist. III.* 2. 50.
66 *Daucus vulgaris* CLUS. *hist. CXCVIII.* *
67 *Daucus sativus* TOURN. *inst.* 307.
68 *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto* HALL. *helv. p.* 366. *

thuringiaca *
Goſſypium herbaceum
Hibiſcus ſyriacus
paluſtris
mutabilis
aeſculentus
abelmoſch
Althaea officinalis *
cannabina *

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Citrus medica
aurantium
Hypericum androſaemum *
perforata *
Croton tinctorium *

III. FILAMENTIS OMNIBUS LIBERIS.

A. Pentastemones.

1. *Monoſtylae.*

Lagoecia cuminoides
Celoſia criſtata
argentea
Vitis vinifera *
arborea
Ribes alpinum *
nigrum *
groſſularia *
rubrum
Hedera helix *
quinquefolia
Ceanothus americanus
africanus
Evonymus europaeus *
Viola hirta *
odorata *
canina *
montana *
calcarata *
biflora *
. . . . . [69]
. . . . . [70]

2. *Triſtylae.*

Tamarix germanica *
Staphilaea pinnata *
Rhus coriaria
cotinus *
copallinum
radicans
Paſſiflora foetida
caerulea
incarnata

3. *Tetraſtylae.*

Parnaſſia paluſtris *

4. *Pentaſtylae.*

Statice armeria
. . . . . [71]
Linum uſitatiſſimum
. . . . . [72]

narbo-

69 *Viola bicolor arvenſis* Bauh. *pin.* 200. *
70 *Viola tricolor hortenſis* Bauh. *pin.* 200.
71 *Limonium maritimum majus* Bauh. *pin.* 192. *
72 *Linum arvenſe* Bauh. *pin.* 214. *

narbonense *
hirsutum
Crassula coccinea
perfoliata
pellucida
. . . . .[73]

B. Heptastemones.

Aesculus hippocastanum.

C. Octostemones.

Tropaeolum minus
majus. . . .

D. Decastemones.

1. *Monostylae*.

Tribulus terrestris *
Zygophyllum fabago .
Caesalpina sappan
Melia azedarach *
Guillandina moringa
Dictamnus albus *

2. *Distylae*.

Dianthus chinensis
armeria *
barbatus
plumarius *
caryophillus *
prolifer *
Saponaria officinalis *
vaccaria *
ocymoides *
orientalis
Gypsophila repens *
muralis * . . .
Saxifraga cotyledon *
rotundifolia * .
tectorum *
granulata *

3. *Tristylae*.

Alsine media *
Arenaria serpilifolia *
campestris *
Silene nutans *
rubella
quinquevulnera *
lusitanica
behen
conoidea
~~nutans~~
Cucubalus baccifer *
behen * . .
viscosus
reflexus
. . . . .[74]

Gari-

73. *Crassula portulacae facie arborescens* Dill. *elth. p.* 120.

74. *Silene viscosa alpina foliis omnibus planis, ac prorsus glabris, petalis angustis, intus candidis extus ex viridi luteolis, profunde bifidis, divisionibus divaricatis linearibus, nectariis extantibus, ac stylis tribus longissimis purpurascentibus sub sole spiraliter convolutis.* Manetti, *Spicil. n.* 1005. Caules tricubitales, rotundi, subhirsuti, viscosi, ramosi, ad ramos nodosi. Calix gracilis ore acute quinquefido, albescens, & decem striis nigris elevatis percursus. Petala cordata semifida, coronae denticuli acuti incumbentes. Antherae didymae virides, & iis arescentibus styli longe producuntur. Semina nigra reniformia aspera, & undique minimis foveolis excavata.

Garidella nigellaſtrum

4. *Pentaſtylae*.

Sedum telephium *
rupeſtre *
cepaea
album *
. . . . . [75]

Agroſtemma githago
. . . . . [76]

Ceraſtium repens
aquaticum *
viſcoſum *
ſtrictum *

Spergula arvenſis *

5. *Decaſtylae*.

Phitolacca americana *
mexicana

POLYSTEMONES.

Monoſtylae.

Tilia europaea

Portulaca oleracea
piloſa
. . . . . [77]

Ciſtus albida *
ſalvifolia *
fumania *
helianthemum *

Peganum harmala

Corchorus olitorius

Prunus mahaleb *
armeniaca
ceraſus
domeſtica
ſylveſtris *

Amygdalus ſylveſtris
perſica
communis

Myrtus . . . [78]
. . . . . [79]

Punica granatus

2. *Diſtylae*.

Agrimonia . . . . [80]
. . . . . [81]

Crataegus torminalis *
oxyacantha *

3. *Triſtylae*.

Sorbus acucuparia *
domeſtica

Reſeda luteola *
alba
lutea *
. . . . [82]

Aconitum lycoctonum *

antho-

75 *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus ſimplicibus trifidis* HALL. *emendat. n.* 107. *&c.* V. Excerptum Bernae anni 1760. T. I. p. 161.

76 *Lychnis coronaria Dioſcoridis ſativa* BAUH. *pin.*, *& Lychnis umbellifera montana helvetica* ZAN. *

77 *Portulaca foliis ovatis petiolatis Roy. prodr. p.* 473.

78 *Myrtus minor vulgaris* BAUH. *pin.* 469.*

79 *Myrtus boetica domeſtica latifolia* LOB. *ic. p.* 127.

80 *Agrimonia, ſeu eupatorium veterum* BAUH. *pin.* 321.*

81 *Agrimonia odorata* CAM.

82 *Reſeda foliis integris, floribus odoratis* HALL. *Gott.* 95.

anthora *
Delphinium ajacis
ſtaphiſagria
elatum *
. . . . . [83]

4. *Pentaſtylae.*

Aquilegia ſylveſtris
Nigella damaſcena
ſativa
orientalis
Meſpilus germanica
Pyrus malus
cydonia *
communis

5. *Polyſtylae.*

Spiraea aruncus *
filipendula *
ulmaria
Caltha populago *
Helleborus niger *
viridis *
Iſopyrum fumarioides
Potentilla anſerina *
multifida
argentea *
reptans *
recta *
Geum urbanum *
rivale *
Comarum paluſtre
. . . . . [84]
. . . . . [85]
Rubus idaeus *
Roſa eglanteria
canina *
centifolia
alba
. . . . . [86]

CLASSIS IX.
Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis bifolia *
maculata *
uſtula-

83 *Delphinum nectariis diphillis, floribus ſolitariis, foliis multipartitis, foliolis lineari acuminatis. Enum. nic. p.* 200. * Folia craſſula, ſulcata, viridia, (licet interdum ſubincana) profunde trifida, ſegmentis acute trilobis. Rami terminales longiſſime florigeri. Flos ſingulus prodit ex ala folioli lineari-lanceolati in ſpinulam inermem attenuati, nixus pedunculo bilineari, qui prope florem firmatur duabus ſtipulis lanceolato-acutis receptaculum longitudine ſuperantibus. Flos caeruleus calcare ſurſum ſpectante. Calcar leviſſime incanum duplo longius flore. Nectarium ex duabus portionibus; quaelibet autem ſuperius alam erigit linearem bifidam ſegmentis rotundis, inferius alam ſubrotundam non inciſam. Inter prima duo lateralia petala, & ſtamina naſcuntur duae laminae ex longis unguibus ovatae, inciſae, imberbes, pallidiores petalis, ſed ea omnino referentes. Hae laminae alas inferiores calcaris amplectuntur, & cum iis interiorem florem cuſtodiunt. Antherae luteae, filamentis pallidioribus. Siliquae tres laeves, toroſulae.

84 *Fragaria vulgaris* BAUH. *pin.* 326. *

85 *Fragaria chiloenſis foliis maxime carnoſis hirſutis* DILL. *elth. p.* 145.

86 *Roſa lutea ſimplex* BAUH. *pin.* 636. *

ustulata *
Ophris ovata *
Serapias . . . [87]

II. TRIANTHERAE.

Ruscus aculeatus *
hypoglossum *
racemosus.

III. HEXASTEMONES.

Monostylae.

1. *Flore fructui imposito.*

Narcissus poeticus
pseudonarcissus *
jonquilla
tazetta
Amaryllis formosissima
Pancratium illiricum

2. *Flore fructum cingente.*

Allium sativum
porrum
spaerocephalum *
scorodoprasum
vineale *
ursinum *
cepa
Lilium candidum
bulbiferum *
martagon *
Fritillaria imperialis
persica
Erythronium dens canis *
Tulipa gesneriana
Ornithogalum pyrenaicum *
pyramidale
umbellatum *
Anthericum ramosum *
liliago *
frutescens
alooides
Yucca gloriosa
aloifolia
Berberis vulgaris *
Asparagus officinalis *
acutifolius *

IV. ENNEASTEMONES.

Laurus nobilis
indica
benzoin.

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Nymphaea alba *
lutea *
Cactus mammillaris
triangularis
tetragonus
hexagonus
grandiflorus
peruvianus
lanuginosus

flagel-

87 *Epipactis foliis ensiformibus, floribus pendulis, labello obtuso per oras plicato* Hall. *act. helv. T. IV. p.* 111.

flagelliformis
opuntia *
tuna
cochenillifer
Adonis annua *
Anemone hepatica *
palmata
pratenſis *
coronaria
virginiana
nemoroſa *
Trollius europaeus *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo exceptis graminibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Ricinus communis
Ephedra diſtachya *
Thuya occidentalis
Cupreſſus ſempervirens
diſticha
Pinus larix *
abies *
Juniperus communis *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. JULIFERAE.

Salix fragilis *
babylonica
Carpinus betulus *
Corylus avellana *
Fagus ſylvatica *
Platanus orientalis
Piſtacia trifolia

B. NON JULIFERAE.

1. *Monantherae.*

Salicornia annua *
Blitum capitatum

2. *Triantherae.*

Ficus communis
Polycnemum arvenſe *

3. *Tetrantherae.*

Urtica urens *
dioica *
cannabina
Parietaria officinalis *
Aphanes arvenſis *
Elaeagnus anguſtifolia *

4. *Tetrantherae.*

Salſola kali *
ſoda *
Atriplex hortenſis
laciniata *
halymus *
portulacoides *
haſtata *
Ghenopodium bonus henricus *
vulvaria *
ſcoparia
botrys *

ambrosioides
rubrum *
hybridum *
glaucum
maritimum
altissimum
salsum
Amaranthus tricolor
melancolicus
blitum *
spinosus
Beta vulgaris
Cannabis sativa
Humulus lupulus *
Spinacia oleracea
Ceratonia siliqua *
Ulmus campestris *
Celtis australis
5. *Hexantherae.*
Smilax aspera *
Tamus communis *
Rumex patientia
alpinus *
crispus *
acutus *
obtusifolius *
pulcher *
bucephalophorus *
lunaria
vesicaria
scutatus *
acetosa *
88
acetosella *
6. *Octostemones.*
Polygonum bistorta *
hydropiper *
persicaria *
orientale
aviculare *
fagopyrum
convolvulus *
tartaricum
7. *Polyantherae.*
Mercurialis annua *
perennis *
Alcalypha virginica
Arum dracunculus
colocasia
maculatum *
arisarum *
Asarum europaeum *

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo.

GRAMINA.

I. DISTEMONES.

Anthoxanthum odoratum *

II. TRISTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

Cyperus longus *

aescu-

88 *Lapathum acetosum. dioicum foliis planis cordiformibus* HALL. *Gött. p.* 16. *& emend. n.* 18. * *V.* Excerptum Bernae pro anno 1760. *p.* 10.

aeſculentus
Coix dactyloides
Carex filiformis
pſeudocyperus.

B. Dystylae.

Saccharum officinarum
Phalaris annua
phleoides *
arundinacea *
Panicum americanum
italicum
crus galli *
Dactylon
miliaceum
Agroſtis paradoxa
Melica ciliata *
nutans *
Poa bulboſa *
Briza minor *
media *
maxima *
Cynoſurus aegyptius
Bromus ſcalinus *
arvenſis *
Stipa pennata *
Avena elatior *
ſativa
fatua *
pratenſis *
Lagurus ovatus *
Arundo donax
phragmites *
Lolium perenne *
Elymus virginicus
Secale cereale
villoſum
Hordeum vulgare
murinum *
Triticum aeſtivum
muticum
turgidum
. . . . [89]

III. HEXASTEMONES.

Juncus piloſus *
campeſtris *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto, ſeu potius inconſpicuo.

Filices.

Equiſetum arvenſe *
Oſmunda regalis *
ſtruthiopteris
ſpicant *
Acroſtichum ſeptentrionale *
Aſplenium ſcolopendrinum *
ceterach *
. . . . [90]
trichomanes *

ruta

89 *Triticum ſpica multiplici* Bauh. *pin.* 21.
90 *Aſplenium ramoſum* Tourn. *inſt.* 544. *

ruta muraria *
Polypodium vulgare *
lonchitis *
criſtatum *

f. mas *
f. faemina *
rhaeticum *
Adianthum capillus veneris *

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

DE MOTIBUS ELECTRICIS.

EXPERIMENTUM.

NUM aër ſit neceſſarius ad motus electricos ciendos, & quantum ad eoſdem motus ejus actio conferat, quaeſtio jamdudum inter Phyſicos exorta eſt, in qua definienda FLORENTINI ACADEMICI, BOYLEUS, HAUKSBEJUS, NOLETIUS, & alii praeſtantiſſimi Phyſici ſe ſe exercuerunt, modo electrica corpora intra vacuum confricando, modo jam confricata vacuo includendo, modo demum intra globum vacuum fila diſponendo, quae ab excitata globi electricitate commoveri, ac dirigi poſſent.

At enim varius pro electricitatis majori, minorive vehementia, pro vacuo plus, minuſve accurato, pro corporum movendorum varia mole, pro tempeſtate inconſtanti, experimentorum eventus quaeſtioni adhuc locum reliquit, & in contrarias partes magnos VIROS diſtraxit, quorum alii aërem ad id, quo de agitur, neceſſarium eſſe affirmarunt, negarunt alii, alii etiam hos inter, oppoſitas ſententias conciliaturi, illam experimentorum varietatem a duplici electricitatis, qua reſinoſae, qua vitreae genere repetendam eſſe duxerunt, ita ut illa etiam in vacuo, haec nonniſi cum aëre vim ſuam exerceat.

Quaeſtionem demum Celeberrimus BECCARIA definivit, parato accuratiori vacuo, novaque excogitata methodo, qua, per verticem recipientis pneumatici traducta catena, electricitatem in vacuo commodius excitaret. In vacuo etiam barometrico motus electricos exploravit, dum ad ſuperiorem barometri partem, cui amianti fila incluſa erant, electricum corpus extrinſecus admovebat: his enim, aliiſve tentaminibus VIR *Clariſſimus* demonſtravit electricos motus in vacuo

accurato penitus extingui, in rariori autem aëre ita languere, ut eorundem alacritas pro ratione ſubducti aëris imminuatur (*a*).

Sic demonſtrata ad motus electricos aëris neceſſitate, illud quaeri inſuper poſſe videbatur, id vi ne ejus coercenti, an elaſticitati, an cui alii proprietati ſit adſcribendum, ad cujus quaeſtionis definitionem aptiorem viam iniri non poſſe cenſui, quam ſi in aliis mediis, praeterquam in aëre, & vacuo, quae a Phyſicis hactenus ſola tentata fuerant, motus electricos explorarem.

Itaque inter catenae extremum oleo immerſum, & ferreum filum cum ſolo communicans oleo itidem immerſum, globulum ferreum ex ſerico filo pendulum ita collocavi, ut globulus etiam intra oleum demergeretur: dein electricitatem excitavi, ejuſque vi globulum inter catenae extremum, & filum ferreum cum ſolo communicans in oſcillationes perinde adigi obſervavi, ac in aëre contigiſſet. At idem experimentum in aqua, aliiſque liquidis, quae paullo minori facilitate, quam ferrum ab electrico fluido permeantur, tentanti, non licuit mihi per mediocrem, & conſuetam electricitatis vehementiam ullos motus excitare.

Ex his primo confirmari videtur in ſpatio aëre vacuo motus electricitate excitari nullos poſſe; quum enim ſpatium aëre vacuum electricum fluidum aeque tranſmittat, ac deferens aliud quodcunque medium, electricis motibus efficiendis ſimiliter ineptum eſſe debet.

Evincitur deinde aëris vim in motibus electricis praeſtandis ex ejus elaſticitate repetendam non eſſe, quum oleum elaſticitatis expers eoſdem non minus efficiat: iccirco vim aëris omnem in eo eſſe poſitam, quod & electricum fluidum coerceat, & demerſa in ipſum deferentia corpora comprimat; evincitur demum media alia quaecunque, quibus im-

(*a*) In Epiſtolis ad Cl. Beccarium epiſt. III. §. 82. 83. 109. 110.

immerſa corpora premantur, electricis motibus faciendis eo aptiora eſſe, quo difficilius per ipſa, quam per movenda immerſa corpora, electricum fluidum permeare poteſt, quando vi ſua elaſtica quaquaverſum expanditut, vel etiam ex eorum uno in alterum effluit, ſi inaequaliter per ipſa fuerit diſtributum.

Hinc adparet de motibus electricis theoriam eo totam ſpectare, ut dato fluido elaſtico, & datis corporibus ipſum, deferentibus, per quae aequaliter, aut inaequaliter diſtributum ſit, ac dato demum medio elaſticum fluidum coercente, a quo ea deferentia corpora utcunque premantur, inveſtigentur, ac definiantur leges motuum corporum eorundem, quae ex inaequali medii coercentis preſſione producuntur, dum fluidum elaſticum, vel quaquaverſum expanditur, vel etiam ex deferentium corporum altero in alterum effluit, ut ad aequalitatem diſtribuatur: de qua quidem re praeclara nonnulla protulit Cl. BECCARIA, & ſpem facit ſe plura brevi prolaturum, quae novum hoc mechaniſmi genus illuſtrare, ac perficere poſſint (*b*).

(*b*) L. C. §. 93., & ſeq.

JOHANNIS BAPTISTAE GABER

EXPERIMENTORUM DE PUTREFACTIONE HUMORUM ANIMALIUM.

SPECIMEN SECUNDUM,

In quo praecipuae agitur de ſedimento ſeri purulento, ac membrana pleuritica.

NULLIUS humoris, ut equidem arbitror, origo, & natura aeque dubia eſt, & incerta, quam puris. Nam & cum leni foetore, aliiſque quibuſdam notis cum corruptis humoribus convenit, & tamen blanda, miti, ac fere balſamica quadam indole ab iiſdem longiſſime differt, & craſſitie, aequabilitate, denſitate, albedine peculiarem corrupti humoris ſpeciem exhibet. Id autem vitae, & vitalis actionis productum Medici, ac Chirurgi plerique conſtituerunt, quod nullibi extra corpus natura, vel arte paratum hujuſmodi humorem reperiiſſent. Tandem Celeberrimus PRINGLE veram hujus humoris originem, & geneſim invenit, & luculentiſſimo experimento explicavit. Animadvertit enim abſque ulla vitae actione digeſtum ſerum, ſedimentum deponere, quod veri puris ſpeciem omnino praeſefert. Hoc inventum plane dignum mihi viſum eſt, in quo illuſtrando, & quoad fieri liceret perficiendo, ſtudium, diligentiamque conferrem. Quapropter experimenta multa inſtitui, quae, ni fallor, inventum illud comprobant, confirmant, exornant, ejuſque in hanc Pathologiae partem magnum, & uberrimum uſum oſtendunt. Nonnulla etiam eadem occaſione circa pleuriticam cruſtam experimenta tentavi, quae omnia acutiorum Virorum judicio proponenda eſſe putavi.

I. Sedimentum duplex a putreſcente ſero deponi conſtanter obſervavi; alterum primis digeſtionis diebus abſque ulla

ſeri

ſeri perturbatione ſecedebat, albidiſſimum erat, fundo vaſis adhaerens, & eo magis ſpiſſum erat, quo calor in digerendo minor adhibitus fuerat. In calore modico, ad exemplum decem graduum rheaumuriani Thermometri, ſimillimum erat membranae tenerae, quae in hydropicis fit, & viſcera tegit. Portio ejuſdem materiei ex ſero ſecedentis ſimilis membranae ſpecie ad ejus ſuperficiem etiam innatabat. Alterum ſedimentum tardius deponebatur, & ſeri perturbatio ejus depoſitionem praecedebat (*a*), ſubcinerei magis coloris a principio erat, minuſque compactum, ſed procedente tempore majorem denſitatem, & opacitatem acquirebat, & ex ſubcinereo in album magis vergebat.

Sedimentum primum, ſi digeſtionis calor paullo major eſſet, cum hoc paullatim ita confundebatur, ut diſtingui amplius non poſſet. Prius illud exiguum erat, & in vaſe ad ſpithamam alto vix duas, treſve lineas altitudine aequabat; alterum copioſum erat, & tertiam voluminis ſeri ſuperabat. Prius illud, ut dictum, intra unam, alteramve diem in calore humani corporis ſubſidebat, hoc, nonniſi poſt quinque, aut ſex dierum intervallum, aut etiam tardius.

2. Eo autem citius ſubſidebat, quo calor erat major; in vaſis etiam anguſtioribus, coeteris paribus, citius longe ſecedere viſum eſt, quam in amplioribus, quando in utriſque ſeri ſuperficies oleo tegebatur. In vaſis autem hermetice clauſis, coeteris item paribus, paullo tardius ſubſidere viſum eſt, quam in iis, in quibus ſeri ſuperficies oleo tegebatur, & in his iterum aliquanto tardius, quam in iis, in quibus ſerum nudum ad aërem patebat.

3. Coeterum ſecundum ſedimentum etſi plerumque ex albo ſubcinereum, opacum, homogeneum adpareret, & vaſis infimam partem occuparet ita, ut horizontalem ſuperficiem haberet, interdum tamen inprimis ſi ſerum ex hominibus diſ-

(*a*) Cl. Pringle T. II. trait. ſur les ſubſtanc. ſeptiq., & antiſeptiq. Exp. XLV. p. 278.

diſcraſia aliqua laborantibus eſſet eductum, & colore aliquo, vel bilis, vel alterius humoris infectum, non ejuſmodi erat ſedimentum, ſed inaequale, in flocculos diviſum, partim ad fundum colligebatur, partim ad ſuperficiem ferebatur: idque etiam multo magis in vaſis apertis contingebat calori humani corporis, aut etiam vehementiori expoſitis, quando ex evaporatione diſſipata tenuiori parte, priuſquam craſſior haec ſecederet, ita confuſe deponebatur, ut non album, ſed plus, minuſve nigrum, foetens, glutinoſum ſedimentum relinqueret inſtar capitis mortui a ſeri diſtillatione reſidui (*b*).

4. Ex his, aut ſimilibus cauſis fortuitis factum fuiſſe cenſeo, ut aqua, quae ſedimento ſupernatabat, viridis fuerit obſervata a Cel. PRINGLE (*c*), qualem mihi ſemel, & bis obſervare contigit in ſero nudo ex ictericis educto, & calori viginti-quinque graduum expoſito. Sed quando ſerum ſanum, oleo tectum, aut hermetice clauſum in calore viginti-quinque, aut triginta-quinque digerebam, obſervabam conſtanter aquam ſupernatantem decolorem, & eo magis limpidam, quo diutius fuerat digeſta.

5. De aëre vix memorare neceſſe eſt dum ſedimentum fieret, & dum addenſaretur, copioſum ſemper per oleum bullarum ſpecie erupuiſſe, quando oleo liquor tegebatur: in vaſis autem hermetice clauſis etiam robuſtis, tanta copia haud raro collectum, inprimis ſi vacuum ſpatium, exiguum, ſerum autem copioſum eſſet, ut vaſa ingenti cum fragore diffringeret.

6. Compreſſioni hujuſmodi ab aëre factae tribuendum cenſeo, quod in clauſis hoc pacto vaſis ſedimentum tardius ſecederet (2); ut enim motum quemlibet inteſtinum, ita & putrefactionis exordia, ex quibus illa ſedimenti ſeceſſio profi-

(*b*) Vid. T. praeced. p. 81.
(*c*) L. c.

proficiſcitur, pro ratione compreſſionis retardari, aut impediri, Boylei experimenta luculentiſſima oſtendunt.

7. Juvabit modo ſedimenti hujus, & puris qualitates exponere, ac comparare.

1.° Pus album fere eſt, opacum, ſpiſſum (*d*): eamdemque eſſe ſedimenti ſpeciem mox memoravimus.

2.° Pus in aqua diſſolvitur, & deinde ſitu ipſo iterum ſubſidet (*e*): idipſum ſedimento evenire per experimenta comperi.

3.° Pus frigore non cogitur (*f*): eamdem proprietatem ſedimentum praeſefert.

4.° Pus laudabile fere ſemper foetet (*g*), ſed parum, & vix ſenſibiliter (*h*): ita quando ſedimentum deponitur vix foetere incipit (*i*), & praeterea cum acidis nondum effervеſcere, quinimo iiſdem, & igne coagulari, tum ſedimentum, tum ſupernatantem aquam obſervavi ſecus, ac in ſero penitus corrupto contingat (*k*). Eamdem etiam proprietatem puri ineſſe experimentis deprehendi, ut & alkoole, & acidis, & calore pene eodem, quo ſerum cogeretur, quae puris proprietas, ut opinor, ad ejus ortum ex ſero confirmandum plurimum facit.

5.° Demum pus inflammabile eſſe dicitur (*l*); nec inflammabilibus partibus ſerum deſtitui ejus analyſis oſtendit (*m*).

8. Quod

(*d*) Cl. Quesnay de la ſuppuration p. 2. 3. ex albido flaveſcens Cl. Eschenbach prix de l' Academ. de Chirurg. Tom. II. p. 371.

(*e*) Trait. des tumeurs, & des ulcéres. Tom. I. p. 39.

(*f*) Id. l. c.

(*g*) Id. l. c.

(*h*) Cl. Quesnay l. c. Aquapendente apud Eschenbach l. c. p. 373. Cl. Grashuis in eod. lib. p. 279.

(*i*) Cl. Pringle turbatur ſerum antequam foetere incipiat. l. c. p. 282.

(*K*) Ex Malpighio Ill. Haller Phyſiol. Elem. T. II. p. 132. Schvvenche tamen ſerum corruptum cum ſumme acidis metallicis in maſſam coire poſt efferveſcentiam. Haematolog. p. 134.

(*l*) Ill. Haller l. c. p. 128. not. h. *

(*m*) Id. l. c. p. 139.

8. Quod ſi conſideremus ea, que in vulnere contingunt, ubi referente BOERHAAVIO, poſtquam haemorrhagia ceſſavit, liquor dilutus, rubellus, tenuis effluit (*n*), qui tertio, quartove die ſerius, vel ocyus in liquorem tenacem, album, pinguem, aequalem, pus abit (*o*). Si cogitemus eam mutationem non contingere, quando vel cruſta ſponte nata, vel emplaſtro vulnus non tegitur (*p*), manifeſto, ni fallor, conſtabit, quomodo ex effuſo ſero pus in vulneribus reſorpta tenuiori parte relinquatur: neque dubito ex ſpiſſeſcente lympha pus illud produci, etſi Vir Cl. lympham in vulnere quantumvis relictam, numquam ſpiſſeſcere contendat (*q*), & id ſolum praeſtare, ut emollita arteriarum extrema phlogiſticum id dimittant, quod poſtea in pus eſt abiturum (*r*): quidquod in vulneribus etiam cum exigua inflammatione, aut etiam diſpoſitionibus inflammationi oppoſitis, tamen bona ſuppuratio plerumque fit, quae vulneris ſanationem adjuvat, & cicatricem citam producit (*ſ*)? & ex oculis infantum palpebris per aliquod tempus conglutinatis ſine ulla, ſive inflammationis, ſive ſuppurationis nota hujuſmodi materia ſaepe exit (*t*): huc accedit ratio, quam affert Cl. PRINGLE (*u*), quod ſetacea magnam quotidie puris copiam praebendo inſigniter debilitent, quod fieri non poſſet ex ſolo partis vitio, abſque univerſali humorum jactura, & Cl. DE-HAEN advertit ex vulneribus tamdiu tanta copia pus effluere, ut homines pereant defectu virium, cum ſtagnans in extremis vaſis phlogiſtica materies ne centeſima quidem puris partem ſuppeditare poſſe videatur, quae om-

(*n*) De cognoſc., & curand. morb. aph. 158. n. 4.
(*o*) Ibid. n. 7.
(*p*) Cel. SVVIETEN iu eum loc. T. 1. p. 230. GRASHUIS l. e. p. 287.
(*q*) Cl. DE-HAEN T. II. p. 32. ad 36.
(*r*) Id. Ibid. a p. 37. ad 43.
(*ſ*) Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.
(*t*) GRASHUIS l. c. p. 299.
(*u*) L. c.

omnia ex propoſita ſeri ſanguinei in pus degeneratione (v), facilius intelliguntur, quin ut neceſſe ſit ad puris in vaſis efformationem confugere (x), cum inprimis, ut dictum eſt, in vulneribus quibuſdam abſque inflammatione locali, tum abſque univerſali humorum vitio bonum pus prodire fuerit obſervatum (y).

9. Sedimentum porro principio dilutum, ac rarum continuata digeſtione craſſius, denſius, & albidius evadit. Idipſum puri ſive vulneratae, ſive inflammatae partis contingit, ut primum aquoſius, & dilutius, opacum magis, denſum, albumque fiat, prout temporis progreſſu digeritur, & ad maturitatem, ut inquiunt, perducitur.

10. In inflammatione autem cum ſerum ſanguini admixtum in celluloſam effundatur (z), inde intelligi poſſe videtur, quare pus inflammationis magis putreſcibile ſit (a). Sanguinem enim magis putreſcere, quam ſerum, & PRINGLEI experimenta (b), & mea (c) demonſtrarunt.

11. Coeterum ſerum plus, vel magis diſpoſitum eſſe ad ſedimentum deponendum demonſtrant exempla furunculorum, qui uno die pus fundere incipiunt (d), tum anginarum uno die pus exſudantium (e): quod autem pus citius efformetur (f), quam ſedimentum ſecedere ſoleat in calore humani corporis, id tribuo tum memoratae diſpoſitioni, tum calori inflammationis naturali majori, tum modicae effuſi ſeri quantitati (2): nec igitur auſim definire, num aliquando ex

M ipſis

(v) p. 44. 45.
(x) Cl. DE-HAEN l. ult. c. Et de pure vulneris Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.
(y) Vid. ſup. not. s.
(z) HALLER Elem. Phyſiol. T. I. p. 37. 38. 115. 116.
(a) QUESNAY l. c. p. 15.
(b) Exp. XLII.
(c) Vid. T. praec. p. 80.
(d) DE HAEN T. I. p. 20. 21.
(e) Ibid. p. 21.
(f) In vulneribus inflammatis jam ſecundo, aut tertio die pus invenitur Cl. QUESNAY l. c. p. 19. 20.

ipsis vasis pus efformatum effundi possit (8); inde intelligitur, cur pus in membrana pinguedinea plerumque sedem habeat (g), ea nimirum in parte, quae ob laxitatem effusum serum recipere solet; cur dissipatio oedematosi tumoris inflammatae parti supervenientis resolutionem faciat (h), quod nempe resolutio fiat, si effusum serum prius resorbeatur, quam in pus abierit.

12. In hydropicis vero ut plurimum serum parum admodum putrescit (i), cum neutro salium genere effervescit (k), & seri incorrupti coagulabilem indolem servat ab acidis (l), igne (m), & alkoole; quod tribuerim frigidiori aegrotantium constitutioni, alicui residuae effusi humoris circuitioni, copiae, qua & in magnas cavitates effunditur, & easdem replet; quae omnia ipsius depravationem retardent (2): inde mirum non est si pus non efformet, sed primum tantummodo sedimentum (1) descriptum membranarum specie deponat viscera obtegentium. Enim vero quando paullo magis putrescit, ut ex siti, tussi, febre, erysipelate, tympanitide significatur, tunc utique etiam verum pus generat, ut observationes ostendunt (n). Quando vero parum corruptum, & inodorum educitur, tunc digestione verum sedimentum utique deponere observavi, quod ostendit membranas illas, quae viscerum superficiem obtegunt, non a secundi, sed a primi sedimenti materie ortum ducere, cum secundi sedimenti materies in eodem superstes sit, diuturniori digestione demum separanda.

13. Mem-

(g) Grashuis l. c. p. 295.
(h) Quesnay l. c. p. 23. 24.
(i) Bohn lethal. vuln. p. 149.
(K) Gmelin commerc. Lit. Nor. 1745. heb. 52. apud Haller l. c. p. 134.
(l) Ex Malphigio Duverney ibid. p. 136. not. m.
(m) L. c.
(n) Vid. differt. Ludovici Salzmann de abscessu interno mirae magnitudinis, quae est cxxvi. T. iv. disput. Medic. quas collegit Hallerus.

13. Membrana autem, quam memoravimus hydropicorum viſcera tegens (*o*), calore hypocauſti digeſta in liquamen mutabatur, quod omnes puris dotes exhibebat (7). Quemadmodum primum ſedimentum continuata digeſtione, ſecundi, & vere puriformis ſedimenti naturam induebat, ut cum eodem confunderetur (1); hinc facile mihi perſuadebam, tum hanc membranam, tum utrumque ſedimentum ex eadem materie conſtitui, quae minori digeſtione parcior ſecedat, & membranae, aut primi ſedimenti ſpeciem induat, majori, & diuturniori, & ſecedat copioſius, & pus referat.

14. Cum pinguedinem, aut ſolum, aut praecipuum puris elementum nonnulli eſſe velint (*p*), libuit experiri quid digeſta pinguedo praeſtaret, ſed eamdem ranceſcere quidem, putreſcere, in flavum vergere deprehendi, abſque eo quod aut ſedimentum deponeret, aut ullo modo ad puris ſimilitudinem accederet: hinc pus ab eadem vitiari potius, quam conſtitui crediderim, & revera venerea ulcera, in quibus pinguedo corrupta, rancida, puri admiſcetur, ſordida eſſe ſolent, & malae indolis pus effundere (*q*).

15. Cruorem etiam diutiſſime licet vaſe hermetice clauſo digeſtum, fluidiorem quidem, & ſubobſcurum evadere, numquam vero in partes ſecedere, aut ad puris colorem, aliaſque dotes accedere obſervavi. Quare minus probabilis eorum ſententia viſa eſt, qui ex cruoris globulis vitali motu attenuatis, & album colorem induentibus puris originem repetunt (*r*); veroſimilius ergo ſanguinem coeteris puris principiis admixtum, ipſum magis foetidum, & deterius reddere, ut de inflammationis pure ſuperius notatum (10).

 Nec

(*o*) Eadem phaenomena exhibet membrana tegens viſcera inflammata: An meliceriides, & frigidi alii tumores tarde ſuppurantes ex eadem materia?

(*p*) Cl. Grashuis l. c. p. 297. 299.

(*q*) Id. l. c.

(*r*) Platner Chir. §. 54. Cl. Quesnay, qui de la ſaignée p. 418. 419. pus ex cruſta phlogiſtica fieri cenſet, & p. 415. 416. cruſtam a cruore deſtructo, & colorem mutante fieri exiſtimat.

Nec aliter admixtum sero cruorem sedimentum obscurioris coloris, & magis foetens effecisse observavi.

16. Similiter sero admixta bilis sedimenti colorem, & reliquas dotes a puris dotibus eo magis diversas efficiebat quo majori copia admiscebatur. Hinc ex abscessibus hepatis raro bonum pus prodire observationes ostendunt (*f*); hinc erysipelas ichorem potius, quam pus generat (*f**).

17. Demum & investigare volui quid solidae partes digestae exhiberent. Itaque carnis frustula in serum, aut aquam immergebam, & impositis ponduscu lis impediebam quominus ex putredine leviora facta ad superficiem elevarentur: dein tegebam oleo utriusque liquoris superficiem, ac demum in digestionis calore vasa reponebam. Animadverti autem ex digestione carnem aqua immersam in pulverem veluti subpallidum resolutam, qui nullam cum pure similitudinem referebat, carnem vero in sero immersam in similia ramenta resolutam fuisse, quae purulento seri sedimento admixta ipsius aequalitatem & colorem vitiabant (*t*).

18. Ex quibus omnibus jam constare videtur puris originem vitali motui adscribendam non esse (*u*), nisi quatenus calorem facit, qui spontaneam humorum degenerationem promovet; deinde puris materiem non ex cruore, aut pinguedine, aut bile, aut solidis esse repetendam, sed dumtaxat a sero, coeteros vero humores, aut solidas partes sero admixtas puris naturam depravare.

19. Ichor igitur, aut sanies ex alterius cujuscumque humoris sero admixti spontanea degeneratione repetenda est,

tum

(*f*) Si abscessus in intima jecoris substantia sit; non negamus enim sincerum pus sub ejus membrana colligi posse illaeso parenchimate.

(*f**) De-Gorter syst. prax. §. 160. & alibi.

(*t*) Negat enim Cl. De-Haen solidas partes in pus converti, & ex ramentis solidarum partium puris acrimonia detritis, puris homogeneitatem tolli l. c. p. 35. 36. 37.

(*u*) Quae communis Medicorum sententia erat (vid. Boerhaave aph. 387., & alios plerosque) priusquam Cl. Pringle sola spontanea seri degeneratione purulentum humorem parare docuisset.

tum ex diuturniori ejusdem stagnatione, tum forte etiam ex nimio, & inaequali calore (3), aut ex prava, & vitiata seri indole in variis dyscrasiae speciebus, aut demum ex vitio partis serum, aut salsum, aut aliter depravatum effundentis; hinc forte est, ut belladona, & cicuta, quae narcotica sunt, & vasa laxant, ichorem cancrosum in pus convertant, & tantam ejus profusionem faciant, ut aegrotantes in virium prostrationem conjiciantur (*v*).

20. Serum porro in vase hermetice clauso, ut diximus, diutius asservatum, postquam sedimentum deponit, magis limpidum usque, & usque evadit (4), ut tandem aquae limpidissimi fontis speciem referat: tunc vero sedimentum jam fere totum dissipatum est, ejus loco remanente exigua congerie minutorum fragmentorum, quae calcaream substantiam, sabulumque imitantur (*x*), ut in sero per plures menses asservato observavi, tunc vero aqua supernatans evaporabilis tota est, foetet, & ex acidis concentratis opaca dumtaxat, & lactea nonnihil evadit, vehementer effervescit, quin tamen coaguletur; in aperto vase per biduum relicta omnem effervescendi vim amittit. An ex ea calcarea materie skirri origo est explicanda?

21. Hinc adparet quomodo intelligendus sit Cl. PRINGLE, qui sedimentum nec colorem mutare, nec sero amplius misceri doceat (*y*). Ex elementari vero terra sedimentum fieri censet Vir Celeb. nutriendis partibus destinata: quapropter observare libuit qualenam sedimentum serum praeberet animalium, quorum ossa ex rubia rubro colore tincta fuerant, sed de more ex albo in subcinereum vergens fuisse observavi.

22. Pla-

(*v*) Ex belladona Cl. DE-HAEN p. 43. 46. l. c. ex cicuta vulg. Cl. STORCK in libell. de cicuta p. 104. corollar. 8.

(*x*) Quales molleculas teneras tophis podagricis similes in siccato sero superstites observavit ELLER. Mémoir de Berlin T. XI. p. 25.

(*y*) l. c.

22. Placuit etiam ſerum igne induratum digeſtione in vaſe clauſo explorare: paullatim ſolvebatur, aquam dimittebat, & gelatinae ſpeciem induebat, quae emollita ſenſim tandem ſedimentum puriforme priori (1) haud abſimile exhibebat, poſtea vero colliqueſcens ulterius hujuſmodi ſedimentum modicae arenae ſpeciem ſimiliter aſſumebat, aqua limpidiſſima ſupernatante (20); ſed haec omnia tardius quam in ſero non coagulato contingebant (ζ).

23. Libuit demum albumen ovi explorare, quod ſimilia penitus phoenomena, ſimileſque mutationes, ac ſerum digeſtum exhibuit, & fluidiſſimum evaſit depoſito ſedimento, ſed haec omnia tardius quam in ſero contingebant, & ſedimentum ſubcinereum magis, ac fere nigricans erat.

24. Hactenus de ſedimento ſeri puriformi. Quoniam vero puris materiem nonnulli ex eadem materie, ex qua pleuriticam cruſtam fieri docuerunt (*a*), non inopportunum cenſeo experimenta addere nonnulla, quae in cruſta pleuritica tentavi.

Cruſtam pleuriticam aeſtivo tempore poculo tectam, poſt aliquot dies per deliquium fluidam evaſiſſe Cl. PRINGLE obſervavit (*b*); eam mutationem in vaſis hermetice clauſis pariter contigiſſe deprehendi, ita ut cruſta tota in fluidum abiret citius, vel tardius prout craſſior, denſiorque, aut tenuior, rariorque erat: prout vero emolliebatur, ſenſim ſenſimque rubrum colorem acquirebat, quamquam adhaerens rubrum craſſamentum diligentiſſime fuiſſet deterſum, proinde in liquamen abibat plus, minuſve rubrum; inde ſuſpicari coeperam, revera molleculas ſanguinis colore depoſito in cruſtae elementa abiiſſe.

25. At

(ζ) Inde intelligitur cur ex corruptione, igne induratum ſerum penitus ſolvi negaverit Cl. PETIT Epiſt. II. p. 25.

(*a*) Cl. QUESNAY de la ſaignée edit. nov. p. 418. 419. qui cenſet ex propria ſanguinis ſubſtantia cruſtam *glaireuſe* confici ab aucta vaſorum actione, ita deſtructa, ut rubrum colorem depoſuerit Cl. SAUVAGES ſur l'inflammation §. 87. DE-HAEN P. II. p. 17. & 22.

(*b*) Exp. XLII.

25. At postea albidissimas crustas (*c*) nactus, & teneras, eas digestione in limpidum, ac decolorem liquorem olei aemulum resolvi observavi, quapropter verosimilius visum est ruborem, quem (24) sensim prodire observaveram, ex irretitis globulis sanguineis provenisse, qui postea soluti, & cum materie membranae propria (*d*) admixti magis conspicui evaderent, & revera jam observaverat Cl. QUESNAY (*e*) interdum cruoris molleculas tot intercipi, ut crusta rubra sit, & cum placenta sanguinea confundatur, nec ejus crassities definiri proinde possit, nisi novacula scindendo observetur quousque durities, & resistentia perveniat. Quoniam vero globuli sanguinei etiam plures intercipi solent, & solutione manifestari, etsi antea membrana irretiti conspicui non essent; inde intelligitur cur in morbis, prout crusta augetur, cruoris quantitas minui videatur (*f*).

26. Ut vero ad propositum revertamur, soluta crusta in oleosum liquorem abierat, & foetens erat, ut tamen acidis, & igne coagulari hactenus posset, & quod ad rem nostram facit, quantumvis in vase hermetice clauso digesta numquam aut speciem mutabat oleosi liquoris, aut sedimentum ullum puri simile deponebat, sed deponebat perpaucas particulas, quae pulverem tenuissimum, cinereum referebant, ex quo verosimile videbatur ex aliis seri partibus conflari, ac eae sint, ex quibus sedimentum constituitur, tum etiam ejusdem materiem ab hydropicae membranae materie discrepare cum illa digestione non fluida, sed puriformis evaderet (13).

27. Quo-

(*c*) Ideo autem albidissimae erant, quod saepissime per viginti-quatuor horas aquam mutaveram, diversisque in vasis ablueram, aqua autem semper rubuit.

(*d*) Membranam observavi, ex qua ejusdem ortum illustrari crediderim. Etenim crusta, quae sanguineam placentam obtegebat, crassa, dura, eidem firmiter nexa in ambitu producebatur in mucosam, floculentam membranam, quae sensim emollita in serum continuari videbatur, in quod immersa erat, ut coronam veluti circa placentam constitueret.

(*e*) L. c. p. 411. 412.

(*f*) Id. ibid. p. 407. 408. 415. 416.

27. Quoniam vero soluta calore iterum cogitur, inde intelligitur, cur citius aqua calida, quam frigida solvi visa sit (*g*), quod nempe aquae calore indurata perinde, ac induratum ex calore serum tardius colliquescat (22): de coetero digestionis calor eo citius ejusdem membranae portiones solvit, quo intensior est, quamdiu humanum calorem parum superat.

28. Cum humor crustam efformaturus dum sanguis educitur, fluidus, forma olei ad superficiem colligatur, mora demum in crustam densandus (*h*); explorare volui num instar glaciei ex calore humani corporis pristinam fluiditatem recuperaret, sed frustra. Nam in eo calore constituta crusta nonnisi duorum dierum intervallo soluta est, & soluta foetebat; nec amplius frigore pristinam consistentiam recuperabat: quapropter conclusi non calore liquari, sed ingruente putredine.

29. Equidem nitro, aut nitrata aqua, aut etiam aqua pura crustam solvi docent (*i*): sed in aqua sive pura, sive nitrata vix ac ne vix quidem citius resolvi observavi, quam si sola in calore digestionis relinqueretur. Praeterea aquam solutae crustae supernatasse vidi, ut praeterea digestione potius, & putredine, quam vi aquae soluta fuisse videatur; cum inprimis observaverim crustam nitro, aut salibus aliis neutris, aut alkalicis fixis putredinem arcentibus aspersam longe tardius solutam fuisse; neque sic soluta, aut etiam admixtis salibus ex frigore iterum est indurata.

30. Volatilium demum alkalinorum spirituum actionem in hanc crustam explorare volui, & vidi quidem cum spiritu volatili salis ammoniaci calce parato in vase clauso calore viginti-quinque graduum digestam membranam intra horam, tremulae gelatinae speciem induisse, per quatuor vero horas penitus solutam fuisse in liquorem admodum fluidum,

(*g*) Cl. De-Haen P. I. p. 87.
(*h*) Cl. Quesnay l. c. p. 405. 406.
(*i*) Cl. De-Haen l. c. P. I. p. 101. n. 1. de vi nitri solvente.

dum, homogeneum, coloris nonnihil rubelli; tunc vero liquorem hunc in vas patulum effudi, in quo aliquot horarum ſpatio, diſſipato alkali iterum in gelatinam concreta eſt; interea dum ejuſdem membranae fruſta alia, aut ſola digeſta in eodem calore, aut cum nitro ſalibus neutris aliis, alkalicis fixis, octava tandem die, vel etiam tardius ex integro ſoluta fuerunt. Membrana etiam albidiſſima, quae in alkoole per menſem, & ultra ſervata induruerat in corium, quod aqua emolliri, aut diſſolvi amplius non potuiſſet (*k*), pari facilitate ſoluta eſt, & iterum congelata. Jam vero ea ſolutio ex putredine repetenda non eſt, cum tam cito diſſolvatur, quamvis affuſus liquor putrefactioni vehementer reſiſtat, & eodem in auras abeunte iterum concreſcat. Notandum tamen ex alkali volatilis diſſipatione ſolutam membranam priſtinam membranae duritiem non recuperaſſe, ſed in firmiorem tantum gelatinam concreviſſe, quæ novo ſpiritu alkali affuſo abſque digeſtione confeſtim ſolvebatur, ejus diſſipatione iterum concretura. Gelatinam etiam artificialem ex cornu cervi, volatili ſpiritu ſalis ammoniaci ſolvi obſervavi, ſed aegrius, quam pleuriticam membranam: aegrius adhuc, & tardius ſolvebatur coagulatum ex igne ſerum, & omnium tardiſſime, & minus perfecte coagulatum albumen ovi. Poſteriores binae ſolutiones ſpiritu diſſipato cruſtas pellucidas relinquebant. Ex his conſtat verum membranae phlogiſticae menſtruum eſſe alkali volatile, ex quo confirmatur ejuſdem membranae analogia cum polypis, qui urinoſo volatili ſale ſolvi dicti ſunt (*l*). An igitur liquor membranam efformaturus indureſcit quarumdam partium diſſipatione potius, quam frigore? Has, aliaſque conjecturas, quae circa naturam, & phoenomena hujus membranae occurrunt, proponere non licet, quamdiu experimentorum plurium comparatione confirmatae non ſint.

N REFLE-

(*k*) Schwenke p. 166.
(*l*) Malpighius poſth. p. 162.

RÉFLEXIONS

POUR SERVIR DE SUITE AUX MÉMOIRES

Sur le fluide élastique de la Poudre à Canon

PAR M. LE COMTE SALUCE.

CHAPITRE I.

De l' action de l' air sur la Poudre : de la propagation de l' inflammation & de son détonnement.

1. DANS les Mémoires, que j' ai donné dans nôtre premier Volume, je me suis particuliérement attaché à examiner la nature du fluide élastique, qui se développe de la Poudre à Canon à l' occasion de son inflammation, & l' Analise Phisico-Chimique que j' en ai fait, m'a donné occasion d' entrer dans des discussions de plusieurs phénoménes, qui partageaient les sentimens des Savants. Les objections des Célébres M. MUSCHEMBROEK & BERNOULLI (*a*) m' ont paru les plus solides, & mériter le plus d' être développées; c' est ce que je me flatte d' avoir fait, & je ne donnerai maintenant à cet égard que quelques observations & réflexions que j' ai fait du depuis: mon principal but dans ce Mémoire étant d' exposer & de démontrer par des expériences nombre de vérités, & de questions, qui n' ont été jusqu'à présent que très-imparfaitement traitées, & dont personne n' a encor donné aucune solution: telles sont par exem-

(*a*) Mém. pr. p. 6. . . . . Mém. 2. p. 126.

exemple, celles de déterminer *quelle est la véritable action de l' air naturel sur la Poudre: comment les principes actifs de la Poudre sont développés à l' occasion de l' inflammation*, je tacherai aussi de déméler *le dégré de chaleur nécessaire pour l' enflammer &c.*: je ne m' arrêterai point à faire par avance le détail de toutes les questions que j' aurai occasion de traiter, quelques unes étant purement accidentelles, & quelques autres ne me paraissant pas d' une assès grande conséquence pour mériter que j' en prévienne mes Lecteurs; je me contenterai donc d'en indiquer les principales. Savoir 1.° *La raison pourquoi dans le vuide, quoique la poudre prenne feu, la propagation d' un grain à l' autre ne s' en fait pas pour autant*. 2.° Je traiterai *de la chaleur nécessaire pour l'enflammer soit dans l'air libre, ou dans le vuide, & cela selon la dose & la qualité des composans.* 3.° J'exposerai ensuite la méthode dont je me suis servi *pour mésurer l' intensité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire*. 4.° Je passerai en après à parler *des vapeurs du souffre, de la poudre, des méches, & de chandelles allumées &c.*, & j' aurai occasion de faire *des réflexions sur la méthode dont on fait usage dans les expériences sur ce sujet*. 5.° Je finirai enfin par un *examen de la poudre qu'on peut faire sans souffre*.

2. Tous les Phisiciens ont observé que la poudre ne brule que très-lentement, très-difficilement, & en très-petite quantité dans le vuide, mais quelques uns se sont contentés de rapporter simplement le fait (*a*). D' autres ont confondu ce phénoméne avec ce qui arrive à toutes les espéces de flammes, & ont assigné cet effet à quelque propriété particuliére de l' air. Un fait que j' ai rapporté dans mon second Mémoire pag. 146. §. 42., & un examen refléchi sur d' autres expériences faites par plusieurs Auteurs

(*a*) Boyle Expér. circa relat. flam. & aer. tit. 3. pag. 164. & 165. = Haukbee = Mariotte, & plusieurs autres.

Auteurs m' ont donné lieu de penser que ce n'était que dans la pression qu'exerce l' air sur la flamme qu'on en devait chercher la raison. En effet j' ai fait voir que la poudre s' enflamme dans quelque air infecté que ce soit, & BOYLE (*a*) nous apprend qu'une fusée continue à bruler sous l' eau. *La flamme de la poudre n' a donc besoin que d' une pression qui en augmente l' intensité en la retenant au tour des grains?* C' est une vérité que l'expérience que je vais rapporter me parait mettre hors de doute, elle a été faite par M. le Chevalier D' ANTONI pour faire voir les différences entre les quantités de poudre, qui s'enflamment dans le plein & dans le vuide. Quoique cette expérience n' ait donc pas été faite dans la vuë que je viens de proposer, on verra cependant que l' application en est directe, & qu'elle sert à établir solidément la Théorie en question: sans entrer dans une déscription étenduë de la machine, il suffit de dire que l' essentiel consiste en ce que le tuïau, qui contient la poudre, n' est point vuide d' air, tandis que, par le moïen d' une vessie ou parchemin, interceptant la communication qu'il a avec un grand récipient, que l' on place sur une pompe pneumatique, on peut pomper l' air contenu dans le récipient ou l' y laisser: on met ensuite la poudre en feu, & le fluide ne peut se faire jour qu'à travers la vessie. Or il arrive que, lorsque le récipient est vuide d' air, il s' enflamme beaucoup moins de poudre que lorsqu'il est plein: en reflechissant sur les circonstances de cette expérience nous pouvons aisément reconnaître la vérité que nous venons de proposer; car le tuïau qui contient la poudre étant également plein d' air lorsque le récipient, auquel il tient, est plein, ou vuide; il est clair, que dans le cas ou il est vuide la propagation du feu cesse, parceque au moment que le

(*a*) BOYLE loco cit.

le parchemin eſt rompu par l'exploſion des prémiers grains, l' air naturel contenu dans le tuïau ceſſe auſſi de comprimer la flamme, laquelle en ſe raréfiant n' a plus aſſez de chaleur pour mettre en feu les grains qui reſtent.

3. Il n' eſt pas moins aiſé de voir en rapprochant les circonſtances de ces expériences, que l' air ne fait point d' autre fonction que de comprimer la poudre, & qu'en s'oppoſant à la libre expanſion de la flamme & du fluide, il procure une intenſité ſuffiſante au feu des prémiers grains pour enflammer les autres, & à méſure que la preſſion eſt plus grande, la propagation du feu eſt auſſi plus prompte. *Cette plus grande intenſité dépand donc de la denſité que la flamme aquiert par la preſſion.*

4. Delà il eſt facile de rendre raiſon pourquoi en enflammant la poudre dans un récipient, par le moyen d'un verre ardent ou d'un fer rouge, au commencement on ne met en feu qne les grains qui ſont immédiatement atteints par le feu, & enſuite à méſure qu'il ſe développe de fluide, la propagation du feu ſe fait aux grains voiſins, & cela plus ou moins promptement, ſuivant que la quantité d' air développé eſt plus ou moins grande, eu égard à l' eſpace qu'il doit occuper. Il eſt vrai que ces dégrès d' accélération ne ſont point aſsès ſenſibles dans le vuide, parceque étant obligé d' emploïer des petites quantités de poudre pour prévenir les accidens facheux, qui ne manqueraient pas d' arriver à l' occaſion de l' inflammation, il ne ſe développe que de très-petites quantités de fluide: pour s' en aſſurer donc,. & en faire une comparaiſon ſolide avec l'air naturel, il eſt néceſſaire qu'il s'en produiſe autant qu'il en faut pour réſiſter conſidérablement à l'expanſion de la flamme de la poudre qui continuë à s'enflammer, afin que la flamme d' une quantité ſoit ſuffiſante à mettre en feu celle qui la ſuit, de façon que la propagation ſe faira avec la même viteſſe que dans l' air naturel lorſqu' il ſe ſera dé-

développé afsès de fluide pour être en équilibre avec l'air extérieur : ce qui eft en effet prouvé par les expériences de HUIGENS, & de MUSCHEMBROEK. Celles dont je vais donner le détail peuvent fervir de confirmation à ce que je viens d'avancer.

EXPÉRIENCE.

Je mis une fufée enflammée dans un récipient, j'en pompai l'air, & le fluide nouvellement engendré avec beaucoup de précipitation, à chaque exhantlation, on en voïait diminuer la flamme, lorfque enfin elle parut éteinte je fis rentrer un peu d'air qui la révivifiat dans l'inftant, & elle brulait enfuite avec plus de vivacité à méfure qu'il fe développait du nouveau fluide: je fis enfin une feconde fois le vuide, & je continuai pendant quelque tems à pomper le peu de fluide qui pouvait encore fe produire, & la fufée fut éteinte.

5. On ne trouvera pas mauvais que je faffe obferver d'avance que je me fuis auffi fervi de l'expérience fuivante pour déterminer la force & l'élafticité du fluide qui fe développe de la poudre à canon, comme on le verra dans la fuite.

EXPÉRIENCE.

Un tuïau de verre de la longueur de 9. pieds de Roi environ, était recourbé de deux côtés, & placé fur une planche de même longueur perpendiculairement à l'horizon; la partie fupérieure communiquait avec un autre tuïau trèsmince, & d'un fort-petit diamêtre, qui étant paralelle au prémier était foigneufement maftiqué à la pompe pneumatique, & lorfqu'on avait tout le vuide poffible, on interceptait hermétiquement la communication entre les deux

tuïaux

tuïaux à l'endroit de la jonction, afin de ſimplifier la machine, & la rendre moins ſujette à ſe caſſer: la partie inférieure auſſi recourbée & paralelle au grand tuïau, n'en était que la continuation, & était de la longueur de 30. pouces environ, elle tenait à un autre tuïau placé horizontalement, & d'un diamêtre preſque triple, lequel était uni pour la longueur environ d'un pied, & portait enſuite au moins une douzaine de boules ſoufflées dans le même tuïau du diamêtre d'un demi pouce environ chacune, & gardant entr'elles un eſpace cilindrique d'un pouce à un pouce & demi: par le moïen d'un autre petit tuïau on pouvait faire le vuide dans cette autre partie de la machine, & lorſque le mercure était de niveau, on ſcellait hermétiquement ce tuïau: chacune des boules contenait une égale quantité de poudre en poids, je me ſervais d'une cuillere de verre, faite à peu près comme celles, avec leſquelles on ſert les piéces d'Artillérie, & j'évitai par ce moïen l'inconvénient de ne pas mettre chaque doſe dans ſa boule: je mettais enſuite des charbons ardens dans un cuiller de fer que je plaçais ſous la prémiére boule, dont la poudre s'enflammait après quelque tems, & faiſait monter le mercure à une certaine hauteur: lorſque tout était froid, je mettais le cuiller de fer ſous la ſeconde boule, & je continuais de la même maniére pour les ſuivantes. Or il arrivait, que pendant que le mercure était plus bas que lorſque j'avais fait le vuide dans le long tuïau, la poudre de chaque boule ne prenait feu, que quand le charbon en feu était deſſous; mais auſſitôt que cette colonne avait atteint à peu près la même hauteur le feu ſe communiquait d'une boule à l'autre, de ſorte que le mercure était pouſſé à une hauteur qui n'était pas comparable avec les précédentes; & une fois entre autres, où il ſe trouvait encore pluſieurs boules à prendre feu, la machine fut briſée de ce côté avec un bruit extraordinaire, & dommage des Aſſiſtans.

6. Il eſt inutile de réiterer ici les inductions que nous avons déja fait; nous obſerverons ſeulement, que dans un même récipient, où la différence conſiſte en ce qu'il ſoit plein, ou vuide d' air, la flamme de la poudre ſe trouve comprimée, dans un cas, par un poid, qui réſiſte à ſon expanſion, & augmente par-là ſa denſité, & dans l' autre elle peut librement ſe répandre; ce qui doit faire une grande différence dans l' activité.

La propagation du feu eſt donc intercepté dans le vuide, parceque la flamme des grains, qui ſont en feu, pouvant ſe dilater librement, l' intenſité de chaque particule enflammée n' eſt pas ſuffiſante pour mettre en feu les grains auſquels elle touche: & ce défaut d'intenſité, qui dépand du défaut de preſſion n'eſt autre que une diminution de la denſité de la flamme.

7. La preſſion donc ou réſiſtance &c., de quelle nature qu'elle ſoit produira toujours les phénoménes dont il eſt ici queſtion, ſavoir une facilité à l' inflammation & à la communication du feu, & à méſure qu'elle ſera plus grande juſqu'à un certain point, ces deux phénoménes ſeront plus prompts, le développement du fluide plus ſimultané, & le détonnement plus conſidérable (*a*). De là les différences qui arrivent dans les effets d'une arme à feu chargée avec la même quantité & qualité de poudre (*b*).

8. Il

(*a*) Nous avons démontré §. 4. & 5. qu'une réſiſtance quelconque ſert à la propagation du feu, & que le fluide élaſtique a auſſi cette propriété. C' eſt ce qui eſt encore confirmé par M. Huigens & par M. Jean Muschembroek dans ſon appendice à la phiſique de M. ſon frére pag. 52., le même avertit de pomper le fluide à chaque projection de poudre que l' on fait dans un récipient vuide d' air, car *ſans cette précaution il ſe fait une ſucceſſion d' inflammation de la poudre, que l' on fait tomber ſur le fer rouge à celle qui eſt dans la phiole, & le vaiſſeau peut en être briſé avec danger de ceux qui font l' expérience.*

(*b*) On ne trouvera pas mauvais que je faſſe ici une petite digreſſion, pour faire mieux ſentir l' idée que l' on doit ſe former de l' action de l' air naturel ſur la poudre; on ne ſaurait lui faire franchir de certains bornes, ſans tomber dans des inconſéquences, qui ne peuvent qu' induire dans des erreurs groſſieres. La preſſion donc que fait l'air naturel ou quelconque autre corp ſur la poudre, ſert à nous procurer une pro-

8. Il très-important de concevoir la différence qu'il y a entre la pression néceſſaire pour s' oppoſer à la dilatation de la vapeur enflammée, & la preſſion que l'on peut faire à la poudre même puiſque à proportion que la flamme eſt plus comprimée, & par conſéquent plus denſe, la propagation du feu eſt d' autant plus aiſée comme nous venons de l' obſerver. Au contraire à meſure que la poudre eſt plus comprimée la flamme pénétre plus difficilement, comme il arrive dans tous les combuſtibles qui, à choſes égales brulent plus lentement à meſure que leurs parties ſont plus étroitement liées enſemble. Ainſi la denſité de l' air qui comprime la flamme ſans comprimer les grains, facilite toujour la propagation du feu, à meſure qu'elle eſt plus grande; & cela arrive auſſi par la preſſion du fluide engendré quand il eſt retenu par des parois qui ne peuvent céder comme dans le fuſil pyropneumatique de M. le Chévalier D'ANTONI, au contraire quand on preſſe fortement

O la

pagation du feu plus ou moins prompte, ſuivant qu'elle s' oppoſe plus ou moins à la dilatation des parties enflammées de la vapeur & qu'elle l'oblige à réagir avec dautant plus de violence ſur la poudre; d'ailleurs elle n' eſt point la cauſe de la flamme de la poudre, non plus que de l' exploſion, comme le remarque M. MUSCHEMBROEK dans une note qu'il fait à des expériences des Académiciens de Florence, ſur la fumée dans le vuide, où il s' exprime en ces termes = *il paroît par cette expérience que la flamme & l'exploſion de la poudre ne dépendent point de la compreſſion de l' air* =.

L' expérience, ſur laquelle il ſe fonde,* eſt qu'aïant jetté quelques grains de poudre ſur un fer rouge dans le vuide, il ne ſe fit que une flamme bleuë: mais il ajoute que ſi on en jette pluſieurs enſemble, ils s'enflamment; font exploſion & briſent le vaiſſau.

REMARQUE

Puiſque la poudre peut s'enflammer dans le vuide, & ſe décompóſer, il eſt clair que la préſence de l' air, ou de quelqu'autre corp comprimant, n'eſt point néceſſaire pour produire ni la flamme, ni l'exploſion.

La flamme étant cauſée par cette propriété que les phlogiſtiques ont en général de ſe diſſiper, lorſqu'ils ont aquis le degré de chaleur néceſſaire pour les ſéparer des matiéres groſſiéres, auſquelles ils ſont unis.

Ne pourrai-t-on pas ſopçonner, que ce fut une eſpéce d' évaporation des parties plus volatiles agitées par un mouvement très-violent?

la poudre dans un tuïau ouvert, la preſſion ſur la flamme n'eſt pas plus grande, & par ſurcroit elle trouve plus de difficulté à pénétrer ce corp compacte: delà le plus de lenteur dans la propagation de la flamme.

9. C'eſt ce que l'on voit ſenſiblement dans les armes à feu; où le bouchon qui ſert pour arranger la poudre, & lui faire occuper un moindre eſpace de celui qu'elle garderait ſans ſon ſécours, s'oppoſe en même tems à la dilatation du fluide, lequel comprime par là la flamme de la poudre, qui a pris feu: or ſuivant que la preſſion retombe plus ſur l'une des deux circonſtances énoncées, les effets qui en réſultent ſont différens; car le bouchon étant pouſſé avec force le long de l'arme juſque contre la poudre ſans la reſſerrer de trop, ſert à empêcher la dilatation du fluide, lequel contraint celle de la flamme des premiers grains en feu, de ſorte qu'elle peut réagir avec d'autant plus d'intenſité ſur ceux qui reſtent, & par conſéquent

L'exploſion n'eſt autre choſe, que le changement que ſouffre l'air contenu dans la poudre au tems de l'inflammation; & l'on doit conſidérer trois différens états dans cette circoſtance, ſavoir celui de l'extréme condenſation où il eſt avant l'inflammation, l'état naturel qu'il doit aquerir avant de paſſer à celui de dilatation; & ce dernier enfin qu'il aquiert plus ou moins, ſuivant la plus grande quantité de chaleur qu'il l'affecte.

De la promptitude donc & de la véhémence, avec leſquelles ſe fait la ſucceſſion de ces états oppoſés dépand cette force ſurprenante de la poudre.

Il n'eſt pas ſurprenant que les vaiſſaux ſoient briſés dans l'expérience que propoſe le Célèbre M. MUSCHEMBROEK, puiſque les grains, en tombant ſur le fer rouge, trouvent tous un dégré de chaleur ſuffiſante pour les mettre en feu, & les décompoſer en même tems, ſans qu'il ſoit néceſſaire qu'un grain communique le feu à celui qui le ſuit, & par conſéquent cette quantité de fluide étant développée avec une ſimultanéité prodigieuſe, heurte rudement contre les parois du vaiſſau & le fait céder: pourque pareil effet puiſſe avoir lieu, il n'eſt pas néceſſaire qu'il ſe produiſe une quantité de fluide, laquelle étant condenſée, puiſſe être en équilibre avec l'atmoſphére, car il faut avoir égard à la dilatation que ſouffre le fluide dans cette circonſtance, & à la viteſſe avec laquelle il ſe développe, de ſorte qu'une même quantité de fluide développé plus ou moins ſimultanéement faira ſauter ou non le vaiſſau, dans lequel il ſe produit.

N. B. on me permettra de faire une application de ces réflexions en y rapprochant un phénoméne, qui ne manque pas d'arriver lorſque on

ſéquent la propagation du feu devient plus prompte, & plus facile: il en arrive le contraire lorſque le bouchon ſans être exact eſt trop réfoulé ſur la poudre, puiſque elle devient alors plus lente. La quantité abſoluë de poudre qui peut s'enflammer dans une arme donnée doit donc dépandre du rapport rélatif de ces deux circonſtances combinées enſemble: pour éclaircir encor davantage tout ce que nous venons de dire, il ne ſera pas hors de propos d'en faire une application pratique; elle nous eſt préſentée fort ſimple dans les piſtolets qui ont une chambre pour la poudre, & une ſupérieure pour la bâle, on eſt obligé d'endévider le canon pour les charger, parceque le diamêtre du trou, par lequel doit ſortir la bâle eſt un peu plus plus petit que celui de la bâle même, ce qui l'oblige à changer de configuration, & qui ſuppoſant un grand effort donne le tems à un plus grand développement de fluide, lequel par ſa denſité, nous le répéterons,

ne ſert pas les armes à feu avec toute la précaution néceſſaire: lors donc que dans quelque arme à feu que ce ſoit, on n'a pas ſoin de faire paſſer les bouchons contre la charge, ou que la bâle vient à être engagée plus haut qu'elle ne devrait être, & pour dire la choſe plus ſimplément enfin, ſi on vient à laiſſer un intervalle de quelque conſidération entre les parties de la charge, l'arme créve dans cet endroit, & c'eſt parceque une grande quantité de fluide étant développée, & venant à heurter contre cette réſiſtance, dont les parties ne peuvent céder avec une égale viteſſe, le fluide réagit ſur tout la partie de l'arme, dans laquelle il ſe trouve renfermé, & la flamme de même, de ſorte que toute la poudre qui reſte eſt enflammée à la fois, ce qui n'arrive pas ſi le fluide peut ſe dilater à proportion qu'il ſe développe, parceque alors la preſſion ſur la flamme reſtant à peu près la méme, la ſucceſſion de l'inflammation eſt plus uniforme. On ne trouvera pas mauvais que j'ajoute que la réſiſtance n'étant pas inſurmontable, c'eſt-à-dire que la partie de la charge, qui eſt engagée pouvant céder à la preſſion du fluide, il arrivera que ſuivant le plus ou moins de viteſſe du développement, l'arme crevera ou non; de ſorte qu'en emploïant deux quantités différentes de poudre, dont la proportion des Compoſans ſoit la même, & que la ſeule différence conſiſte en ce que l'une ſoit plus aiſée à ſe décompoſer que l'autre, ce qui dépand du grainage, de l'arrangement qu'on tache de lui procurer, & d'un certain rapport qu'elle a avec l'arme, comme

s' oppose à la dilatation de la flamme des grains qui sont déja en feu, & fait qu'elle agit avec plus d'intensité sur les autres, de sorte que les premiers développemens sont beaucoup moins prompts que ceux qui suivent: les carabines rayées nous fournissent encor un autre exemple, mais un autre détail serait en pure perte, vû que ce serait tomber dans des répétitions de ce que nous avons déja dit.

10. Pourqu'il s'ensuive donc le plus grand effort possible d'une charge donnée dans une arme à feu, il faut que le fluide se développe le plus simultanéement qu'il est possible, ce qui dépand de la combinaison de la vitesse dans la propagation du feu, & de son intensité: celles-ci dépandent d'un certain rapport entre la quantité de matiére de chaque grain, & les interstices qui sont entr' eux, & de celui de l'arme avec la charge (*a*).

11. On obtiendra le plus grand des efforts possibles, si on ajoute à ces conditions, que le mélange des composans la poudre soit tel que le phlogistique & l'acide nitreux soient

nous venons de le dire, celle-ci, quoiqu' en moindre de quantité, faira créver l'arme plus aisément que l'autre, qui est en plus grande quantité, & cela parceque la simultanéité du développement sera telle, qu'elle ne donnera pas le tems à l'obstacle supposé de se déranger, au lieu que l'autre lui communiquera plus successivement les dégrès de vitesse nécessaire pour entrer en mouvement.

On voit asses que je ne donne point ceci, comme une vérité absoluë dans tous les cas, sans qu'elle soit susceptible de différentes modifications, je me borne seulement à dire qu'il y en a ou cela doit arriver ainsi.

(*a*) Comme la force de la poudre dépand de la vitesse, avec laquelle le fluide se développe, & par conséquent de l'action plus ou moins vive de la flamme sur la substance des grains; il parait que toutes choses d'ailleurs égales, on doit préférer la poudre ronde à l'irréguliére, parceque elle offre à la flamme un passage toujour égal & uniforme, au lieu qu'il pent arriver que les surfaccs planes de la poudre irréguliére venant à s'arranger l'une contre l'autre empéchent la libre communication du feu: quant à la grosseur des grains, il est constant qu'il en est une qui est favorable à la simultaneité de l'inflammation, & c'est à une expérience éclairée à la déterminer.

Du reste quand on aura déterminé la quantité absoluë de fluide qui se développe d'une quantité de poudre donnée, ce sera un problême purement géométrique d'assigner les proportions des armes à feu.

ſoient combinés entr' eux dans une proportion convenable.

12. Pour ce qui regarde le détonnement, il eſt viſible, que puiſqu'il ſe fait par la colliſion & l'impulſion des parties de l' air nouvellement engendré contre celles de l' air extérieur qui ne peuvent céder avec une égale viteſſe; Mém. pr. pag. 4. §. 25. il diminuera d'autant plus que le milieu ſera plus rare, de même que le ſon, dont le plus ou moins d' intenſité dépand de la plus ou moins grande denſité du milieu, dans lequel on l'excite; donc le détonnement ceſſera lorſque cette cauſe n' aura plus lieu.

CHAPITRE II.

De la chaleur néceſſaire pour enflammer la Poudre dans le plein & dans le vuide.

13. APrès avoir déterminé comment l' air agit ſur la poudre &c. Je paſſerai à traiter la ſeconde queſtion que je me ſuis propoſé, ſavoir *quel eſt le dégré de chaleur néceſſaire pour l' enflammer*. Elle renferme pluſieurs cas différens qui me ſemblent mériter d' être traités ſéparément; & quoique un tel examen paraiſſe entiérement iſolé, & de peu de conſéquence, je me fais un devoir de prévenir mes Lecteurs en ce que je le crois digne de quelque attention, puiſque outre la nauvaute des phénoménes qu'il préſente, il peut être d'un grand ſecours pour découvrir les loix ſimples, ſuivant leſquelles ſe fait le grand jeu de cette force ſi étonnante, afin de ſimplifier la queſtion autant qu'il m' était poſſible, j'ai jugé à propos de commencer à fixer le dégré de chaleur néceſſaire pour diſpoſer chacun des compoſans à être décompoſé. J' ai fait enſuite les différentes combinaiſons, & j'ai déduit des réſultats que j' ai eu les vérités principales qui en découlent directement.

14. J'ai été obligé de faire usage de deux méthodes différentes dans le cours des expériences que j'ai cru nécessaires à ce sujet, & j'en détaillerai les raisons avant que je fasse la déscription des résultats : elles me paraissent d'ailleurs le plus comodes, & peut être des plus simples qu'on puisse imaginer, l'une est cependant préférable à l'autre dans des cas particuliers, suivant ce qu'on se propose principalement à examiner, nous n'en dirons pas davantage pour le présent.

15. Dans la prémiére il ne s'agissait que de mettre les substances dans des morceaux de flacon que je mettais ensuite à un bain d'huile, dans lequel était un thermomêtre dont la jambe formait un angle pour plus grande comodité, & la marche en était fort sensible; c'est par ce moyen que j'ai trouvé que le souffre soit lorsqu'il est seul, ou qu'il est mélé avec le salpêtre & le charbon, prend toujours feu à peu près au 593. dégré de Farenheit; & qu'un moment après la poudre détonne (*a*), mais il n'en a pas été de même de chacune des substances séparément, car le salpêtre ne pouvait pas se fondre non plus que le charbon s'enflammer, ni enfin un mélange des deux pouvait se décomposer par la chaleur qui lui était ainsi communiquée par l'huile bouillante.

16. Il faut remarquer que si on met la poudre quelque tems avant que l'huile ait aquis le dégrés de chaleur qui lui est nécessaire pour transmettre à la poudre celui qui lui faut pour prendre feu, ou que les dégrés de feu soient communiqués trop lentement, la poudre ne peut plus s'enflammer par ce moyen (*a*); il arrive la même chose à celle qu'on met dans des récipiens à long col, il faut pour lors employer un plus grand dégré de chaleur pour la faire déton-

(*a*) M. Ammontons a trouvé que la poudre s'enflamme au même dégré de chaleur qui fait fondre de la grenaille de plomb, Mém. de l'Académ. des Sciences de Paris pour l'année 1703. p. 247.

tonner: nous tacherons de déméler la raiſon de ces phénomènes quand il en ſera tems, & nous paſſerons en attendant à expoſer la ſeconde méthode dont j' ai fait uſage.

17. Je mettais les ſubſtances ſur une platine de fer blanc qui avait un enfoncement ſphérique de trois lignes environ de diamêtre en largeur & d' une demi en profondeur, elle était fixée dans une rainure pour plus de ſureté, & une petite lampe dont le lumignon était conſtamment de 88. fils de cotton fin était placée avec ſoin deſſous la cavité de la platine en même tems qu'on lachait un pendule, dont le nombre des vibrations était de 76. par minute; elles étaient contées tout haut par une perſonne pendant qu'une autre marquait le nombre que la prémiére prononçait au moment que je donnais le ſignal convenu.

18. Cette maniére de faire ces expériences quoique fort ſimple & exacte, n' eſt pas à beaucoup près auſſi déciſive que la prémiére, laquelle eſt plus uniforme, & la chaleur peut ſe tranſmettre avec plus *d' équabilité*; mais celle là eſt en défaut d'autre part en ce qu'elle n'a pas aſsès de chaleur pour répondre à l'enchainement des expériences néceſſaires nous n'oublierons cependant pas l'avantage eſſentiel qu'elle a ſur l'autre, qui eſt qu'elle donne des réſultats abſolus pendant que la ſeconde n' en donne que des rélatifs.

19. Je dois avvertir que cette ſeconde méthode exige nombre des circonſpections; je ne les paſſerai pas ſous ſilence pour épargner de peine à quelqu'un qui voudrait les réitérer.

1.°

Il faut tacher de procurer, autant qu'il eſt poſſible une égalité dans la flamme.

C' eſt

(*a*) La poudre grainée perd plus facilement encore de ſon inflammabilité par ce moyen que la poudre pilée.

C' eſt ce qu'on peut obtenir à peu près en laiſſant toujours la lampe allumée ſans toucher au lumignon, qu'on aura ſoin de ne pas éparpiller; le lin incombuſtible ſerait préférable, & le coton fin eſt auſſi d' un très-bon uſage en l'employant dans une lampe à éſprit de vin, car il ne peut y avoir alors d' équivoque, moyennant qu'on ait ſoin d'ajouter de l' alcohol à chaque expérience.

2.°

On aura ſoin d' arroſer la lampe de tems en tems avec de la nouvelle huile.

3.

La platine dont on ſe ſervira ſera grande, parceque ſans cette précaution le feu de la lampe ſe communiquera au ſouffre.

4.°

On la laiſſera de plus entiérement réfroidir après qu'on l' aura bien nettoyée en tous ſens.

5.°

Il ne faut ôter la lampe de deſſous la platine que, lorſque le ſouffre ſera tout brulé, & s' il entre du ſalpêtre dans le mélange, il ne ſera pas mal d'y mettre un charbon en feu pour décompoſer ce qui peut en être reſté.

6.°

Les ſubſtances doivent enfin être méſurées exactement, & pour obtenir quelque préciſion dans leur arrangement

ſur la platine on n' a qu'à paſſer une ratiſſoire ſur la cavité de la même : voici les réſultats des eſſais que j' ai fait avec cette méthode.

Expériences.

I.

Le ſouffre entra en fuſion à 5. vibrations fut entiérement fondu à 10., & s' enflamma à 15.

II.

Le ſalpêtre commença ſe fondre à 25. vibrations, & fut tout en fuſion à 50.

III.

Le charbon commença à prendre feu à 36. vibrations, & fut tout en feu à 50.

IV.

Le ſouffre combiné avec le ſalpêtre, parties égales, commença à ſe fondre à 12. vibrations, s'enflamma réguliérement entre 15. & 20. étant entiérement fondu, & à 25. la flamme changea de couleur, & devint blanchatre, ce qui me fit appercevoir que le ſalpêtre était décompoſé par le ſouffre, en effet aïant examiné le reſſidu je trouvai qu'une partie du ſalpêtre avait été réellement décompoſée. J'obſervais auſſi dans cette occaſion que ſi on ôte la flamme de deſſous la platine auſſitôt que le ſouffre a pris feu, le même brule entiérement ſans que le ſalpêtre ſe décompoſe pour autant, la même choſe ne manque pas d'arriver

ſi on met le feu avec un charbon rouge au ſouffre qu'on a mélé avec du ſalpêtre.

Dans cette expérience les irrégularités dans l'inflammation du ſouffre dépandaient probablement de la diſtribution plus ou moins uniforme des deux ſubſtances.

V.

Le ſouffre mélé à doſes égales avec le charbon ſe fondit à 15. vibrations, s'enflamma à 18.; on vit du charbon en feu à 25. & à 35. tout le mélange fut éteint. Il eſt bon d'obſerver que le charbon ne parait en feu que pendant que le ſouffre l'eſt, à moins qu'il ne ſoit bien léger. J'ai été obligé de donner un réſultat mitoyen à cauſe des variations qu'il y a eu dans l'inflammation du ſouffre.

V I.

Un mélange de 4. parties de ſalpêtre & une de charbon détonna à 37. vibrations.

V I I.

Un autre de 4. de ſalpêtre ſur une de ſouffre, & une de charbon détonna à 25. vibrations le ſouffre aïant pris feu à 22.

Aprés avoir réitéré avec ſoin cette expérience aïant vû qu'il y avait preſque toujours des différences dans l'inflammation du ſouffre, ce qui en cauſait quelques unes dans la détonnation du ſalpêtre & du charbon, j'ai jugé plus convenable d'employer de la poudre pilée, dans laquelle les compoſans ſont plus uniformément diſtribué en vertu de la longue trituration qu'on lui fait eſſuyer.

La

VIII.

La poudre pilée de 5. parties de salpêtre sur une de souffre & une de charbon prit feu à 18. vibrations, le souffre aïant pris feu à 15.

I X.

Celle qui est faite avec 6. parties de salpêtre, une de souffre, & une de charbon détonna à 17. vibrations, le souffre aïant de même pris feu à 15.

X.

Une autre enfin de de 7. parties de salpêtre sur une de souffre, & une de charbon se décomposa à 16. vibrations, le souffre s' étant constamment enflammé à 15.

Lorsque la poudre est grainée l' inflammation du souffre est retardée, de sorte que si le grainage est fort gros il lui faut environ un tiers de plus de tems pour prendre feu qu'il ne lui en faut lorsqu'elle est pilée, ce qui fait aussi que la décomposition totale de la poudre qui suit de près l' inflammation du souffre est beaucoup moins prompte.

X I.

La poudre ne laisse pas de se décomposer entiérement quand même l'on ôte la lampe de dessous la platine aussitôt que le souffre a pris feu, & la détonnation se fait quand le souffre est presque tout brulé (*a*).

 La

(*a*) Cela arrive aussi à d' autres combustibles; si par exemple on met de la poudre dans l' esprit de vin rectifié qu'on enflamme ensuite, elle ne prend feu que, lorsque celuici est entiérement dissipé; il en est de même si on met le feu à un linge mouillé dans de l' alcohol, il ne prend feu que quand le même a fini de bruler.

X I I.

La poudre fulminante commença à entrer en fusion a 30. vibrations, & détonna à 32. étant toute fondue à ce tems.

20. De tout ce que nous avons dit ci-devant, nous pouvons déduire les vérités suivantes.

Que la flamme du souffre est suffisante (*a*) pour enflammer la poudre, mais qu'il faut que le souffre soit presque entiérement détruit par la combustion, les expériences (VIII. IX. X.) concourent à le confirmer, car l'on voit qu'à mesure qu'il y a plus de souffre dans la poudre, il se passe un plus long tems entre l'inflammation de celui-ci, & la décomposition de la même poudre.

21. La comparaison des résultats (I. IV. VI.) sert à nous faire connaître qu'il faut un plus grand dégré de chaleur pour que le souffre puisse détonner avec le salpêtre qu'il ne lui en faut pour s'enflammer seulement. 2.° qu'il en faut un plus grand encor, pour que le salpêtre soit décomposé par le charbon.

22. La flamme du souffre a cependant assès d'intensité pour mettre en feu le charbon, pour faire entrer le salpêtre en fusion, & pour faciliter la décomposition des deux, c'est donc là la raison, pour laquelle la poudre s'enflamme à 20. 25. vibrations quoique le charbon ne puisse s'enflammer qu'à 38., & que le salpêtre ne soit entiérement fondu qu'à 50.

23. Nous avons vu dans l'expérience (VII.) que le souffre ne prenait pas feu réguliérement après un même nombre de vibrations, & que la décomposition totale des sub-

(*a*) Pour se convaincre avec beaucoup de facilité que la flamme du souffre peut faire décomposer le charbon avec le salpêtre, on n'a qu'à projetter de la poudre dans du souffre enflammé.

ſubſtances ſouffrait auſſi les mêmes altérations, la même choſe arrive auſſi dans la poudre grainée à meſure que le grainage eſt plus gros, comme j' ai fait obſerver après l' exp. (x.) ce qui ſert à nous confirmer que c' eſt en vertu de la flamme du ſouffre que le ſalpêtre & le charbon peuvent ſe décompoſer.

24. Le phénoméne aſsès ſingulier dont j'ai fait mention (16.) ſavoir que la poudre miſe dans des flacons à long col ne pouvait plus s' enflammer non ſeulement au même dégrés de chaleur, auquel elle prenait feu dans des vaſes ouverts, mais même à 7. dégrés de plus, ſemble nous fournir une nouvelle preuve qu'il faut moins de chaleur pour enflammer le ſouffre, qu'il ne lui en faut pour ſe décompoſer avec le ſalpêtre, parceque on ſait d'ailleurs qu'il ne peut prendre feu dans des récipiens à long col.

25. Nous avons de même rendu compte d'un autre phénoméne, qui arrive lorſqu'on fait eſſuyer à la poudre un feu par dégrés pendant long tems, comme quand on met le verre qui la contient dans l'huile en même tems qu'on expoſe celle-ci à un feu lent; il faut pour lors un plus grand dégré de chaleur pour l'enflammer, qu'il ne lui en faut lorſque on lui communique le feu avec plus de vivacité, & ceci a encor plus facilement lieu dans la poudre grainée que dans la pilée: mais il eſt très-plauſible de penſer que cela dépand de ce que le ſouffre ſe diſſipe en pure perte à cette chaleur, puiſque la communication en eſt faite fort lentement par l' huile, & le ſouffre en reçoit aſsès pour ſe ſublimer entiérement avant qu'il ait pu en aquerir autant qu'il lui en faut pour pouvoir s' enflammer; une circonſtance que je n'ai pas indiqué, & que j'ai d'ailleurs obſervé dans ces occaſions ſert à étayer la conjecture que je viens de propoſer, & à la doüer même (on me paſſera l' expreſſion) d'une lueur d' évidence, c' eſt que lorſqu'on laiſſe ainſi la poudre expoſée pendant long

tems,

tems, on lui voit changer de couleur, & elle devient d'un noir très-foncé.

26. Cela posé, on voit clairement que la décomposition totale de la poudre est plus difficile, parceque il faut un plus grand dégré de chaleur pour faire détonner le salpêtre avec le charbon (VI.) qu'il n'en faut pour enflammer le souffre (I.), & par conséquent pour décomposer la poudre qui en contient encor au moment que le dégrés de chaleur communiqué peut suffire pour le mettre en feu.

27. Dans la poudre pilée finement cela n'a pas lieu de la même maniére, & n'arrive pas si aisément, car comme elle forme une espèce de masse, & que le nombre des surfaces est très-fort diminué, la sublimation du souffre ne peut pas être si prompte, ni si facile, de sorte qu'il en reste encore suffisamment pour s'enflammer, & pour causer l'entiére décomposition de la poudre, au tems que le mélange a reçu un dégré de chaleur égal à celui qui fait que le souffre prend feu.

28. La poudre perd de son inflammabilité dans le vuide, de sorte que le dégré de chaleur, qui peut l'enflammer dans l'air libre, n'est pas suffisant à en procurer la décomposition dans les récipiens dont on a pompé l'air; Mrs. HUIGENS, & MUSCHEMBROEK ont fait aussi cette observation. Cette différence ne dépandrait-elle pas aussi de la sublimation du souffre? ceci me parait être d'autant plus fondé, que le vuide sert à la favoriser (*a*), & que, suivant ce que nous avons vu ci-devant, non seulement le salpêtre se décompose plus aisément avec le souffre qu'avec le charbon, mais sa flamme sert à accélérer la détonnation du charbon avec le salpêtre.

29. Si

(*a*) J'ai observé que dans ces occasions il s'éléve une poudre jaunatre qui se cole aux parais du vaissau, M. BOYLE le dit de même, or cette poudre ne peut être que du souffre sublimé.

29. Si on ne fait pas essuyer un dégré de chaleur violent, & avec promptitude à un mélange de souffre & de salpêtre dans des récipiens vuides, on ne peut parvenir à le faire décomposer, parceque le souffre se sublime bientôt, & le salpêtre ensuite quoique fondu ne peut plus détonner faute de phlogistique. Tout ceci est appuyé aux expériences que j'ai fait sur ces mélanges dans le vuide, par lesquelles j'ai trouvé, outre ce que je viens de dire, que la poudre qui contient du souffre prend feu à peu près au même dégré de chaleur que celle qui n'en a point ce qui sert à confirmer ce qui a été dit précédemment.

30. Nous pourrons donc rendre aisément raison de ce, que quelques Savants, n'aïant pas pris ces précautions, n'ont pas vu la poudre s'enflammer dans le vuide, & l'ont en conséquence niée; mais c'est probablement parceque où ils ont employé un mélange sans charbon, ou qu'aïant fait usage de bonne poudre, ils ont donné un feu trop lent & moindre de celui qui est en ce cas nécessaire pour faire détonner le salpêtre avec le charbon.

31. Nous finirons donc ce Chapitre par conclure.

1.°

Que plusieurs circonstances contribuent à modifier l'inflammabilité de la poudre, savoir le plus ou moins de souffre; le mélange plus ou moins intimément broyé; le grainage plus ou moins gros.

2.°

Que l'inflammation est très-prompte aussi si le souffre peut s'enflammer comme il arrive en plein air.

Qu'elle

3.°

Qu'elle ſera encor augmentée ſi le ſouffre eſt en petite quantité aumoment qu'il a aquis le dégré de chaleur néceſſaire pour s' enflammer.

4.°

Que le ſouffre ne pouvant s'enflammer, il faut en ce cas employer néceſſairement un dégrés de chaleur plus grand, & égal à celui qui peut faire décompoſer le ſouffre avec le ſalpêtre.

5.°

Que ſi le ſouffre ſe ſublime avant qu'il ait aquis le dégrés de chaleur qu'il lui faut pour prendre feu, ſoit à cauſe du trop de ſurface, ſoit par la lenteur dans la communication du feu, ſoit par le défaut de preſſion, ou ſoit enfin par quelque autre circonſtance, ou par le concours de pluſieurs à la fois, on ne peut ſe diſpenſer d'employer un dégré de chaleur encore plus grand du précédent pour faire détonner la poudre.

32. J' ai taché d' expoſer avec toute la préciſion poſſible les inductions principales, que nous fourniſſeut les réſultats des expériences dont j' ai donné le détail: j' aurais pu en tirer un plus grand nombre, & propoſer même quelques conjectures qui, ſans avoir jamais été démenties par les faits ſemblaïent au contraire parfaitement d'accord avec quelques cas particuliers, mais ne m' aïant pas été poſſible d' obvier aux irrégularités qui les accompagnaient quelque fois à cauſe de la complication des circonſtances, dont on ne pouvait les délivrer; j' ai jugé plus convenable de conſerver trop de reſerve, plutôt que de tomber dans le défaut

faut opposé; d'ailleurs je ſuis aſsès porté à croire que ce que nous avons dit ſur ce ſujet fournit des lumiéres ſuffiſantes pour ſervir de guide à la pratique, & pour nous tirer de l'eſclavage d'une *routine machinale* (a), par laquelle nous nous aſſujettiſſons ſans connoiſſance de cauſe à ce que nos Prédéceſſeurs ont jugé à propos d'établir: s'ils avaient fait de même nous ſerions bien plus reculés en certains genres que nous ne ſommes! Leur exemple nous met donc en droit de pouſſer plus loin nos Recherches ſur les choſes naturelles, & de ſoumettre même ce qu'ils ont fait à l'Analiſe la plus ſcrupuleuſe. C'eſt par là qu'on parvient à découvrir la vérité.

33. Les Recherches que nous avons avons fait pour déterminer la chaleur qui peut enflammer la poudre, peuvent auſſi nous fournir des lumiéres ſur le développement des principes actifs, dont dépandent les effets qu'elle peut produire. La théorie chimique que M. MACQUER en a donné dans ſon excellent Cours ſatisfait amplement pour ce qui regarde les actions inteſtines, & les jeux d'affinité des ſubſtances, & nous renvoyons avec plaiſir nos Lecteurs à cet ouvrage digne de ſon Illuſtre Auteur, nous reſervant ſeulement de rapprocher tout ce qui peut ſervir à donner une idée exacte des cauſes, pour ainſi dire, ſecondaires qui concourent au développement de l'air, en vertu du-

(a) Bien des gens ont une idée aſsès obſcure des termes de *théorie* & de *pratique*. *L'application phiſique des principes généraux, & abſtraits à des cas particuliers* eſt ce, qu'on doit entendre par la première. *L'action où les opérations purement mécaniques qui ſont néceſſaires pour cela*, ſont ce que nous entendons par *routine*, or ceux qui n'ont qu'un repertoire de cas particuliers ſans enchainement & ſans ſiſtéme ne ſavent pas la *pratique*, & cette claſſe comprend le plus grand nombre des hommes dans toutes les profeſſions. Ceux qui outre les principes fondamentaux ſavent encore tout ce qui eſt eſſentiel pour en faire uſagé, ceux la ſavent à proprement parler la véritable *pratique*, & ne manqueront tout au plus que de la *routine* néceſſaire pour opérer avec plus de facilité. *La pratique eſt donc l'art propre d'une ſcïence*, & à leur tour *les principes généraux & abſtraits ſont les ſciences des arts.*

quel on voit arriver les effets les plus ſinguliers; nous ne nous arrêterons pas à former des conjectures pour décider ſi on eſt plus fondé à croire que l'air préexiſte dans la poudre, ou s'il eſt produit à l'occaſion de l'inflammation par le nouvel arrangement que prennent entr'elles les parties primitives, ou les élémens des compoſans.

34. Il eſt viſible en premier lieu qu'il faut néceſſairement un dégré de chaleur tel, qui puiſſe fondre le ſalpêtre pour que la détonnation de la poudre ait lieu. 2.° que puiſque la flamme du ſouffre eſt capable de produire cet effet, toutes les fois qu'elle ne pourra pas s'exciter, la détonnation ſera retardée: mais on ſait par les principes chimiques que dans cette occaſion le phlogiſtique du ſouffre & du charbon ſe ſépare de ſa baſe pour ſe diſſiper avec l'acide nitreux, c'eſt donc dans le tems de ces actions & réactions des ſubſtances que ſe développe le fluide élaſtique de la poudre.

35. Il eſt donc clair que le développement du fluide ſera d'autant plus accéléré que le ſalpêtre aura de facilité à ſe décompoſer avec le phlogiſtique, & il n'eſt pas moins évident que la décompoſition ſera d'autant plus prompte que l'acide nitreux trouvera moins de difficulté à attaquer le phlogiſtique: or l'acide nitreux attaque avec plus de facilité le phlogiſtique à meſure qu'il ſe trouve moins fortement uni à ſa baſe, ce qui arrive en effet dans le charbon où l'union n'eſt pas ſi forte que dans le ſouffre; delà la raiſon pourquoi le ſalpêtre détonne plus aiſément avec le charbon qu'avec le ſouffre, & encor plus facilement avec le foye de ſouffre qu'avec le charbon même. Mém. ſecond p. 137. 145. §§. 43. 64. car le phlogiſtique a plus d'adhérance avec l'acide vitriolique qu'il n'en a avec les terres, mais il en a plus avec celleci qu'avec le tartre vitriolé.

36. Quelques expériences que j'ai fait ſur la poudre fulminante, ſervent à confirmer ce que nous venons de dire,

&

& ce que j' ai avancé ailleurs Mém. second p. 145. §. 64. on me permettra d' en donner un précis.

EXPÉRIENCE.

Je fis du foye de souffre que je pilai finément avant qu'il fut tout-à-fait froid pour qu' il ne put pas contracter si aisément l' humidité de l'air, & je le mélai en doses convenables avec du salpêtre, après que le tout parut intimément broyé, j' en mis une partie sur une pêle que j' exposai au feu, & il se fit une détonnation semblable à celle de la poudre fulminante commune.

EXPÉRIENCE.

Au lieu de broyer intimément les substances ensemble dans ce second essai, je me suis contenté de fair tomber du salpêtre froid sur du foye de souffre liquéfié, ce qui produisit une fulmination un peu moindre à la vérité que celle de la précédente & de la commune, mais infiniment supérieure à la déflagration de la poudre à canon.

37. Une troisiéme expérience que j'ai fait sur cette poudre, sert à nous convaincre que le dégré de chaleur contribue en quelque façon à la plus grande simultanéité du développement du fluide, & par conséquent au plus grand effort, & au détonnement plus violent, je l' ai dit en passant dans mon second Mém. p. 144. §. 63.

EXPÉRIENCE.

Si on mêle le salpêtre entiérement fondu avec de foye du souffre liquéfié on obtient une détonnation qui surpasse toutes les autres.

Je ne diſſimulerai point que le peu de ſoin que j' ai eu quelquefois à prendre les précautions indiſpenſables pour me garantir des dangers qu'on peut courir dans toutes ces expériences m'a couté un peu cher, je dis ceci pour avertir ceux qui voudront les repeter de n'en négliger aucune.

38. L' action du feu ſur la poudre eſt encore une circonſtance qui favoriſe la décompoſition de l' acide nitreux & du phlogiſtique ſuivant que la quantité en eſt plus ou moins étenduë; & par conſéquent l' inflammation ſera d'autant plus ſimultanée que la flamme de celle qui a pris feu ſera plus *reverbérée* ſur celle qui reſte par la réſiſtance de l' air ou de quelque autre corp comprimant comme nous l' avons démontré dans le premier Chapitre, or comme le développement ſe fait avec la même viteſſe que la décompoſition des ſubſtances donc le développement ſera d' autant plus ſimultané que la reverbération de la flamme ſera plus grande.

39. L'action plus ou moins grande de la poudre dépand de l' élaſticité ou de la denſité du fluide, qui diminueront à meſure que les obſtacles qu'elle doit ſurmonter ſeront plus aiſé à être derangés, & qu'ils céderont avec plus de facilité, d'où il s' enſuit que, ſi le fluide peut ſe répandre dans un trop grand eſpace pendant que les développemens ſe font, l' effort en deviendra très-fort diminué, parceque l' action de la flamme ſera moins vive, & par conſéquent la ſucceſſion des développemens beaucoup plus lente.

Il réſulte de ceci que dans les cas dont nous avons parlé dans les notes du premier Chapitre (ſavoir lorſque la poudre brule avec promptitude, & que le fluide ſe dilate moins) les effets ſont incomparablement ſupérieurs à ceux qui ont lieu dans des circonſtances contraires.

40. D' ailleurs outre tout ce que nous avons dit juſq'ici pour faire voir que la différence des effets des mêmes

quan-

quantités & qualités de poudre dépand du plus ou moins de viteſſe, avec laquelle le fluide ſe développe, rien ne peut nous fournir une preuve plus complete que les expériences que je donnerai dans le Chapitre ſuivant, par leſquelles je trouve que les quantités de fluide développé ſont toujours dans la raiſon des quantités de poudre qu'on a employé, & qui ſe ſont décompoſées (*a*).

CHAPITRE III.

Des quantités rélatives de fluide développé de différentes quantités de la même poudre.

41. C'Eſt un principe aſsès communement reçu que la quantité de fluide qui ſe développe de la poudre eſt proportionelle aux quantités de la poudre décompoſée; on ſait de plus que le ſouffre & le charbon n'en fourniſſent point: nous ſommes donc fondés à penſer que le principe actif de ce fluide eſt contenu dans le ſalpêtre, & qu'il en eſt développé par l'action des autres ſubſtances, rélativement à la proportion qu'il y a entr'elles; quoique je n'aïe jamais douté de ce principe. J'ai cependant voulu m'en convaincre par l'expérience, & on ne trouvera pas mauvais que j'en donne ici un détail.

EXPÉRIENCE.

Un tuïau de baromètre de la hauteur de 36. pouces, & recourbé dans ſa partie ſupérieure communiquait à un flacon

(*a*) J'ai cru néceſſaire d'ajouter cette expreſſion parceque ſouvent il arrive que toute la poudre qu'on emploit ne prend pas feu, & cela particuliérement dans les armes à feu, car les obſtacles ne peuvent pas réſiſter au delà d'un certain terme, & il faut ou qu'ils cédent, ou que l'arme créve. Il n'en eſt pas de même ici, où le feu extérieur èchauffe uniformément tous les grains ſans qu'il ſoit beſoin que le feu ſe communique ſucceſſivement, de ſorte qu'elle s'embraſe toute, & je ſuis trés-perſuadé que les effets en ſont plus grands proportion gardée.

con dont le col était de la longueur environ d' un pied, j'en maſtiquai la jonction avec de la cire d'Eſpagne pour plus grande commodité (a); l'extremité du tuïau était de forme conique, & l' embouchure avait la même figure, mais elle était renverſée afin que le flacon fut toujours placé de la même maniére: un tuïau de verre hermétiquement ajuſté tenait à la courbure de celui du baromètre, & par cette voie l' on pompait l' air de la machine, l' extrémité inférieure du baromètre trempait dans une fiole de mercure, & une planche, à laquelle on adaptait une graduation mouvante, ſoutenait le baromètre, & mettait l' obſervateur à l' abris de tout danger; la quantité de vuide était toujours la même, ſavoir de p. 26. $\frac{3}{4}$ environ, & pour plus grande précaution, je ne cherchai point à le pouſſer auſſi loin que j' aurais pû, car il reſtait à peu près 8. ligne d' air dans le cas ou j' avais fait monter le mercure à la hauteur ſuſdite, & qui eſt celui où il y avait plus de vuide: je dois de plus avertir, qu'après avoir fait avec la même ſtation autant d'expériences qu'il était poſſible, & dont le terme était fixé par la deſcente du mercure juſqu'au nivau, je changeai la ſtation, & je les repetai de la même maniére ſur celle-ci, il eſt vrai qu'à meſure qu'il reſtait plus d' air la ſuite diminuait de termes: j'avais meſuré, & choiſi enfin pluſieurs flacons précisément de la même capacité pour ſubſtituer en cas de beſoin: je commençai donc par bruler des quantités de poudre, qui étaient entr'elles dans le rapport des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c., & le mercure était à la hauter de 26. $\frac{3}{4}$ pouces; je repetai 6. fois cette expérience avec la même ſtation en conſervant le même rapport entre les quantités, & je trouvai, que les dépreſſions moyennes dans l' inflammation ſuivaient auſſi la même proportion, de même que le fluide refroidi,

(a) On pouvait de cette façon mettre la poudre ſans altérer les capacités, & en cas que le flacon eut ſouffert on pouvait en ſubſtituer aiſément un de ceux que j'avais meſuré.

ſavoir à peu près celle des nombres ci-deſſus, aïant enſuite fait la ſtation du mercure à 26 pouces & demi, & enſuite à 26 j'en eus les mêmes réſultats ; je me ſuis ſervi enſuite du rapport d'1, 2, 4, 8, &c. pour les quantités de poudre que j'emploïais, & les dépreſſions y répondirent.

42 Enfin il eſt très-conſtant que la force où l'élaſticité de pluſieurs quantités d'une même qualité de poudre, & les quantités de fluide permanent ſont proportionelles aux quantités de poudre emploïées, ſavoir ſi elle eſt double, triple, quadruple &c. il ſe dévéloppe 2, 3, 4 fois autant de fluide, & les effets ſont doubles, triples, quadruples &c. pourvû que la preſſion ſoit la même.

43 Ce que nous avons vû ci-devant ſert à nous faire connaître les quantités réelles du fluide après le dévéloppement fait & après ſa parfaite condenſation rélativement aux quantités de poudre emploïée, & l'élaſticité de ce même fluide à l'occaſion du dévéloppement : or en faiſant une fouſtraction, l'on aura la ſomme de toutes les dilatations, c'eſt-à-dire celle de l'air juſqu'au moment de l'inflammation celle qu'il ſouffre encore dans cette occaſion, & celle du fluide qui ſe dévéloppe, & comme l'air réſſidu eſt conſtant, on peut déterminer à peu près ſa dilatation dans le tems de l'inflammation par la comparaiſon de pluſieurs réſultats. En effet lorſque le fluide eſt réfroidi, la quantité d'air naturel, que l'on a laiſſé dans la machine, agit toûjours de même, puiſque la quantité en eſt ſuppoſée égale, au lieu que cette action eſt différemment altérée par la préſence du feu, & je l'ai conſidérée ſous différens points de vüe ſuivant que la quantité de poudre que je brulais dans la même capacité était plus ou moins grande ; mais la dilatation de l'air qui reſtait dans la machine étant donnée par l'obſervation, on n'a qu'à la déduire, & ce qui reſte comprend ſeulement la raréfaction que ſouffre le fluide, & celle qu'eſſuïent les parties de l'air qui ont un attouchement im-

médiat,

médiat avec les parties enflammées, de ſorte qu'on pourrait ſans erreur groſſiére les conſidérer comme faiſant partie du fluide qui ſe produit; ou ſi on veut l'apprécier on peut à mon avis poſer la dilatation totale de l'air à celle du fluide comme 2, 3. car il eſt bon d'obſerver que le fluide eſt entiérement confondu dans les parties enflammées de la poudre pendant qu'à l'air la comunication de la chaleur ne ſe fait que par couches; quoique cette eſtimation paraiſſe tout-à-fait arbitraire, je ſuis aſſés porté à croire qu'elle ne s'écarte pas trop de la véritable, mais nous n'oublierons pas de dire que dans les armes à feu elle ſera moindre encore, & que l'on peut même la négliger entiérement, vû la petite quantité qu'il s'en trouve eu égard à la quantité de fluide qui ſe produit, & il eſt même très-plauſible de penſer que la plus grande partie en eſt chaſſée par la lumiére du moment que le feu ſe comunique, mais après tout la détermination n'étant pas trop grande les erreurs ne ſauraient être de conſéquence.

44 Ces expériences nous fourniſſent encore quelque autre induction; en prémier lieu que les dilatations de la même quantité d'air qui reſte dans la machine à compter du moment qu'on applique le feu juſqu'à celui où la poudre s'enflamme, ſont toûjours les mêmes quoique on varie les quantites de poudre; la quantité de feu qu'on applique extérieurement n'apporte donc aucun changement a cette circonſtance, c'eſt ce qui eſt aſſés clair moyennant que la quantité d'air ſoit conſtante, & que l'arrangement de la poudre ſoit à peu prés le même, car s'il faut un dégré de chaleur fixe pour enflammer la poudre, ce même dégré ne peut auſſi dilater l'air que juſqu'à un point déterminé, ſauf qu'on ne faſſe des grandes différences qui dépandent pour lors de ce que nous avons déja dit §. 25, d'ailleurs le feu étant vif le différences évanouiſſent, & le plus ou le moins n'en fait que dans les viteſſes des effets. En ſecond lieu le fluide

fluide à l'occasion de l'inflammation occupe un espace à peu prés double de celui qu'il occupe étant condensé. Nous avons vû Mém. 2.^{d} p. 125. §. 12. que la densité du fluide dans la poudre est environ de 2128, donc en doublant ce nombre nous aurons 4256 pour la dilatation dans l'inflammation: dilatation qui est conforme autant qu'on peut prétendre avec celle que AMMONTONS & BELIDOR ont assigné.

45 De la méthode que je viens de proposer il est aisé de construire une echelle de la force du fluide de la poudre lorsque la pression est constante; j'en exposerai maintenant un autre où cette pression va en augmentant, & qui n'exigeant pas à chaque résultat un nouvel appareil me parait plus commode: j'ai donné la déscription de cette machine dans le Chapitre premier p. 98. §. 5. & pour l'employer avec plus de succés à l'usage dont il question j'ai ajoûté une regle graduée qui pouvait se mouvoir dans une coulisse, & qui depuis la surface supérieure du vif argent cotoyant le long tuïau servait à en indiquer la marche, il ne restait plus que 8 à 9 lignes d'air dans les deux parties de la machine, chaque boule contenait un grain de la meilleure poudre grainée, & j'avais soin de laisser parfaitement condenser le fluide avant que passer à l'inflammation de la poudre qui était dans la suivante: par le nombre des vibrations d'un pendule je voyais à peu prés de combien la pression augmentée pouvait acroitre l'inflammabilité; nous passerons sous silence les autres précautions pour ne pas tomber dans des répetitions, on n'a qu'à se rapeller tout ce que nous avons dit à l'endroit cité.

46 Les résultats de ces expériences différent de ceux de l'autre parceque nous avons supprimé des conditions, & que nous en avons introduit des autres, elles s'accordent neanmoins dans celles qui sont communes, en effet nous commençons par observer que les quantités de fluide engendré sont toûjours les mêmes; il n'en est pas ainsi des variations du mercure

au moment de l'inflammation , car l'intenſité du feu de la poudre devenant toûjours plus grande raréfie d'avantage le fluide & l'air qui comprime , & de la comparaiſon de pluſieurs termes ſucceſſifs de différentes ſuites il réſulte que la force eſt à peu prés en raiſon des preſſions : nous voyons auſſi que la poudre aquiert plus aiſément les dégrés de chaleur qui lui faut pour s'enflammer , car le nombre des vibrations décroit dans une progreſſion dont les différences vont toûjours en augmentant , mais c'eſt une conſéquence de ce que nous avons déja fait obſerver.

CHAPITRE IV.

Méthode dont je me ſuis ſervi pour meſurer l'intenſité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire: Réflexions ſur les vapeurs du Souffre, de la Poudre, des Méches & des Chandelles allumées &c. & de la méthode dont ont fait uſage dans les expériences ſur ce ſujet.

47 LEs ſentimens des Savans ſemblent être partagés ſur ce ſujet, mais cette diverſité n'eſt dans le fond qu'apparente , & dépand de ce que l'énoncé dans leur manière d'apprécier l'intenſité du feu de la poudre eſt trop vague , car je ne ſaurai penſer qu'il put y avoir lieu à différentes opinions ſur une choſe qui peut être aſſujettie à l'expérience , & je ſuis très-perſuadé que la queſtion propoſée ſous un énoncé rigoureux faira diſparaître toute contradiction : quant à moi je ne diſſimulerai point que je crois que cette intenſité eſt ſujette à baucoup de modifications , & qu'elle eſt plus ou moins grande: 1.° Suivant que on en augmente , ou qu'on en diminue la quantité dans le même eſpace où l'on l'enflamme : 2.° Suivant que les compoſans ſont entr'eux

dans un tel rapport, plûtôt que dans tel autre: 3.° Enfin que l'ordre ou l'arrangement qu'on lui procure peut aussi y avoir quelque part &c. & je ne doute point qu'on ne puisse l'augmenter à l'infini.

48 Ce qui est certain d'ailleurs, & que l'expérience nous apprend, c'est que le fluide en se dévéloppant occupe un espace à peu près double de celui où il est réduit lorsqu'il est condensé §. 44, donc la chaleur de la poudre dans une arme à feu ne s'écartera pas baucoup de celleci; & cette donnée est assés exacte pour les problémes ballistiques.

49 La complication des circonstances qui concourent à rendre l'intensité du feu d'une même dose de poudre plus ou moins active, & les moyens pour parvenir à la déterminer au juste, même rélativement, ont été d'assés puissans motifs pour me contenter des essais dont je fairai le rapport & que je reconnais encore fort éloignés de cette précision qui servant à donner des nouvelles lumiéres suffit quelque fois pour bien dévélopper un sujet, & quelqu'autres à former un enchainement heureux entre plusieurs, ce que je puis dire de nauvau ne faira que l'enrichir & fournir à quelqu'un qui ait plus de loisir de nouvelles vües, & des applications plus complettes à l'avantage de la société en leur épargnant des tentatives inutiles; c'est à cet effet que j'exposerai même ce que j'ai tenté & qui ne m'est pas réussi.

50 Je me suis servi en prémier lieu du termométre dont j'ai fait mention dans le second Chapitre de ce Mémoire p. 106. §. 15. mais à la troisiéme cuillerée de poudre (dont chacune était de demi once, & dont la composition était de trois parties de salpêtre une de souffre & une de charbon le tout humecté) le mercure étant bouillant le verre se fondit: au lieu de projetter ainsi la poudre dans un petit creuset j'ai préféré de substituer une fusée de la même composition que j'ai mis dans une presse, un ter-

mométre était ſoutenu par un pied qui pouvait être baiſſé ou élevé à l'aide d'une vis ſans fin, afin que la boule fut toûjours expoſée autant que faire ſe pouvait à la même quantité de feu, mais à peine en fut il brulé un tiers que le verre fut fondu; les aïant enſuite fait conſtruire ouverts ils n'eurent pas un meilleur ſort: j'abandonnai donc l'uſage des termométres, & je ne fus pas plus heureux en employant le pyrométre, car je ne pouvais pas aſſujettir tellement les circonſtances pour répondre à peu prés de leur identité.

51 Me voyant ainſi contraint de réjetter abſolument tous les moyens connus par leſquels je pouvais me flatter d'obtenir quelque exactitude j'ai tenté de trouver quelque nouvelle méthode pour me procurer au moins des limites, mais c'eſt ce que je n'ai pû faire non plus avec la préciſion que j'aurais déſiré; celle dont je me ſuis ſervi eſt neanmoins aſſés commode & ſimple, & peut être, j'oſe l'eſpérer, pourra-t-elle être employée une autre fois avec plus de ſuccés.

52 Elle conſiſte en ce que je mis ſucceſſivement des lames de différens métaux fort minces & de même poids, dans un creuſet dans lequel je projettai des doſes de poudre de demi once chacune, & de la compoſition déja énoncée; j'étais obligé de mettre le feu à la premiére, & lorſqu'elle touchait à ſa fin j'en projettais une autre, laquelle était de même ſuivie par une troiſiéme & ainſi de ſuite. Les réſultats que j'en ai eu ſont les ſuivans.

1.°

Le plomb & l'étain ſe fondirent à la fin de la premiere doſe.

Le

2.°

Le zinc s'enflamma à la moitié environ de la ſeconde.

3.°

Le cuivre jaune, & une monnoie ſe fondirent & formerent un bouton avant la fin de la quatriéme.

4.°

L'argent fut vitrifié à la ſixiéme projection.

5.

Le cuivre rouge commença ſe fondre lorſque la ſixiéme doſe touchait à ſa fin & fut entiérement fondu avant que la ſeptiéme eut ceſſé de fuſer.

6.°

La limaille de fer parut former un amas informe à la dixiéme doſe, mais le fond du creuſet fut alors percé par un trou, d'où la flamme ſortait avec une grande impétuoſité, ſon diamétre était de trois lignes, & ſa figure paraîſſait tout-à-fait uniforme & circulaire.

53 Quoique le dégrés de chaleur ou le feu actuel ſoit le principal agent dans ces expériences j'avais cependant aſſés de fondement pour croire, que le ſouffre y contribuait auſſi conſidérablement, c'eſt pourquoi j'ai voulu les réitérer de la même maniére en employant un mêlange où il n'en entrait point, & j'ai en effet trouvé quelque différence dans la facilité de la fuſion, principalement pour la limaille de fer,

fer, & le cuivre car ils tardaient plus long-tems; au contraire quelque autre tel que la monnoie se fondait plus vite, & l'argent était de même plus facilement vitrifié.

54 Je ne me contentai pas de ces deux procédés je voulus voir encor si je pouvais obtenir les mêmes effets pas la simple communication de la chaleur, & je mis pour cela les lames dans un creuset suspendu au dessus d'un petit bassin dans lequel je faisais les projection du mélange; on sent assés que je fus obbligé d'employer beaucoup plus de poudre, mais malgrés mes soins celui de la limaille de fer ne put plus avoir lieu; je dois cependant avertir que dans ce cas les effets sont plus prompts si on emploit un mélange sans souffre.

55 Je fis enfin une derniére tentative en mettant dans un petit pot (dont l'ouverture était beaucoup plus petite que le ventre & la base) une pâte faite avec du salpêtre du charbon & un peu d'huile d'olive (a), cette composition enflammée j'en réverberai la flamme avec un soufflet & une lame d'argent plus épaisse encore des précédentes fut vitrifiée à la seconde dose, qui était de même que la prémiere d'une demi once comme j'avais toûjours fait.

56 Tout ce que je viens d'exposer sur l'intensité du feu de la poudre sert à nous faire voir qu'elle peut être augmentée en différentes maniéres jusqu'à l'infini, & nous n'en devons être nullement étonnés, car en considérant toutes les circonstances dont cette flamme est toûjours accompagnée nous voyons distinctement tous les caractéres du feu le plus violent; en effet la vitesse ou la rapidité avec laquelle les parties inflammables se communiquent le feu; la grande résistance que lui opposent en conséquence les parties de

l'air

(a) Il est à propos de faire observer que cette pate doit être exposée pendant quelque tems à un feu lent, pour qu'une partie de l'huile puisse s'évaporer, car il y en a toûjours de reste.

l'air qui en en empechant une trop grande dilatation servent à en augmenter la densité, le dévéloppement successif du fluide par lequel son mouvement est accéléré, sont tous des signes non équivoques de l'activité qui le caractérise; & c'est précisément à cause de la rapidité prodigieuse avec laquelle ses parties inflammables se détruisent que le corps ambiens ne peuvent aquérir si aisément un si grand dégré de chaleur.

57 Voila un précis de mes recherches sur ce sujet, on pourrait assûrément le traiter plus métodiquement & lui donner baucoup plus d'étendue; mais les soins & le tems qu'exigent de tels essais peuvent être employés plus avantageusement par quelque Artiste ingenieux qui soit dans le cas d'en tirer parti; car quoique la chose ne présente en elle-même au prémier coup d'œil rien d'extraordinaire, elle pourra peut-être par cette même raison fournir dans le détail des circonstances dignes d' attention: je n' avance ceci qu'autant que me le permettent les observations passagéres que j'ai pû faire sur les faits particuliers que j'ai exposé; d'ailleurs personne que je sache ne s' est encor attaché jusqu'ici à faire un tel examen, & si l'exactitude dans le procédé ne répond pas à la grandeur du sujet c'est parceque en prémier lieu il ne tient que par incident à celui que j'ai eu en vûe, & en second lieu pour les motifs dont j'ai rendu compte; il me suffit pour le présent d'en avoir donné le prémier un essai, & je passerai maintenant à exposer les phénoménes que j'ai observé sur quelques sortes de vapeurs qui m'ont fait douter de l'étendue qu'on donne à la doctrine de l'absorbtion de l'air.

58 L'objet que nous allons donc prendre à tache annonce l'intéret qu'on doit avoir à le suivre de prés: il s'agit d'une doctrine qui sert a rendre raison de baucoup de phénoménes surprenans, dont la solution serait obscure & peut-être inconnue sans son secours, elle est d'ailleurs géné-

généralement adoptée, & j'ai même lieu de penser qu'on y a recours avec un peu trop de facilité : l'assertion des Savans les plus distingués, & les expériences sur lesquelles ils se sont appuyés & dont ils nous ont donné le détail paraissent nous mettre en droit d'y puiser les explications les plus heureuses & les plus faciles, malgré tous ces avantages j'ai observé que toutes les vapeurs, auxquelles on a attribué la propriété d'absorber & de fixer l'élasticité de l'air, n'en sont pas effectivement doüées, & il m'a paru d'entrevoir que la méthode dont on a fait usage dans cette espéce d'annalyse est sujette à quelques inconveniens, de la viennent les équivoques qu'on peut avoir pris : c'est ce qui m'a engagé à dire quelque chose sur ce sujet, me reservant à le traiter à part une autre fois avec plus d'étendue, en attendant quelques réflexions & des procédés plus circonspects nous mettront en état de juger de la foi que nous devons prêter à ces sortes d'expériences : je ne prétens pas refuter toute absorbtion, mais seulement faire voir qu'il y a des vapeurs qui pourraient sembler en être la cause quoiqu'elles ne le soient pas en effet.

59 Les procédés, que tous les Auteurs plus respectables (*a*) ont réguliérement suivi pour faire les expériences sur l'absorbtion de l'air, sont ceux, de la combustion, de la distillation, de la fermentation des substances, ou des effervescences que produisaient leur mixtion ; l'eau est le milieu qui servait à intercepter toute communication entre l'air commun des vaissaux, & celui de déhors ; dans celles qui se faisaient par la combustion & la fermentation (*b*), on plaçait les matiéres toutes enflammées ou en fermentation

(*a*) Halles, Muschembroeck, Hauksbe'e, &c.

(*b*) Telles que les méches ou les chandelles allumées : le saffran de Mars fait avec la limaille de fer le souffre & l'eau ; le sel volatil d'ammoniac fait avec la chaux, &c. car on fait qu'à peine ces substances sont mélées il s'éleve aussitôt des vapeurs, &c.

tion ſous les récipiens, de ſorte que la quantité d'air abſolu qui s'y trouvait était moindre de la quantité qu'il y en aurait eu ſi on les avait enflammé par quelque moyen dans le vaiſſeau même, toute communication étant ôtée, ou ſi on les eut avec cette précaution diſpoſées à la fermentation.

60 Une autre circonſtance dont je n'ai pas encor pû m'aſſûrer parfaitement, mais que j'ai aſſés de fondement pour ne devoir pas diſſimuler, puiſqu'elle peut toute ſeule rendre douteux les réſultats des expériences, c'eſt qu'il m'a paru de voir que l'air étant beaucoup raréfié peut s'inſinuer dans les parties de l'eau, de façon que bien des fois l'abſorbtion ferait l'ouvrage du milieu qui doit intercepter: quoique on n'ignore pas que l'eau peut ſe charger d'air on ſait auſſi qu'elle ne peut en recevoir qu'une quantité déterminée, mais j'ai eu occaſion d'obſerver comme je l'ai dit que cette vérité peut ſouffrir des reſtrictions.

61 Voici l'expérience qui m'a donné lieu de penſer ainſi.

EXPÉRIENCE.

J'ai plongé dans un vaiſſau de la hauteur de deux pieds environ un tuïau de verre de ſix pieds de long, & du diamétre aumoins de ſix lignes auquel on avait hermétiquement ajoûté un flacon, ou qui était garni d'une boule ſouffllée dans le même verre & qu'on avait précédement approché du feu pour en chaſſer une partie de l'air avec plus d'aiſance; dès que la machine avait aquis la température & que l'eau était montée à une ſtation fixe dans le tuïau je marquais avec un fil ciré le point d'élévation, & comme on ne pouvait pas approcher de la boule, même à quelque diſtance ſans cauſer quelque raréfaction à l'air qui y était contenu, & faire par conſéquent baiſſer l'eau dans le tube, je laiſſais derechef repoſer la machine pendant quelque tems en m'en éloignant comme auparavant, & j'examinais enſuite ſi le fil répondait avec préciſion au nivau de l'eau, toutes ces

précautions étant prises j'approchais une flamme par dégrés de la boule, & auffitôt qu'elle était un peu échauffée & qu'elle ne risquait plus de se fendre je lui ai fait subir une chaleur telle qui fit précipiter la dépression de l'eau, laquelle cependant n'atteignit point à l'extremité du tuïau, afin que l'air n'en fut point chassé: je m'écartai pour lors de la machine de même que j'avais fait auparavant & j'ai vû quelque tems après l'eau s'élever dans le tube au-dessus de la marque que j'avais fait.

62 Cette expérience quoique très-simple exige baucoup de circonspections & de soin, outre ceux que nous avons déja suggerés il est bon d'ajoûter, qu'il faut la faire dans une chambre où les variations dans l'atmosphére ne soient pas si sensibles, il n'y faut pas du feu, ni qu'elle soit fort ventilée, on ne s'y arretera qu'autant qu'il est indispensable, il faut y laisser le flambeau allumé jusqu'à ce qu'on ait fini d'observer; on doit enfin avoir un barométre & un termométre fort exacts pour plus grande sûreté; cependant malgré toutes ces précautions, elle ne réüssit pas toûjours, apparemment à cause de la facilité de l'eau à se mouvoir & que souvent les variations peuvent se compenser, elle a neanmoins réüssi vingt fois pour une; avec tout cela je me reserve à faire d'ultérieures observations.

63 Ce que nous venons de dire suffit pour nous convaincre que cette méthode est incertaine & même insuffisante, pour faire ces sortes d'expériences, puisque elle peut aisément induire en erreur, car ne sachant pas de combien l'air a été raréfié dans le tems qu'on a intercepté la libre communication entre celui qui est enfermé dans les vaissaux & l'extérieur, ignorant la quantité qui peut s'en être insinué dans l'eau, on ne peut dire avec fondement qu'il y ait eu d'absorbtion: quelques substances que j'ai soumis à un procédés plus simple, & qui réduites en vapeurs, n'ont point absorbé d'air, quoique traitées de la maniére qui a été adopté

jusqu'

jusqu'ici, passent généralement pour avoir une telle propriété, à servi à me confirmer dans les soupçons que j'avais formé.

64 Je commencerai par rendre compte de la maniére dont je m'y suis pris pour obtenir le même effet en les assujéttissant à un procédé délivré de tout équivoque, ce détail sera suivi de celui des substances que j'y ai soumis, & de ce qui en est résulté.

65 Je mettais les substances qui devaient être enflammées dans des flacons par le moyen d'un bout de tuïau de communication, qui était hermétiquement attaché à côté de leurs cols, & dont l'extremité était jointe de la même maniére à un long tuïau courbé en forme de baromètre qui contenait du mercure & servait à en faire les fonctions; suivant l'espéce de flamme qui devait s'y exciter, & le moyen que je devais employer à cet effet, je laissais tout l'air dans la capacité où j'en faisais sortir une partie, en me servant du feu comme j'ai déja dit; l'ouverture latérale par laquelle j'avais mis les substances étant bouchée avec de la cire d'Espagne, j'excitais la flamme ou avec le miroir ardent comme pour le souffre, ou avec une flamme, je conservais ensuite ces machines en les examinant plusieurs fois le jour, & j'avais mis au même endroit un baromètre, un termométre & un flacon fermé, & portant à son extremité un tuïau recourbé avec du vif argent ce qui faisait une même machine & dans le fond un baroscope.

66 Comme je ne pouvais pas entreprendre un travail de longue haleine, je me suis contenté de choisir le souffre, la poudre & de la méche pour voir ce qui leur arrivait; j'enflammai le souffre avec une lentille, & j'ai vû de même qu'Olaus Borrichius une fumée qui passait au travers des porres du verre à l'endroit où tombent les rayons rassemblés par le foyer, mais le mercure ne fit plus aucun mouvement depuis que l'air du flacon fut refroidi; dans celui où j'avais mis deux grains de poudre j'avais environ

quattre pouces de moins d'air, je la mis en feu à l'aide de la flamme d'un flambeau, & après une demi heure environ aïant marqué le point d'élévation, le vif argent fut immobile, jusqu'à ce qu'il arrriva des variations dans l'atmosphére; la même chose est succedée aux méches.

67 Je n'en donne pas d'avantage pour le présent faute de tems: quant à ce qui regarde les chandelles allumées, M.R le D.R CIGNA notre ami & savant confrére rapportera les expériences que nous en avons fait; si mes devoirs me le permettent je me propose de faire des nouvelles recherches sur ce sujet, de renouveller les expériences qui semblent plus rigoureuses, & particuliérement le Chap. VI. de la Statique des Végétaux, digne ouvragre du Célébre feu M.R HALLES.

68 La délicatesse du sujet ne me permet pas d'ailleurs de dissimuler, que l'on ne saurait être assés sur ses gardes pour obvier aux moindre petits inconveniens, car ils deviennent très-essentiels : en effet avec quelle facilité l'air ne se rarefie-t-il pas? & son élasticité augmentée fait qu'on ne peut pas s'appercevoir que la quantité absolue dans la même capacité est diminuée, ces réflexions posées on conviendra de la facilité qu'on peut avoir à se tromper.

CHAPITRE V.

Examen de la Poudre sans Souffre.

69 CE Chapitre est particuliérement déstiné à quelques réflexions sur l'usage que l'on peut faire dans la pratique de la poudre sans souffre. J'avais déja établi dans mon second Mémoire quelques uns des principes sur lesquels elles sont appuyées, je pense qu'en y joignant ce qu'on lit dans le Chap. 2.d & 3.e de celuici nous pourrons être en état d'apprécier d'avance les effets qu'on en doit attendre, sans se jetter aveu-

aveuglément dans des essais toûjours couteux & trop incertains quand ils ne sont pas appuyés sur la théorie. Je dois au reste avertir ici que l'Auteur de l'article *feux artificiels* dans l'Encyclopédie est le prémier qui ait proposé d'appliquer cette poudre à l'usage de l'Artillerie; je l'ignorais quand j'écrivis mon second Mémoire, & je n'ai pû en faire mention que dans une note: je suis au reste bien éloigné de lui accorder tous les avantages que cet Auteur semble en attendre.

70 Il suit à la vérité de ce que nous avons dit jusqu'à présent qu'on peut avec une moindre quantité de cette poudre que de la commune chasser un projectile jusqu'à une distance donnée, ce qui peut faire une différence assés considérable dans la consommation de la poudre, & plus encore dans la dépence, puisque toute choses d'ailleurs égales cette espéce de poudre est moins dispendieuse. Si cependant on réflechit sur la cause de la plus grande force de cette poudre on verra bientôt qu'il résulte de cet avantage même des inconveniens assés considérables.

71 La force de la poudre en général ne peut dépandre que de la quantité du fluide qui s'en dévéloppe, & de la plus grande vitesse & simultanéité avec lequel se fait ce dévéloppement. Chap. 2.d §. 39. 40. On voit assés que la supériorité de cette poudre sur l'autre ne peut dans le cas dont il s'agit être l'effet d'une plus grande quantité de fluide, puisque le salpêtre se trouve dans cette charge en moindre quantité que dans l'autre: elle dépand donc absolument de la plus grande vitesse avec laquelle se fait la propagation du feu & le dévéloppement du fluide Chap. 2.d §. 38. ensorte que dans le cas d'un effet constant les quantités des différentes poudres doivent en quelque sorte être en raison inverse de cette même vitesse.

71 Cela posé le dérangement dans la direction ou dans le pointement d'une piéce d'Artillerie ne pouvant être occasioné

ſioné que par l'action du fluide élaſtique qui fait par ſon dévéloppement reculer le canon dans une ligne différente de la direction qu'on lui avait donné, ſoit à cauſe de l'irrégularité de la piéce plus riche de métal d'un côté que de l'autre, ſoit par l'imperfection des roues, de la platte forme ou de quelque autre cauſe ſemblable : il eſt aiſé de voir que ces dérangemens ſeront plus conſidérables dans le cas d'un dévéloppement plus prompt.

73 En effet en ſuppoſant que l'action des deux charges, ou la viteſſe qu'elles impriment au boulet ſoit la même il eſt évident que ſi le canon ne ſouffrait pas dans ſon recul la réſiſtance du frottement, il eſt évident dis-je que les dérangemens dans la direction ſeraient abſolument les mêmes : mais il n'en va pas ainſi ſi nous voulons faire attention à ces réſiſtances, car l'expreſſion de l'élément de la viteſſe avec laquelle la piéce eſt pouſſée en arriére n'eſt plus alors proportionel à la preſſion qu'exerce ſur elle le fluide élaſtique, mais à cette même preſſion diminuée d'une autre quantité qu'on peut ſuppoſer proportionelle à la viteſſe du recul à chaque inſtant : or ſi dans cetre hipotéſe on cherche au moyen du calcul intégral l'expreſſion générale de cette viteſſe, en faiſant, comme la nature du Problème le requiert, que cette viteſſe fut la même quand le fluide élaſtique ceſſe d'agir ſur le canon, fuſſe la même dis-je quelle que ſoit l'élaſticité du fluide, ou ce qui revient au même qu'on ſuppoſa que cette viteſſe doit être la même ſi on n'a pas égard aux réſiſtances, on la trouvera toûjours plus petite quand l'élaſticité eſt moindre (*a*) d'où il eſt aiſé de conclure

(*a*) Une réflexion bien ſimple pourra aider à concevoir ſans calcul cette vérité. (Fig. I. Pl. I.) Quelle que ſoit la loi du dévéloppement du fluide élaſtique il eſt viſible que les viteſſes des boulets chaſſés par les deux différentes charges pourront à chaque inſtant être réprélentées par celle de deux corps qui déſcendraient librement le long de deux courbes quelconques A G, A Q; & que puiſqu'on ſuppoſe les deux portées égales

clure que le recul & par conſéquent le dérangement du pointement ſera toûjours plus grand pour une poudre plus violente quoique les portées ſoient égales.

74 Il eſt évident que ce que nous venons de dire peut également s'appliquer au cas où le bouchon introduit dans le canon avec violence fait une plus grande réſiſtance au fluide, un autre inconvenient fort conſidérable dont nous avons fait mention plus haut, Chap. 1.r p. 102. en note c'eſt le péril de faire crever plus facilement les piéces en ſe ſervant de la poudre ſans ſouffre, je me contente pour cela de renvoyer à l'endroit cité.

75 Je paſſe à décrire les défauts de cette poudre qui ne dépandent pas comme ceux dont nous venons de parler de la force avec laquelle elle ſe dévéloppe, mais plûtot de la nature des principes dont elle eſt compoſée. Pluſieurs expériences que j'ai fait ſur cette poudre à différentes repriſes & par des méthodes diverſes m'ont convaincu qu'elle s'enflamme baucoup plus difficilement que la poudre commune, M.r le Marquis BIRAGUE dont la ſagacité & ſurtout l'amour

égales ces courbes doivent être terminées par l'horizontale BQ. Il eſt encor évident que ſi l'on fait abſtraction du frottement, les viteſſes du canon dans ſon recul à chaque inſtant ſeront proportionelles à celle des boulets, & par conſéquent encor à celles des corps qui déſcendent dans AG & AQ. Cela poſé pour trouver quels changemens le frottement peut cauſer aux viteſſes des reculs dans ces deux cas. Imaginons que ce ſont ces corps eux-mêmes qui éprouvent cette réſiſtance dans leurs mouvement ſelon AG & AQ, & ſuppoſons pour un moment qu'ils aïent une viteſſe égale aux points D, E (ſuppoſition qui eſt vraie en effet pour le point A où la viteſſe des deux corps eſt nulle) il eſt clair en tirant là ce infiniment proche de CE que les réſiſtances qu'éprouvent ces corps étant proportionelles aux viteſſes & par conſéquent égales en DE elles agiront plus ſur le corp qui ſe meut ſelon AQ, puiſque $Ee > Dd$. Donc la viteſſe du corps qui ſe meut dans AQ ſera toûjours plus petite dans le cas du frottement, que celle qui ſe meut dans AG quand tous les deux ſeront parvenus à une horizontale quelconque BQ; & par conſéquent quand l'action des fluides ceſſera entiérement ſur le canon, la viteſſe du recul ſera plus petite quand la charge ſera plus lente à ſe décompoſer, même dans le cas où ces reculs feraient égaux en faiſant abſtraction de ces réſiſtances, & c'eſt là à peu près le cas que nous avons ſuppoſé des deux portées égales.

l'amour des ſciences ſont aſſès connus a été préſent à pluſieurs des eſſais que j'ai fait ſur cette matiére. Il eſt vrai qu'on pourrait en quelque ſorte remedier à cet inconvénient en ſe ſervant d'un charbon plus léger, mais il eſt facile de s'appercevoir qu'étant dans ce cas néceſſaire d'employer une plus grande quantité de charbon pour procurer l'entiére décompoſition du ſalpêtre, cette poudre perdrait alors beaucoup de cette force, qui fait ſon unique mérite. On déduit facilement de là que la force de la poudre eſt toutes choſes d'ailleurs égales toûjours proportionelle à la plus prompte décompoſition du ſalpêtre, & par conſéquent à la difficulté qu'elle a de prendre feu (*b*).

76 On ſait combien le grainage eſt néceſſaire à la poudre en général pour l'uſage de faction & celleci le ſoutient difficilement, car quoique on ait différentes méthode de la rendre propre au grainage elles ſont toutes impraticables en grand (*c*).

77 En-

(*b*) Comme le charbon n'eſt compoſé que par l'union d'une ſubſtance inflammable à des parties terreſtres, il s'enſuit naturellement que la différence dans la qualité du charbon conſiſte dans le rapport où ces ſubſtances ſe trouvent combinées entr'elles: cela poſé il en doit réſulter des différences dans l'inflammabilité & dans l'action qu'il peut exercer ſur le ſalpêtre, d'où il eſt évident qu'il doit s'en trouver une eſpéce, telle où ces deux propriétés ſoient les plus grandes poſſibles; & ce ſerait celle qui ſervirait avec plus de ſuccès dans les armes à feu, l'expérience peut l'aſſigner avec facilité; d'ailleurs il n'eſt pas moins aiſé de déterminer par ce moyen celle qu'on doit préférer dans les différens uſages qu'on ſe propoſe. La quantité de charbon néceſſaire pour procurer la totale décompoſition d'une quantité de ſalpétre doit donc être déterminée rélativement à ſa qualité.

(*c*) Casimir Simienowicz dans ſon Grand Art de l'Artillerie rapporte la méthode dont les Payſans Coſaque font uſage pour conſtruire la poudre. Elle conſiſte à mettre les doſes convenables de ſalpêtre, de ſouffre & de charbon dans un pôt avec de l'eau qu'on fait bouillir juſqu'à ce que les ſubſtances ſoient épaiſſies par l'évaporation de l'eau; ils paſſent enſuite cette pâte au tamis & la réduiſent en grains. Cette manœuvre il faut l'avouer eſt fort commode, parceque on peut faire de la poudre en fort peu de tems & on peut épargner les moulins, de même qu'un nombre d'opérations qui ſont indiſpenſables dans celle qu'on fabrique communément, mais elle eſt ſujette à des grands inconveniens: car on ne peut la faire en prémier lieu qu'en petite quantité,

77 Enfin cette poudre attire d'avantage l'humidité de l'air inconvenient très-considérable fans doute, puifqu'elle eft par là incapable d'être confervée long-tems dans les magafins. D'ailleurs elle falit & ronge extrémement les armes à feu, parcequ'il réfulte de fa décompofition un alkali fixe qu'on fait être un des corrofifs les plus violens, & qui lorfqu'il s'humecte à l'air, ronge avec promptitude & avec une grande facilité les métaux.

78 Il ferait donc néceffaire d'ajoûter à la poudre fans fouffre une fubftance, qui dans le tems de fa décompofition, fe faifit de cet alkali & forma avec lui une fubftance neutre: or c'eft précifément une des fonctions du fouffre dans la poudre commune, qui fert auffi à la délivrer par fa vifquofité de l'inconvenient d'attirer fi facilement l'humidité de l'air, ce qui comme nous l'avons vû plus haut eft un des défauts les plus effentiels de la poudre fans fouffre.

79 Répiloguons enfin ici les raifons que nous venons de rapporter pour préférer la poudre dont on fe fert aujourd'hui à celle

& en fecond, parceque par une manœuvre telle que nous venons de l'expofer, la poudre que l'on fait eft baucoup moins forte, & la manufacture en eft plus dangereufe, outre qu'elle requiert plus de foins & de circonfpection de la part des Ouvriers, & je crois auffi que la main d'œuvre en ferait plus couteufe; fans entrer cependant dans des telles difcuffions, je donnerai un détail des moyens dont je me fuis fervi pour délivrer cette méthode de fes inconveniens, laiffant à part celui de la manufacturer en grand, puifque la chofe eft abfolument incompatible. Prémierement au lieu d'eau j'ai une fois fubftitué du vinaigre, & une autre fois de l'urine, parceque principalement le vinaigre ne fait pas une diffolution intime du falpêtre comme fait l'eau, & attaque plûtôt le charbon, de maniére que le mélange eft plus exact & uniforme, car les fubftances ne peuvent pas fe féparer fi aifément : le vinaigre enfuite contenant du phlogiftique loin de délayer celui du charbon contribue en quelque façon à le rendre meilleur ; la même chofe à lieu avec l'urine. Mr. le Chev. de Robilant Major d' Artillerie & Infpecteur Général des Mines de S. M. dont le mérite, le favoir & l' affiduité avec laquelle il cultive les différens genres des fciences font également reconnus, m'a communiqué des vües qu' il avait formé fur ce fujet, qui ne pourraient être que fort utiles & inftructives, & il eft porté à croire qu' on peut fe fervir avec fuccès du vinaigre pour humecter la poudre lorfqu'on la manufacture dans les moulins ; quant à moi

celle que nous venons d'examiner, & ſoumettons-les d'un coup d'œil au jugement du Lecteur éclairé & impartial.

80 En prémier lieu le ſouffre par la facilité qu'il a de s'enflammer la rend plus propre à l'uſage de toutes les armes à feu, & ſi ſon dévéloppement eſt moins prompt c'eſt moins un défaut dans preſque toutes les circonſtances qu'un avantage réel puiſque nous avons fait voir qu'un dévéloppement trop ſimultané ruine facilement les armes à feu, & rend les pointemens trop incertains; il empeche outre cela l'action de l'alkali fixe, ſur les métaux dont elles ſont faites, en formant avec lui lors de la décompoſition du tartre vitriolé (*d*); enfin le ſouffre par ſa viſquoſité rend le grainage facile à ſe faire & à ſe ſoutenir, & empeche la poudre d'attirer trop facilement l'humidité de l'air, ce qui la rend ſupérieure à la poudre ſans ſouffre, même pour l'uſage des mines où les autres inconveniens de cette derniére pourraient être conſidérés comme des avantages réels.

à moi je conviens non ſeulement avec lui pour le vinaigre en particulier, mais j'opine pour tous les liquides qui contiennent du phlogiſtique & dont la partie aqueuſe peut s'évaporer avec facilité; quoique en puiſſe dire quelque Praticien par *routine*. 2. Je ne voulus pas me ſervir d'un trop grand dégré de chaleur dans l'évaporation, parceque la ſéparation des deux compoſans aurait été par là facilitée, & je mis à cet effet une fois le pôt au bain marie de 60 à 70 dégré de Réaumur; & une autre le petit chaudron fut mis à feu nud avec un termométre qui en touchait le fond &c.; 3. je broyai auſſi ſans diſcontinuer les ſubſtances avec une éſpatule de bois, & lorſque la matière était bien épaiſſie, je levais le chaudron du feu en continuant à broyer juſqu'à ce que la pâte me paruſſe ſuffiſamment déſſechée & propre au grainage, je l'étendis pour lors ſur une planche & je la paſſai enſuite au tamis; les poudres ſans ſouffre que j'ai fait de cette façon étaient pour le moins auſſi fortes que celle que j'ai fait en la broyant ſur une pierre comme dit Mr. PERRINET d'Orval, où en la faiſant piler pendant dix heures dans un mortier, elle avait même l'avantage de ſoutenir mieux ſon grainage, & je ne me ſuis apperçu d'aucune différence aſsès conſidérable, quant à cette propriété, entre celleci & la commune; mais nous en reviendrons toûjours à conclure, que cela ne pouvant ſe faire qu'en détail, & eu égard à quelques réflexions que nous avons déja fait, elle ne parait pas propre à l'uſage ordinaire.

(*d*) Loin d'obvier avec cette poudre à l'évaſement des lumiéres comme je l'avais ſoupçonné. Mém. ſecond p. 145. §. 57. on le facilite, ainſi que nous venons de le voir.

JOHAN-

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De frigore ex evaporatione, & affinibus phoenomenis nonnullis.

De thermometrorum variis liquoribus madentium refrigeratione ex inflato vento nonnulla in superiore Tomo protulimus (*a*) eorum nescii, quae jamdudum celeberrimus Cullen hoc in argumento praestiterat; qui non modo egregiis experimentis doctrinam hanc ornavit, verum etiam hujusmodi phoenomenorum causam ingeniose est assecutus. Hujus ego luculentissimam, quam postea cognovimus, theoriam (*b*) cum nostris experimentis contuli; & nonnulla in his, cum minus forte accurate peracta, tum novam in hac disquisitione viam patefactam esse intellexi. Quare opportunum duxi in eadem experimenta operam diligentiorem impendere, quaeque mihi observare contigit, ea hic exponenda adgredior.

1. Observavit clarissimus Cullen non aqua solum (quod a Merano fuerat animadversum (*c*)) sed & aliis liquoribus, qui cum ambiente ad eumdem caloris gradum compositi essent, perfusa thermometri bulla, liquorem in thermometro deprimi, & tamdiu deprimi, quamdiu thermometri bulla exsiccata sit, tumque, si iterum madefiat, adhuc inferius descendere (*d*), eoque magis, caeteris paribus, quo magis liquor, quo bulla perfunditur, volatilis est (*e*), & descen-

(*a*) In comment. pag. 20. 21.
(*b*) In specimin. observ. physic. & litterariar. Societ. Edimburg. edit. anno 1756. tom. 2. pag. 145. quam differt. gallic. primum vertit. Cl. Roux in lib. cui tit. *Recherches historiques & critiques sur le refroidissement des liqueurs*. Egregius hic liber sub finem anni 1759. nobis demum notus fuit cum sub initium ejusdem anni specimina nostra edita fuissent.
(*c*) In differt. de Glacie edit. 1749.
(*d*) Recherches pag. 97. & sequent.
(*e*) Ibid. pag. 99. 100. 101.

descensum majorem esse in vacuo, quam in aperto aëre; ex quibus non immerito conclusit liquoris thermometrici descensum ex evaporatione repetendum esse, eamque non solum vento accelerari, & augeri (*f*), sed & in rariori aëre majorem esse, cum ibidem liquor thermometri magis deprimatur (*g*).

2. Qua tamen in re exceptionem hanc laudatus Auctor adnotavit, quod acida mineralia *concentrata*, quibus thermometrum madefit, non modo liquorem in tubo non deprimerent, quinimmo valde elevarent; idque ex *concentrati* acidi cum humido aëreo calefactione repetendum existimavit (*h*), cum observaverit eadem acida duplo aquae diluta contrarium effectum praestitisse (*i*); quae quidem Cl. Viri sententia experimento a nobis allato confirmari videtur: observavimus namque oleum tartari *per deliquium*, quod nec humidum aëreum absorbere, nec nisi difficillime correptam aquam per vapores dimittere potest, thermometro nullam mutationem induxisse. Equidem narravimus olea tum expressa, tum stillatitia thermometri liquorem ad majorem altitudinem elevare; at postquam in CULLEN experimentis olea etiam stillatitia (*k*) liquoris thermometrici descensum praestitisse novimus, repetitis majori diligentia experimentis, & sensibilioribus thermometris adhibitis (*l*) experti revera fuimus ab oleis quoque essentialibus liquorem thermometricum deprimi, minus tamen, quam ab alio quovis liquore

(*f*) Si humida thermometri bulla vento ejusdem temperaturæ exponeretur liquorem in tubo deprimi docuerat olim MUSSCHEMBROECK *essai de physique* §. 962. quæ jam ab anno 1739. gallico sermone conversa, & edita fuerant.

(*g*) Recherches pag. 104. 105.

(*h*) Ibidem pag. 102.

(*i*) Ibidem loco cit. fere majus frigus quam aquam excitasse; non vacavit explorare, an minus dilutum eumdem effectum producturum esset pag. 102.

(*k*) Recherches pag. 100.

(*l*) Thermometro aëreo CULLEN usus est pag. 99.

quore (ut laudatus Auctor adverterat), olea autem expressa vix ullam mutationem parere, maximeque dubitandum esse ne alias observata elevatio, tum adhibiti olei *essentialis* vetustati, tum alicui, ex ejus, qui follem agitat, propinquitate communicato calori, adscribenda sit (*m*), ut propterea expressa olea, quae nihil evaporant (*n*) thermometrum non immutent, quod cum CULLEN theoria egregie consentit.

3. Caeterum calorem thermometri acido minerali aspersi ex absorpto humido aëreo produci multa confirmant. Et primo quidem, ut GOULDIUS ostendit, acida *concentrata* in vasis apertis aëri exposita, pondere augentur (*o*), quod ponderis incrementum non aliunde, quam ex absorpto humido atmospherico repeti potest; & quemadmodum pondus paullatim minus augescit, prout humido atmospherico eadem acida saturantur, ac tandem omnino augeri desinit, ita immersa thermometra in acida concentrata majorem in his, quam in ambientibus corporibus calorem ostendunt, qui tamen paullatim imminuitur, ut tandem ambientium corporum calori exaequetur, quod facile est experiri. Acida demum mineralia eo magis intra datum tempus pondere augentur, quo ampliorem habent superficiem aëri expositam (*p*); ita oleum vitrioli, quod in vase cylindrico aperto quatuor tantum gradibus immersum thermometrum calefaciebat, educto thermometro, ut jam per amplam bullae thermometricae superficiem adhaerens oleum ad aërem

(*m*) Thermometrum spirit. vin. aceto, lacte, aqua aspersum refrigerari donec bulla exsiccata sit, contra aspersum oleo olivarum, aut lini calefieri, se observasse affirmat Anonimus ad Auctorem *Du London Kronikle*, & prioris phoenomeni causam perspicuam esse, nempe evaporationem, alterius obscuram. Vid. *Journal Etranger Janvier* 1761. *Nouvelles d'Angleterre* §. 8. *pag.* 110.

(*n*) Diutissime aëri exposita ponderis jacturam ex evaporatione nullam patiuntur. Vid. *Encyclopéd. article* Evaporation.

(*o*) Transf. philosoph. anni 168. $\frac{3}{4}$ n. 156. art. 3.

(*p*) Ibid.

rem pateret, ſeptem inſuper gradibus ipſius calorem augebat; ex quo patet eadem lege acida mineralia a contactu aëris calefieri, qua pondere augentur; proindeque aucti caloris eamdem cauſam eſſe, ac aucti ponderis, abſorptum videlicet aëris humidum (*q*), & ex hac quidem ſola cauſa pyrophori hombergiani incenſionem repetendam eſſe nuper Vir Cl. demonſtravit (*r*).

4. Ex allato ſimpliciſſimo experimento, quod acida *concentrata* ex aëris humido incaleſcant, miri cujuſdam phoenomeni ratio eruitur olim a Geofroio propoſiti (*ſ*), quod nempe, ſi oleum vitrioli in ſalem ammoniacum infundatur, effervescentia contingat, ex qua immerſum thermometrum refrigeretur, intereadum thermometrum miſcelae vaporibus expoſitum admodum incaleſcit; notum ſiquidem eſt ex hac miſcela acidum marinum extricari eo magis *concentratum*, quo oleum vitrioli eſt vehementius (*t*). Itaque ex hujuſmodi acido marino in vapores abeunte, & ex atmoſpherae humido incaleſcente ſuſpenſi thermometri calor eſt repetendus. Et revera experiundo didici calorem eo ſemper minorem eſſe, quo adhibitum oleum minus eſt *concentratum*, ut tandem ex oleo aqua prius ſaturato in ſalem ammoniacum immiſſo halitus erumperent, abſque ullo ſenſibili calore; cum nempe ex acido marino diluto hujuſmodi halitus fierent, quod cum atmoſphaerae humido incaleſcere non poterat.

5. Ad refrigerationem immerſi thermometri, quod ſpectat, eamdem ſolutioni ſalis ammoniaci in aqua olei vitrioli adſcribendam eſſe multa ſuadent (*u*). Nam primo exper-

(*q*) Cullen in perfecto vacuo experimentum inſtituere decreverat, ut quaeſtionem accurate reſolveret pag. 102.

(*r*) Suvigny Mémoires de Mathématiques & de Phyſique, préſentés à l'Académie des Sciences tom. 3. pag. 180. & ſequent.

(*ſ*) Mémoires de l'Académie 1700. pag. 113.

(*t*) Maquer Chymie pratique tom. 1. pag. 123. tom. 2. pag. 536.

(*u*) Generatim acidorum mineralium refrigerationem ex admixtis ſalibus variis ab eorumdem ſalium ſolutione in aqua, qua acida diluuntur, repetendam eſſe opinatus eſt. Cl. Roux p. 42. 43.

expertus ſum, quo oleum vitrioli aquoſius eſt, caeteris paribus, eo majorem exoriri frigoris gradum; contra ſi ſumme concentratum ſit, non frigidam, ſed calidam effervescentiam cum ſale ammoniaco efficere, quod & ab aliis jampridem indicatum videtur (*x*). Deinde ſales alii, alkalici volatiles (*y*), nitrum (*z*), aliique uno verbo omnes, qui aquam refrigerant, oleum vitrioli dilutum ſimiliter refrigerant; *concentratum* calefaciunt, ut tamen, quo frigori cum aqua faciendo minus apti ſunt, quam ſal ammoniacus, eo etiam dilutius oleum vitrioli expoſtulent, ut cum eodem frigus producant (*a*). Caeterum frigus in propoſito experimento ex effervefcentia neutiquam eſſe videtur; ſiquidem non ſolum gignitur a ſalibus, qui cum acidis effervefcunt, verum etiam ab iis, qui hac dote carent (*b*), id equidem prae-

(*x*) „ Ab excellentibus, ut audio, Florentinis Academicis obſervatum eſt non „ incaleſcere oleum vitrioli, ſed frigeſcere ſali ammoniaco adjectum; „ neque abſimile fuit, quod in rectificato ſpiritu ſulphuris per campa- „ nam facto obſervavi: effectum tamen longe alium reperi, quando „ Florentinos imitatus experimentum cum oleo inſtitui. „ BOYLE de caloris, & frigoris orig. mech. exper. 23. pag. 314. At ROUVIERE aperte docuit oleum vitrioli dilutum quidem a ſale ammoniaco refrigerari, *concentratum* contra admodum calefieri. Vid. *Recher.* pag. 43. in not.

(*y*) Ex oleo vitrioli duodecuplo aquae diluto, & ſale volatili ſalis ammoniaci effervefcentia frigida (BOYLE loc. cit. exp. 5. pag. 296.) ex oleo vitrioli non diluto, & eodem ſale volatili calida effervefcentia orta eſt. Id. ibid. exp. 7. pag. 296. 297.

(*z*) Drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. nitri pulverati calorem gr. 3. auxerunt. Drach. iij. ejuſdem olei triplo aquæ diluti cum drach. ij. nitri calorem gr. 9. minuerunt. MUSSCH. in Cement. p. 209. 210. §. 229. collect. Acad.

(*a*) Hinc idem oleum vitrioli, quod ex ſale ammoniaco refrigerabatur in MUSSCHEM. experimentis (l. c. §. 230.) ex nitro incaleſcebat, niſi dilueretur (vid. not. praeced.) & ex ſale marino (GEOFROY l. c. pag. 113.) Revera aqua ex ſale marino gr. 2. tantum, ex nitro gr. 8., ex ſale ammoniaco gr. 12. refrigerabatur in ELLERI experimentis (Acad. de Berlin 1750. p. 85.)

(*b*) Sic ex ſpiritu nitri, & nitro frigus, tum ex aceto, & ſalibus quibuſcumque aquam refrigerantibus (GEOFROY l. c.) contra dilutiſſima acida cum ſpiritibus alkalicis, ideſt cum ſalibus alkalicis jam aqua ſolutis effervefcunt quidem, ſed frigus non producunt (BOERH. elem. chem. tom. 1. p. 202. exp. 3.

praeſtare videtur efferveſcentia, ut ex inteſtino motu promptior fiat ſalis ammoniaci intra aquam, qua acidum diluitur, ſolutio, ſicque frigus nonnihil intendatur; notum namque eſt ex Cl. Beccarii (*c*) experimentis ſalia neutra intra aquam, ſi quieta fuerint vix, ac ne vix quidem ſolvi, propterea efferveſcentia ſalis ſolutionem accelerando non ſecus, ac agitatio, quae bacillo fit, frigoris gradum augebit (*d*).

6. Quibus poſitis jam corruit Phyſicorum quorumdam hypotheſis, qui per efferveſcentiam ignem ex miſcela fugari opinati ſunt, propterea miſcelam ipſam refrigerari, interea dum expulſus cum vaporibus ignis iiſdem expoſitum thermometrum calefaceret (*e*). Si enim theoria ſtaret, vapores eo calidiores eſſent, quo miſcela frigidior evadit; at contra, ut diximus, in ſumma olei vitrioli vehementia, non refrigeratur, ſed calefit miſcela, & tamen vapores eo tempore maxime calidos emittit; contra ſi oleum vitrioli dilutiſſimum ſit, licet maxime miſcela frigefiat, vapores tamen ſenſibilem calorem non habent; & generatim aqua, qua oleum vitrioli diluitur ſicut efferveſcentiam eo frigidiorem reddit, quo copioſior eſt, ita vapores non calidiores, ut ex propoſita theoria ſequeretur, ſed frigidiores efficit. Praeterea ſunt aliae efferveſcentiae frigidae, qualis eſt efferveſcentia ſalis alkalini volatilis cum acido quovis, & cum ipſo oleo vitrioli, quae calidos halitus non emittunt, quod nullum inde acidum *concentratum* expellatur, ex quo iterum evincitur calorem halituum non expulſo igni, quod omnibus miſcelis frigoriferis commune eſſet, ſed *concentrationi* erumpentis acidi tribuendum eſſe. Hinc halitus, qui ex
ſale

(*c*) Comment. Bonon. tom. I. p. 405. in opuſc.
(*d*) Boyle tranſaction n. 15. art. I. ann. 1666.
(*e*) Musschem. in Cement. p. 214. n. 10.

ſale marino, & oleo vitrioli admixtis copioſi erumpunt (g) calidos ſimiliter reperi, licet non ex frigida, ſed ex calida effervefcentia naſcantur: enimvero oleum vitrioli ex ſale marino idem acidum *concentratum*, quod ex ammoniaco in halitus expellit, qui propterea pariter incalescunt.

7. Sed ut ad refrigerationem ex evaporatione, a qua nonnihil digreſſi ſumus revertamur, quaeſitum eſt, num liquida vaſis apertis infuſa, evaporatione ſuperioris ſuperficiei frigidiora evadant. Id in vacuo contingere Cl. CULLEN experimenta invicte demonſtrant (h): in aperto autem aëre ejuſmodi proponitur experimentum, ut non ſatis conſtans videatur. Nam Cl. BEAUMÉ, niſi liquidum immediate thermometro incumbat, nullam mutationem ab ejus evaporatione induci affirmat, & in cucurbitis, aut in lagenis vitreis ſive obturatis, ſive apertis aether continentibus thermometrum paullo profundius in ipſum immerſum, ad temperaturam componi affirmat (i). At alibi indiſcriminatim docet, ſi aether tum vitriolicum, tum nitroſum in vitreis vaſis reponatur immerſi thermometri liquorem 4.° infra temperaturam deprimere, inque ea depreſſione ſervare (k). Alibi demum thermometrum mercuriale in aether nitroſum immiſſum 1.°; thermometrum autem ex vini ſpiritu $\frac{1^\circ}{2}$ deprimi affirmat (l). Ego in cylindricis vaſis pollicem pariſinum diametro patentibus, & ſpiritum volatilem ſalis ammoniaci calce paratum continentibus, thermometrum 4.° circiter refrigerari obſervavi, tum quod immediate ſuperficiei liquidi ſubjectam bullam habebat, tum alterum, cujus bulla ad infima vaſis tribus

(g) GEOFROY l. c.
(h) Recher. p. 106.
(i) Diſſertation ſur l'aether p. 98. 99. exp. 12. 13.
(k) Ibid. pag. 87. exp. 3.
(l) Ibid. pag. 84. 85. exp. 2. Hujuſmodi inconſtantiam jam ROUX adnotaverat. *Recher.* pag. 115. 116.

tribus circiter infra primam pollicibus demergebatur; atque utriusque liquorem sensim subsedisse, donec ad quartum infra temperaturam gradum pervenisset, ibique tamdiu substitisse, quamdiu, dissipatis volatilioribus spiritus partibus, ejusdem evaporatio minueretur; in vasis autem aequalem aperturam habentibus, sed in ampliorem ventrem expansis multo minorem refrigerationem ex ejusdem spiritus evaporatione productam observavi, eoque minorem, quo venter amplior erat; ex quibus constat evaporatione tum superiora, tum inferiora liquidi strata aequaliter quidem refrigerari, sed frigoris producti gradum eo majorem esse, quo superficies evaporans ad reliquam superficiem, per quam penetrare nititur ambientium corporum calor, aut ad massam refrigerandam, aut etiam ad harum quantitatum productum majorem habet proportionem: quod si igitur thermometrum liquido volatili perfusum magis refrigeratur, quam si in liquidum ipsum immergeretur, id ex eo non fit, quod in primo casu liquidum evaporans immediate thermometrum contingat, sed ex eo, quod superficies evaporans ad massam refrigerandam majorem habet proportionem, eodem modo, quo vidimus, thermometrum acido *concentrato* madefactum magis calefieri, quam si in hujusmodi liquidum patulo vase contentum immergatur (3). Hinc thermometrum liquore volatili madefactum ex ipsius evaporatione eo magis refrigeratur, quo bulla minor est (*m*), cum eo major sit proportio superficiei ad massam, quo magis bulla imminuitur.

8. Quod si evaporatio calorem minuit, eo magis minuat necesse est, quo major eadem existit, cumque major existat in majori calore, inde conficitur eo magis corpora ex evaporatione refrigerari, quo calidiora sunt, atque adeo tempus, quo volatilia corpora refrigerantur, non solum ex proportione superficiei ad massam, juxta generalem legem aesti-

(*m*) Cullen l. c. p. 99.

aestimandum esse, verum etiam ex evaporantis superficiei magnitudine. Et quidem ferventem aquam oleo tectam longe tardius refrigerari observavi, quam si caeteris paribus nuda, & aëri aperto exposita relinqueretur, quando intra $\frac{2}{3}$ circiter temporis ad eumdem gradum perveniebat, evaporatione refrigerationem adjuvante. Inde vero ratio repeti posse videtur experimenti a BORRICHIO olim propositi (*n*), quod nempe, si vasa alia aliis inclusa aquam contineant, dum exterioris vasis aqua ebullit, aqua in vasis caeteris ab ebullitionis calore eo magis absit, quo vasa interiora sunt. Et sane instituto experimento, duorum, triumve caloris graduum differentiam, pro vasorum varia crassitie, & materie, inter unius & proxime inclusi vasis aquam thermometrum ostendit: hac arte posset quilibet caloris gradus ebullientis aquae calore minor constanter servari.

9. In vacuo, ut diximus, Cl. CULLEN ex evaporatione majus frigus produci observavit (1), ut tamen adverterit frigus, atque adeo evaporationem cessare, quando bullae e liquore evaporante prodire desierunt (*o*); quid simile ab HOMBERGIO fuerat observatum, liquores nempe volatiles principio in vacuo, quamdiu bullae prodirent, longe majorem jacturam ponderis facere, quam deinceps, bullis jam desinentibus, qui propterea suspicatus est, evaporationem, quae in vacuo fit, prodeuntibus aëreis bullis tribuendam esse (*p*), & huc confugiunt, qui evaporationem ab aëre repetunt (*q*). Verumtamen evaporationem cessare non quod bullae aëreae deficiant, sed quod spatium vaporibus jam refer-

(*n*) Acta Hafniensia anni 1671. 1672. observ. 73.

(*o*) Recher. p. 105. Frigus vero ex evaporatione spiritus salis ammoniaci in vacuo tantum fuisse, ut vasi circumposita aqua in glaciem converteretur.

(*p*) Acad. des Sciences 1697. p. 295. ad 298. Sed eas bullas in plerisque volatilibus liquoribus ex aëre non esse infra constabit §. 20. not. 9.

(*q*) In rarefacto aere liquida minus evaporare, in vacuo nihil, aut fere nihil Physici plerique ante CULLEN docebant.

refertum, & ſaturatum ſit, ſub clauſo recipiente aëris pleno inſtitutum experimentum demonſtravit. Etenim ſub hoc etiam frigus ex evaporatione ſpiritus volatilis paullatim producebatur, ut immerſi thermometri liquor ſenſim ſubſideret, qui tamen, poſtquam ad ſummam depreſſionem pervenerat, pedetentim ad temperaturam reſiliebat: neque defectu volatilium partium thermometri liquorem reſiliiſſe conſtitit; nam, ſublato recipiente, ex reſtaurata evaporatione iterum deprimebatur. Frigus vero productum ſub eo clauſo recipiente aëris pleno, caeteris paribus, eo minus erat, minuſve diuturnum, quo recipientis amplitudo minor erat, adeout liquida etiam maxime volatilia, ſicut ſpiritus volatilis ſalis ammoniaci calce paratus, ſub anguſto recipiente, ex evaporatione ſenſibiliter non refrigeſcerent; ex quo confirmatur frigus illud evaporationi deberi, & demonſtratur evaporationem in clauſo ſpatio, ſive vacuo, ſive aëris pleno tunc demum ceſſare, quando recipientis capacitas vaporibus referta eſt, &, ut ita dicam, ſaturata.

10. In rariori quidem aëre, caeteris paribus, ut frigus multo majus eſt, ita longe citius ceſſat, promptiuſque thermometri liquor ad externam temperaturam revertitur, quam in denſiori, ita ut tempus, quo frigus ex evaporatione perdurat, eo majus ſit, quo denſitas aëris major eſt; immo & majori proportione creſcat, quam denſitas aëris, quantum quidem per experimenta videre licuit hactenus minus accurata. Cum enim in his experimentis ſpiritu volatili ſalis ammoniaci uterer, cujus volatilitas, prout ſubtiliores partes avolant, minor evadit, propterea frigus non ſolum ex retardata ab ambientibus vaporibus evaporatione, ſed etiam ex defectu volatiliorum partium minuebatur. Maxime autem conſentaneum eſſet ope liquoris uniformiter evaporabilis legem eam inveſtigare, ac definire, juxta quam pro varia aëris denſitate frigus minus eſt, ma-

gisque

gisque diuturnum. Interim ex iis, quae attulimus, confici videtur, prout aër densior est, evaporationi magis resistere, eamque resistentiam, caeteris paribus, in majori proportione crescere, quam aëris densitatem: hinc & frigus pari ratione minus produci, & in dato recipiente magis diuturnum, quod tardius prodeuntes vapores, tardius etiam tanta copia colligantur, ut erupturos novos vapores cohibere possint.

11. Quoniam vero spatium datum sive vacuum, sive aëre plenum, prout vaporibus refertum, sensim novis recipiendis minus aptum efficitur, ut tandem evaporatio omnino cohibeatur, inde intelligitur, cur humida tempestate, humida corpora aëri exposita ex humoris evaporatione minus quam sicca tempestate refrigerentur (*r*); cur ex vento, qui continue aërem circum corpora evaporantia renovat & evaporatio (*s*), & frigus ex evaporatione (*t*) augeantur; cur humida corpora, aëre continue circa ipsa ex arte renovato, haud tardius fere, quam ex admoti ignis calore exsiccentur (*u*); cur tandem aqua dissoluto sale saturata in vacuo spatio non concrescat in crystallos (*v*) nec etiam aqua fortis in lixivium salis tartari immissa (*x*). Etenim non ob defectum aëris, qui ad nitri constitutionem requiratur, crystallisationem deficere (*y*), vel ex eo demonstratur, quod mixtura aquae fortis, & salis tartari aërem non absorbet, sed magna copia producit (*z*); contra vero defectu evaporationis crystallisationem fieri non posse, probat experimentum

(*r*) Notante MERAN, & RICHMAN. Vid. Recher. p. 93. 86. §. 9. p. 90. §. 15.

(*s*) MUSSCHEM. essai §. 962.

(*t*) MERAN apud ROUX exp. 1. p. 93.

(*u*) DESAGULIER tom. 2. p. 370. 371.

(*v*) " Ex eo, quod vapores nulli e vacuo recipiente elabi queunt. " BOYLE Exper. Physico-Mech. continuat. II. art. XI. exp. 2. p. 390.

(*x*) Idem. Tentamen circa partes nitri. Sect. XXIX. pag. 778.

(*y*) Ut HALESIUS *Statique des Végétaux* exp. 74. p. 162.

(*z*) BOYLE contin. II. art. XI. exp. 5. p. 390.

mentum aliud, in quo cum loco lixivii salis tartari, sal tartari siccum cum aqua forti admisceretur, verum inde nitrum, vel in ipso vacuo paratum est (&). Hic enim cum sal tartari, non aqua solutum, sed siccum esset, humidi evaporatio necessaria non erat, ut inde natum nitrum a modico diluente liquore secedere posset: acidum quippe nitrosum ex alkali admixtione in nitrum conversum jam minori quantitate ab eadem aquae copia dissolutum servari potest; ut nitri specie magna ex parte e liquore secerni debeat, & ad altera, ac fundum vasis deponi.

12. Ex eo porro, quod aër erumpentibus vaporibus resistat facile patet aërem, & vapores difficulter secum invicem admisceri, atque intelligitur, cur gutta aquae intra phialam vi ignis in vapores resoluta fere omnem aërem ex phiala expellat, & vicissim irruens in vacuum aër dispersos vapores contra recipientis parietes cogat (*a*); atque conficitur evaporationem non ab aëre, sed a causa alia, verosimiliter a solo calore liquores expandente repetendam esse.

13. Etsi vero perspicuis adeo experimentis evictum sit evaporationem ab aëre non pendere, prostant tamen experimenta alia, quae demonstrare videntur vapores, in primis aquosos, vi aëris sustineri: dum enim vacuum paratur vapores hujusmodi aquosi per recipientis parietes in levis nebulae speciem conspiciuntur (*b*), & ab iisdem recipientis parietes obnubilantur (*c*): hinc HOMBERGIUS licet aquam in vacuo celerius evaporare, quam in pleno recipiente ex humida terra, quae intra datum tempus in vacuo magis dehiscit, collegisset: putavit tamen in aëre altius vapores elevatum

(&) Idem loc. ult. cit. tum in tentamine circa partes nitri sect. XXX.

(*a*) HALES l. c. p. 233.

(*b*) Etiam absque usu humidae pellis. NOLLET *Lezioni di Fisica lez.* 10. *esp. I. tom.* 3. *p.* 140. 141. *lez. II. sez.* 2. *esp.* 3. *p.* 261.

(*c*) BOERHAAVE Chemia tom. 1. p. 247. 248.

vatum iri, quam in vacuo (*d*). Equidem vapores aquosi in definito caloris gradu certae densitatis esse videntur, propter quam in fluido plus, minusve denso vel eleventur, vel in infimum locum descendant (*e*): sed illa aquae, aut aliorum fluidorum in vapores rarefactio, & expansio, tum vaporum in aquam condensatio ab aëris praesentia, aut defectu non pendet. Quod si vapores dum fit vacuum ab aëre secedunt, id non propter defectum sustentaculi evenire videtur, sed quod vapores minus, quam aër se dilatare conentur, hinc & minus dilatentur, & aërem deserant (*f*), nisi quatenus cum ipso intime admixti, aut adhaerescentes ab eodem se expandente ex parte simul abripiuntur. Vapores autem aquosos in mediocri etiam caloris gradu parum elasticos esse, adeoque exiguum ad expansionem nisum exercere Hughenii, & Papini experimento constat, in quo vapores aquae in vacuo etiam ebullientis, mercurium in appenso syphone sensibiliter elevare non potuerunt (*g*).

14. Vaporum vero praesentiam in vacuo boyleano alio insuper experimento exploravi: scilicet in phialam angusti colli oleum vitrioli *concentratum* infudi; atque ad latus phialae vitrum cylindricum apposui, in cujus cavum aptati thermometri bulla pendebat: haec prompte recipiente pneumatico cooperui, tum parato vacuo, omnia in eodem situ per horam servavi, tandem ope consueti machinamenti

oleum

(*d*) Mémoires de l'Académie des Sciences 1693. p. 321. 322.

(*e*) Hinc fumus in recipiente etiam aëre pleno, dum refrigeratur paullatim subsidet, & ad infimam recipientis partem colligitur (Boyle Physico-Mech. exp. 30. p. 68. 69.) qui non in pleno tantum (Idem l. c.) sed etiam in vacuo (Musschem. in Cementinos p. 39. n. 9.) admoto calore iterum expanditur: & liquoris, qui magnam partem ex metallis constabat, fumus, cum in aëre elevaretur, in vacuo infimam recipientis partem occupabat (Boyle l. c. exp. 29. p. 67.) quod significat eum fumum aëris pressione elevatum fuisse.

(*f*) Ita Nollet loc. cit. p. 140. 263.

(*g*) Transact. anni 167 $\frac{5}{6}$ n. 122. art. 4.

oleum ex phiala in appositum vas cylindricum effudi, & paullatim thermometrum, cujus bulla jam in oleum vitrioli demersa erat a 16.° ad 21.° reaumur. scal. calefactum est, in eoque calore per insigne temporis intervallum perseveravit. In eo experimento pellibus pingui materia illinitis, non aqua madidis usus sum, ut recipiens cum lance pneumatica aptaretur. Ex quo jam patet vapores aquosos etiam in recipiente jam per horam aëre vacuo adhuc superstites esse, cum oleum vitrioli diu, multumque fuerit calefactum, cujus incalescentiam nonnisi ab attractis aquosis vaporibus repetendum esse superius demonstravimus (3), hiucque confirmatur vapores aquosos aëris sustentaculo nequaquam indigere.

15. At qui fit, ut vapores, qui ex admixto oleo vitrioli cum sale ammoniaco in aëre calidi erumpunt, quorumque calorem humidis vaporibus, quibus admiscentur; adscribendum esse demonstravimus (4), in vacuo, teste MUSSCHEMBROEKIO, vix ullum calorem ostendant (*h*)? An non inde evincitur vapores aquosos in vacuo vix ullos superesse, ex quorum miscela salis ammoniaci erumpens acidum incalescere possit? Juvabit ipsum MUSSCHEMBROEKII experimentum perpendere, quo accuratius ex eodem judicium fieri queat. Porro laudatus Auctor drach. iij. olei vitrioli per horam sub vacuo recipiente reliquit, priusquam in salis ammoniaci drach. j. effunderet, forte ut ad eamdem cum ambiente caloris temperaturam exigerentur: postea affuso in salem oleo vitrioli, vidit expositum vaporibus thermometrum nonnisi 3.° fahrenh. scal. incaluisse, & quidem tarde, effervescentia scilicet jam desinente. Thermometrum vero miscelae immissum, primo 21.° ejusdem scalae refri-

(*h*) MUSSCHEMB. in Ciment. p. 210. §. 230. 231. Calidos non esse hujusmodi vapores in vacuo ex MUSSCHENBROEK Cl. LA RATTE Encyclop. tom. 7. art. *froid* p. 319.

frigeratum fuisse, postea, finita effervescentia, 7.° incaluisse; cum contra, ex pari olei vitrioli dosi in duplam salis ammoniaci dosim in aperto aëre immissa, thermometrum in ipsam immersum 12.° refrigeraretur; expositum autem vaporibus thermometrum 10.° incalesceret. Quae quidem ostendunt, in vacuo, ut minus calidi halitus fuerunt, ita frigidiorem effervescentiam fuisse quam in aperto aëre. Quod si consideremus oleum vitrioli, prout dilutius est, frigidiorem quidem effervescentiam cum ammoniaco sale producere, sed quae halitus pari ratione minus calidos emittat (6), pronum est conjicere, oleum, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo cum sale ammoniaco commiscuit, dilutius fuisse, quam illud, quod idem experimentum in aëre tentans adhibuerat: cur autem id oleum dilutius evaserit facile est divinare, nam cum in vacuo per horam in aperta ampulla fuisset relictum, ex absorpto humido sub vacuum recipiens diffuso dilui facile potuit (§. praeced.) maxime si recipiens amplum (*i*), tempestas humida, ampla phialae apertura, tum si humidas pelles ad recipiens cum lance aptandum adhibuerit, e quibus novi vapores humidi assidue prodire, & in eorum, qui ab oleo absorbebantur, locum succedere possent (*l*).

16. Hae me animadversiones admonuerunt, ut idem experimentum paullo aliter repeterem. Drach. iij. olei vitrioli admodum *concentrati* in phialam angusti colli infundebam, & drach. j. salis ammoniaci immittebam in vas vitreum cylindricum, quod thermometro duplo instructum erat, depressio-

(*i*) Duae aut tres mensurae *chopines* aëris semper tantum aquae continent, ut inde drach. j. salis tartari sensibiliter humescat, & pondere augeatur (NOLLET *lez. tom.* 3. *p.* 140.) Recipiens vero MUSSCHEMBROECKII amplitudinem habebat 284. pollic. rhen. pag. 211.

(*l*) Effervescentia ex oleo vitrioli cum sale ammoniaco in vacuo mixtis minor, quando ante miscelam diu in vacuo morabantur. BOYLE contin. II. art. XII. pag. 398. 399.

presſiore altero, ut in miſcelam demergi poſſet, altero elatiore, ut miſcelae vaporibus expoſitum eſſet: prompte haec omnia excipulo pneumatico obtegebam, cujus limbus ad lancem per interjectas pelles pinguedine oblinitas aptabatur; tum cito, intra 2′ ſcilicet parato vacuo, in eodem ſitu relinquebam, donec hora integra lapſa eſſet: ſolito dein machinamento phialam invertebam, ut oleum vitrioli in ſalem ammoniacum effunderem. Poſtea idem omnino experimentum repetebam, cum hoc ſolo diſcrimine, ut prius aërem in recipiens admitterem, quam miſcela perficeretur. In utroque caſu eumdem omnino caloris gradum vapores oſtenderunt, qui aeque diuturnus, eadem lege, aequalibus intervallis aeque auctus, aut imminutus eſt, ita ut in utroque experimento thermometrum iiſdem expoſitum 6′ aut 7′ a peracta mixtione maximum calorem, 10.° ſcilicet in ſcala reaumuriana praeſeferret, & poſt ſemihoram adhuc 4.° hujuſmodi calorem retineret (*m*). Frigus miſcelae fere idem fuit in utroque experimento, 3.° ſcilicet in vacuo, 2.° in recipiente aëris pleno: in utroque autem, finita effervescentia, thermometrum in miſcelam immerſum, non modo ad temperaturam ambientis revertebatur, ſed 3.° 4.° ve ſupra illam incaleſcere pergebat; adeout dum thermometrum alterum vaporibus expoſitum refrigeraretur, alterum quod in miſcelam immerſum erat contra caleſieret. Inde itaque evidens fit ſalis ammoniaci vapores etiam in vacuo calorem oſtendere, & propterea humidos vapores, etiam horam unam poſtquam aër ſubductus eſt, per id vacuum recipiens diffuſos remanere; variumque a MUSSCHEMBROEKIO obſervatum experimenti eventum veroſimiliter vaporibus aquoſis tribuendum eſſe, quos, dum oleum vitrioli moraretur in vacuo recipiente, ante mixtionem hauſerat, quibuſque fuerat dilutum.

17. Cum

(*m*) Experimentum inſtitutum eſt hyemali tempeſtate, die ſerena, ac ſicca, mercurio in barometro maximam altitudinem habente.

17. Cum porro finita effervescentia mixtura incalesceret, quando thermometri vaporibus expositi calor jam evanuerat, patet inde thermometri vaporibus expositi calorem in MUSSCHEMBROEKII experimento a miscela incalescente communicatum non fuisse, ut HALESIUS suspicatur (*n*): praeterea vero in eo ipso MUSSCHEMBROEKII experimento thermometrum vaporibus expositum a 67.° ad 69.° fahren. scal. jam incaluerat, quando miscela ad 58.° frigida adhuc erat (*o*); propterea illius thermometri calor a miscela communicari non potuit, quae non modo nondum incaluerat, verom 9.° adhuc ambiente frigidior erat. Facile autem est caloris, quem miscela post finitam effervescentiam concipit, causam reperire, si consideremus duas partes salis ammoniaci requiri, ut una pars olei vitrioli saturetur (*p*); propterea tum in nostris experimentis, tum in experimento, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo instituit, in quibus drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. salis ammoniaci commixtae sunt, longe minorem fuisse salis ammoniaci dosim, quam saturando oleo vitrioli requireretur: hinc portionem olei vitrioli in his experimentis in salem ammoniacum secretum GLAUBERI conversam quidem fuisse, quod cum ambiente humido incalescere amplius non potest; portionem autem liberam superstitem fuisse, quae, attracto ambiente humido, non secus ac §. 14, &, cessante frigore a salis ammoniaci solutione producto, novum calorem ostenderet. Hinc mirum non est si hujusmodi frigida effervescentia, adjecta aqua, in calidam mutetur (*q*). Cum vero in aëre MUSSCHEMBREKIUS duplam salis ammoniaci dosim cum pari olei vitrioli

(*n*) Statique des Végétaux appendice p. 566. n. 78.
(*o*) Vide MUSSCHEM. l. c.
(*p*) POTT Académie de Berlin. 1752. p. 60.
(*q*) Cimentini p. 184. SLARE in transact. philosoph. n. 150. art. 4. exp. 7. GEOFROY l. c. p. 121.

vitrioli quantitate miſcuerit, inde minor olei vitrioli quantitas poſt finitam efferveſcentiam libera ſupereſſe potuit, minoremque calorem praebere, cujus forte ideo non meminit Cl. Auctor (*r*). Jam vero majori poſita in vacuo, & celeriori evaporatione (9. 10.) phoenomena explicantur hactenus obſcura: cur ad exemplum aqua fortis, cui vini ſpiritus admiſceatur, ferrum cum ebullitione in vacuo ſolvat, & interea in aëre nihil ſimile praeſtet (*ſ*); namque vis aquae fortis in ferrum, admixto vini ſpiritu, infringitur (*t*): itaque in vacuo, eodem citius diſſipato, majorem in ferrum efficaciam aqua fortis citius recuperat, dum quae in aëre eſt ex ipſius admixtione impeditur, quominus ſimilem actionem in ferrum exerceat. Caeterum, quoniam vini ſpiritus, qui, admixta aqua forti, vix ullas bullas in vacuo emittit (*u*), celerius tamen ibidem evaneſcit; confirmatur inde, quod ſuperius jam probavimus (9), celeriorem in vacuo evaporationem erumpentibus aëreis bullis tribuendam non eſſe. Forte autem ex ſimilibus cauſis, quod nempe acida, dum vacuum paratur, attracto ambientis humido diluantur (15.16), tum quod menſtrua alia volatiles nonnullas partes amittant diverſa phoenomena aliarum etiam ſolutionum, quae in vacuo, & aëre fiunt, repetenda ſunt.

18. Fluida alia prae aliis majorem caloris gradum inter ebulliendum acquirere Phyſici obſervarunt, eumque nec denſitati, nec oleoſitati, nec partium tenuitati reſpondere (*v*), ſed varium eſſe, prout liquida plus, minuſve eſſent volatilia (*y*). Revera ſi advertere lubeat, oleum olivarum calorem

(*r*) Etiam in aperto aëre thermometrum primo frigefactum ſub finem nonnihil calefieri obſervaverat Geofroy l. c. p. 114.

(*ſ*) Boyle Phyſico-Mech. contin. II. art. XI. exp. 13. Papin, & Hughens tranſact. phil. 1675. n. 119. art. I.

(*t*) Boyle experimenta, & notae circa corroſibil. orig. exp. II. p. 378. 379.

(*u*) Papin, & Hughens l. c.

(*v*) Boerhaave Chem. tom. 1. p. 93. 94. 398.

(*y*) Desagulier tom. 2. pag. 212.

lorem ſummum recipere antequam ebulliat, 600.° ſcilicet ſcalae fahrenheitianae (ζ), olea ſtillatitia 560.°, &, diſſipatis tenuioribus partibus, majorem (&), aquam 212.°, vini ſpiritum 175.° (a), ac demum ſpiritum volatilem ſalis ammoniaci calce paratum 150.° (b); & frigoris gradum ab iiſdem fluidis in CULLEN experimentis productum eodem ordine majorem fuiſſe (c), inde confirmabitur, tum varium ebullientium liquidorum calorem, tum varium frigus ab iis liquidis in memoratis experimentis productum a vario fixitatis, aut volatilitatis gradu dependere; proindeque liquida, tum demum ebullire, quando majorem caloris gradum acquirere non poſſunt (d), quando nempe evaporatio eorumdem ex aucto calore ea lege augetur, ut tantum caloris diſſipet, quantum adjicitur. Hinc eſt ut in machina papiniana, coërcitis vaporibus, in indefinitum calefieri poſſint (e).

19. Jam vero, quoniam evaporatio aëre cohibetur, eoque magis, quo denſior eſt, in vacuo liberior evadit (9); inde intelligitur, cur liquorum ebullientium calor eo major ſit (f), quo mercurius in barometro altior (g), in vacuo mi-

(ζ) Vere numquam ebullit; nam ex ſuppoſito igne calefieri pergit donec accendatur. MARTINE *Diſſertation IV. ſur la chaleur art. VIII. p.* 235. 236. 237.

(&) MARTINE l. c. BOERHAAVE l. c. p. 397.

(a) MARTINE p. 232. BOERHAAVE p. 396. de alcohole.

(b) Ut inſtituto experimento comperi.

(c) Recherches p. 99. 100.

(d) AMONTON, & FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 92.

(e) Caloris gradus 36. ultra conſuetum aquam recipere (BOERHAAVIUS l. c. p. 93.) ferrumen ex ſtamno, & plumbo calore aquae liquefactum in ea machina vidit DESAGULIER (tom. 2. p. 412.) ſtamnum, & plumbum intra aquam poſita NOLLETIUS (lez. tom. 4. p. 85.), aut etiam in media aqua per fila aenea ſuſpenſa MUSSCHEMB. (*eſſai* §. 879.)

(f) " Atmoſphaerae incumbentis pondus vapores deprimit, impeditque quominus aqua ebulliat, donec calorem contraxerit multo majorem, quam quo ad ejuſdem in vacuo ebullitionem excitandam opus ſit." NEWTON quaeſt. XI. poſt opticam p. 140. ſimilia DESAGUL. tom. 2. p. 212. aliique.

(g) BOERH. l. c. p. 92. 93. MARTINE l. c. diſſert. I. §. 9.

minimus habeatur (*h*). Sunt quidem nonnulli, qui ut evaporationem in vacuo (9), ſic celeriorem ebullitionem aëri erumpenti tribuunt: verumtamen inteſtinus motus, qui ex ebullitione eſt, non confundendus cum eo, qui ab erumpente aëre producitur: etſi enim bullas aëreis ſimiles ebullitio excitet, undas tamen nullas facit, quemadmodum aër, qui e liquidis per exantlationem educitur (*i*); praeterea erumpens aër non impedit, quominus liquida majorem calorem acquirere poſſint (*k*); at liquida etiam in vacuo ebullientia ulterius calefieri nequeunt (*l*), & generatim eo majorem calorem adipiſci poſſunt, quo majus eſt incumbentis atmoſphaerae pondus (*m*), in montibus minorem recipiunt (*n*); demum ebullitio in vacuo etiam promtior, tardiorve eſt, prout liquida plus, vel minus volatilia (*o*); hincque fit, ut liquida quaedam in vacuo ex ingenti calore

non

(*h*) Aquam in vacuo gr. 96. ſcalae fahrenheitianae ebullire. Boerhaave l. c. Musschem. §. 879. Vid. inf. not. 9.

(*i*) Musschemb. §. 879.

(*k*) Vide ſupra notam *h*. Eatenus tamen majorem calorem acquirunt, quatenus in vacuo vaſe clauſo collecti vapores ebullitionem cohibent, ut cohibent evaporationem (§ 9.); hinc alterna ebullitio aquae in vacuo, alterne erumpentibus, iterumque condenſatis vaporibus; hinc immiſſo in frigidam recipiente, ut vapores condenſentur ebullitio vehementior evadit (Hughens, & Papin tranſact. n. 122. art. IV.) continuato emboli motu diuturnior (Boyle exper. Phyſico-Mech. exp. 43.)

(*l*) Sic in aperto aëre prodire incipiunt ex aqua aëreae bullae calore gr. 150. fahrenheit. (Acad. de Berlin 1750. p. 69.), pergit adeo calefieri per gr. 72. In vacuo aër ex aqua prodit gr. 50. ejuſdem ſcalae (Musschemb §. 881.) pergit adeo calefieri antequam ebulliat per gr. 46. forte ex obſervato motu hoc bullarum aërearum erumpentium factum eſt ut Nolletius doceret aquam in vacuo gr. 60. fahrenheit ebullire (tom. 4. lez. 12. ſez. 1. exp. 2. p. 31.)

(*m*) Vide ſupra uotam *g*.

(*n*) Ex Túry, & Monnier experimentis Nolletius l. c. exp. 3. p. 35.

(*o*) Ita aqua, vinum, oleum terebintinae, ſi tepentia vacuo committantur vehementer adeo ebulliunt, ut per os vaſis effundantur; contra oleum olivarum etiam maxime calidum, ad ebullitionem perduci non poteſt (Boyle Phyſico-Mech. exp. 43. p. 117. 118.); ſpiritus vini in vacuo citius, quam aqua ebullit (Papin, & Hughens tranſact. n. 122. art. IV.), non ſic aqua fortis, aut vini ſpiritus, cui aqua fortis admicta fuit (Idem tranſact. n. 119. art. 1.)

non ebulliant; etſi copioſum aërem emittant (*p*), dum liquida alia parum, nihilve aëris continentia, & aqua etiam, quae praecedente ebullitione aëre repurgata eſt (*q*) exiguo calore ad ebulliendum adigitur.

20. Porro quaeſitum eſt, cur corpora aliqua ſolida tardius in vacuo, quam in aëre; fluida contra quaedam, ut aqua tardius in aëre, quam in vacuo refrigerentur (*r*). Ejus vero quaeſtionis ſolutio ex praecedentibus perſpicua eſt; ſcilicet ſolidorum, fixorumque corporum refrigeratio, quae ex aequabili tantummodo caloris diffuſione dependet, in vacuo minor eſt; liquidorum autem refrigeratio, cum non tantum ex aequabili caloris diffuſione, verum etiam ex evaporatione proveniat (8), evaporatio autem in vacuo augeatur (9), idcirco in vacuo refrigeratio celerior, quae ex evaporatione naſcitur tarditatem alterius, quae ex aequabili diffuſione caloris oritur compenſare non modo poterit,

(*p*) Ut oleum olivarum, quod forte præ omnibus liquidis copioſiſſimum aërem continere Boyleus teſtatur (l. c. exp. 24.) & tamen ex ingenti calore in vacuo non ebullit, ut dictum in nota ſuperiore.

(*q*) De aqua aëre per ebullitionem repurgata Boyle (l. c. exp. 43.) de ſpiritu vini Papin (l. c.); de ſpritu volatili ſalis ammoniaci Cullen (l. c. p. 106.); etſi vini ſpiritus parum aëris contineat (Hales l. c. exp. 66.); ſpiritus volatilis, tum aqua, quae ebullit nihil penitus (Boer. l. c. p. 273.). Praeterea aqua etiam nativa vix $\frac{1}{54}$ volum aëris continet (Hales l. c.), hinc in vacuo ebulliens mercurium in appoſito ſyphone ſenſibiliter non deprimit (Hughens tranſact. n. 122. art. IV.); ex quibus conſtat bullas, quas e vini ſpiritu, & ſpiritu volatili in vacuo prodeuntes vidit Cl. Cullen (9) magnam partem ex aëre non fuiſſe, ſed ex liquore ipſo vi ignis, aut caloris expanſo (confer. Musschem. §. 987. n. 3.) ut enim hi liquores in aëre citiſſime ebulliunt (§. praeced.) ita veriſimile eſt in vacuo ſolo ambientis calore, niſi perfrigidum ſit, ad ebullitionem adigi, quae tamdiu duret, donec collectis vaporibus coërceatur (vid. not. *k*.)

(*r*) Aquam calidam celerius in vacuo refrigerari Sgravesand §. 2521. Galeatius Com. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 314. Caeteris paribus virgam pyrometri paullo tardius contrahi ſub vacuo recipiente, quam ſub eodem aëre pleno Musschemb. in Ciment. p. 137. 138. Hinc quaeſtionem propoſuit. *Eſſai* §. 959. *Pourquoi l'eau ſe refroit-elle plus vîte dans le vuide tandis que le fer y reſte plus long-tems chaud qu'en plein air?*

terit, verum etiam ſuperare. Enim vero cum intra ſphaeram vitream thermometri mercurialis bullam incluſiſſem, ut ſphaerae centrum teneret, per tubulum, qui ad latus ſphaerae erigebatur eamdem aëre evacuavi, dein in ebullientem aquam immiſi, ut aequabiliter calefieret, tandem, mercurio ad 70.° ſcalae reaumurianae exiſtente, in aquam eamdem cum aëre caloris temperaturam habentem, 10.° ſcilicet ſupra o immerſi: mercurius ad 20.° deſcendit tempore $14' \frac{1}{4}$. Eodem experimento repetito cum hoc ſolo diſcrimine, quod aër in ſphaeram admiſſus fuiſſet, tempus refrigerationis fuit $9' \frac{1}{2}$ circiter (*ſ*). Ex quo patet mercurium, quo thermometrum conficitur, ſecus ac aquam tardius in vacuo, quam in aëre refrigerari, tum quod magis fixus eſt, tum quod in vitro thermometrico clauſus, ſi vel maxime volatilis eſſet evaporare non poſſet: hincque veroſimile fluida etiam alia, vel fixa, ut oleum expreſſum, vel etiam volatilia, ſummodo vaſis coërcita evaporare non poſſint, adinſtar ſolidorum corporum, tardius in vacuo, quam in aëre frigefactum iri.

21. Quoniam refrigerationis ex evaporatione ratio in eo ſita videtur, quod celerius liquorum volatilium calor per vapores diſſipetur, quam ab ambientium corporum calore ejuſdem jactura reparari poſſit (8): libuit inveſtigare quaenam corpora calori tranſmittendo aptiora eſſent, quod non ſolum huic quaeſtioni illuſtrandae, verum etiam ipſius caloris theoriae perficiendae aptum videbatur. Itaque cum aequalia olei olivarum, alcoholis, aquae, ac mercurii volumina in pocula terrea aequalia, & ſimilia infudiſſem, & ad eumdem cum ambiente caloris gradum componi ſiviſſem, qui

(*ſ*) Simile experimentum Newtonus memorat, in quo duo thermometra paria paribus cylindris vitreis cavis, altero vacuo, altero aëre pleno includebantur, aitque in vacuo cylindro nihilominus, neque fere tardius thermometrum incaleſcere, quam in aëre pleno, ſi e frigido in calidum cubiculum ambo deferantur. Quaeſt. XVIII. poſt Opticam p. 142.

qui eo tempore 10.° supra o scalae reaumur. erat; thermometrum mercuriale ad 70.° ejus scalae calefactum successive in singula haec liquida immisi, atque observavi tempus, quo a 70.° ad 20.° mercurius descendebat, in aperto aëre fuisse 10′ & 20″; in oleo olivarum fuisse 99″, vel 100″; in alcohole 44″; in aqua 25″; in mercurio 11″: repetitum experimentum vix 1″, aut 2″ varietatem obtulit (*t*). Aequae cito etiam refrigerabatur thermometrum in oleo olivarum sive nudo, sive tenui alcoholis strato obtecto: fuerunt adeo tempora refrigerationis in aëre, oleo olivarum, alcohole, aqua, mercurio fere uti numeri 224, 20, 9, 5, 2. Ex quibus primo patet permeabilitatem horum liquidorum a calore non esse in ratione volatilitatis, aut densitatis eorumdem: patet deinde eam fere legem obtinere, ut corpora, prout magis pinguia, calori deferendo minus apta evadant, ut aqua calorem citius deferat, quam liquida inflammabilia, ut demum mercurius etiam citius aqua eumdem transmittat; quae novam, eamque magni momenti caloris proprietatem electrico fluido communem patefaciunt: quod nimirum corpora, prout igni electrico deferendo aptiora, eadem aptiora quoque sint deferendo calori. Una hactenus exceptio tantum se offert, quam §. superiore indicavimus; corpora nimirum in vacuo tardius calorem amittere, cum electricitatem citius disperdant. Interim ex dictis intelligitur, cur lana, pili, & similia corporibus

(*t*) Martine l. c. p. 112. 113. Corpora in aëre nonnisi octuplo tardius refrigerari, quam in aqua, in mercurio nonnisi 2″ celerius pro singulis minutis quam in aqua; sed Vir Cl. & minus calefecit thermometrum, & fere usque ad ambientis temperaturam refrigerandum reliquit: ego & magis calefeci, & temporis tantum rationem habui, quo mercurius ad gr. 10. supra temperaturam perveniebat: hinc discrimen obtinui magis perspicuum; eodem modo, quo discrimen inter permeabilitatem corporum metallicorum, & aquae respectu fluidi electrici, quod, quamdiu electricitas exigua est, vix percipi potest, satis perspicuum fit, quando vehementior adhibetur.

ribus circumposita eorum calorem diutius servent (*u*); cur similiter circumpositum gossipium frigus servet ex arte productum (*v*); cur glacies citius in aqua, tardius in oleo terebinthinae, tardius adhuc in oleo olivarum, tardissime in aëre dissolvatur (*y*): cum enim haec in glaciem non agant vi corrodente, manifestum est ipsam citius, tardiusve dissolvere, prout calori communicando plus, minusve apta sunt. Sed de pulcherrimo hoc argumento fusius alias, & ex proposito erit agendum.

22. Observavit laudatus Cl. CULLEN liquorem in thermometro sub excipulo pneumatico suspenso, educto aëre, 2.° aut 3.° deprimi; postea in ipso vacuo ad temperaturam restitui; admisso demum aëre 2.° adhuc, aut 3.° elevari (*z*). Hujusmodi porro phoenomenon nihil cum prioribus commune habet, ut quisque facile intelligit: neque enim ulla ratio est, propter quam irruens in vacuum aëris unda thermometrum calefaciat, intereadum lenis ejusdem motus dum subducitur frigus inducat. Ad descensum quidem quod spectat, jam observatum a Cl. GALEATIO liquorem in thermometris, subducto aëre, nonnihil deprimi, ejusque phoenomeni causam hanc esse opinatus est, quod aër ex omni parte vitro incumbens ipsum constringat nonnihil, qua constrictione sublata vitrum relaxetur, eoque fiat, ut inclusus liquor deprimatur (&). Hanc Cl. Viri sententiam experimentis consentaneam deprehendi: perinde enim liquorem thermometri aëre vacui deprimi observavi, quando, aperto superius tubo, aditus concedebatur externo aëri, ut liquorem comprimeret, & cum aëre externam vitri superficiem premente ad aequilibrium componeretur. Cum enim thermometri liquor in-

com-

(*u*) MUSSCH. Essai tom. 1. p. 474.
(*v*) FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 88.
(*y*) Ex BOYLEO ROUX l. c. p. 29. 30.
(*z*) Recher. p. 104.
(&) Comment. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 318. 319.

compressibilis sit, omnis in hoc experimento observata depressio vitri dilatationi erit adscribenda. In apertis autem hoc pacto thermometris in vacuo recipiente constitutis liquor non deprimebatur, quod scilicet, facto vacuo, pressio ex interna, externaque vitri parte aeque tolleretur (*a*). Demum Boyleus in aperto etiam tubo ad ovale vitrum cavum connexo aquam $\frac{1}{4}$ digiti deprimi observavit, quando incluso sub excipulo pneumatico ovali vitro, & tubo per excipuli verticem prodeunte, subductoque demum aëre, pressio in ovalis vitri externam faciem minuebatur, & interea aër liquori incumbens in tubo ipsum contra internam vitri faciem premere pergebat: hinc, restituto aëre, ad priorem altitudinem liquor resiliebat (*b*). Ex quibus omnibus evincitur Cl. Galeatium veram propositi experimenti causam invenisse; sed cum etiam in vacuo, Cl. Cullen observante, ad pristinum locum thermometri liquor reverteretur, id indicio est calorem eo tempore nonnihil auctum fuisse; hincque factum est, ut, restituto aëre, tantumdem elevaretur supra eum locum liquor, quantum eodem educto subsederat.

(*a*) In apertis thermometris, extracto aëre, liquorem nonnihil ascendere, quod aër in liquoribus ipsis delitescens, aëris pressu sublato, se se exerat. Taberranus Comment. Bonon. l. c. p. 320.

(*b*) Exper. Physic. Mech. exp. 39. p. 47.

EJUSDEM.

De caussa extinctionis flammae, & animalium in aëre interclusorum.

IN superiore Tomo argumenta protulimus, quibus demonstraremus ignem, & flammam in intercluso aëre nec propter erumpentes fumos, nec propter imminutam ab iisdem aëris elasticitatem suffocari (*a*), quin & probabili conjectura ducti, ne alios quidem vapores suffocationis caussam esse putavimus, sed potius quod aër a flammae calore perverteretur. Cum vero ab animalibus vitiatus aër flammam repente extinguat, hinc utrumque phoenomenon ab eadem caussa produci opinati sumus, quae gradu tantummodo discreparet: at postquam non minus a ranis calore propemodum destitutis, quam a caeteris animalibus aërem perverti observavimus de conjectura nostra dubitare coepimus, aliaque experimenta meditari, quibus proposita quaestio accuratius dirimi posset (*b*). Quum in hujusmodi experimentis instituendis versarer eorum nonnulla, quae antea protulimus, castiganda esse comperi, & ex consideratione eorum, quae in praecedenti dissertatione circa vapores dicta sunt, his multo plus memoratis in phoenomenis tribuendum esse cognovi: quapropter idem argumentum retractandum suscepi, eo quidem, ni falior, successu, ut minus dubia, & minus indefinita in eam rem mihi videar prolaturus.

1. Relatum est in superiore tomo aërem, in quo flamma sponte fuerit extincta, ita perverti, ut immissam aliam subito suffocet etiam diu postquam fuerit vitiatus (*c*): idipsum

(*a*) In Commentariis p. 22. & seq.

(*b*) Ibid. a p. 48. ad 51.

(*c*) Ibid. p. 36. §. 38. Reaccensa candela in aëre, in quo mox suffocata est, tamdiu ac antea non perdurat (BOYLE nova exp. circa relat. inter aërem, &

idipſum in aëre ab animalium reſpiratione vitiato contingere ex BOYLEO retulimus, qui aërem in quo animal ante quatuor horas interierat immiſſo alteri animali trium minutorum ſpatio mortem attuliſſe ſcribit (*d*). Hujuſmodi BOYLEI experimentum, quo animalia in eumdem aërem ſucceſſive immittuntur hunc in modum iterandum ſuſcepi. Campanam vitream ſexdecim circiter librarum aquae capacem ita ſuſpendi, ut tres tranſverſos digitos limbo ſuo in aquam ſubjecti vaſis demergeretur: ad internam, ſuperioremque campanae partem trochleam aptaveram, per quam funiculus trajiciebatur, cujus alteri extremo exigua cavea adnexa erat, dum extremum alterum per aquam ſub campanae limbum traductum ita ad manus erat, ut cavea per aquam elevari poſſet. Funiculus alter caveae fundo adnexus, ſimiliterque ſub campanae limbum traductus caveae deprimendae, & e recipiente per aquam educendae inſerviebat: eo pacto cavea cum incluſa avicula in aërem ſub recipiens poſitum per aquam induci, aut educi poterat, quin aër mutaretur, prohibente aqua, quae campanae limbum undique obtegebat. Rebus hunc in modum diſpoſitis carduelis primum cavea incluſus per aquam in recipiens immiſſus eſt: avis primis duabus horis aërem abſorpſit, ut aquam uno circiter pollice ſupra libellum elevaret; poſtea vero tardius, tardiuſque hujus altitudinem adauxit; principio bene ſe habuit, dein conſuetas laeſae reſpirationis viciſſitudines paſſa eſt, quibus in fine horae quartae cum quadrante ſublata fuit. Hac educta carduelis alius eodem modo

& flam. vital. animal. tom. 3. p. 168.) ſub quintuplum tempus (HALES exp. 106. p. 201.) momento ipſo, quo in eum aërem immittitur, extinguitur (Helmont. *magnum oportet* p. 130. n. 59. Confer tom. praec. l. c. in not.). Aërem per flammam ex vini ſpiritus in vacuum trajectum immiſſam flammam confeſtim ſuffocare (HAUKSBEE exper. phyſico-mech. tom. 1. art. X.), aut trajectum per flammam carbonum (DESAG. tom. II. p. 439.)

(*d*) Exper. phyſico mechan. cont. II. art. V. exp. 11.

do in recipiens immiſſus eſt, qui ſtatim magna, ac frequenti reſpiratione correptus duobus minutis interiit (*e*). Tertius carduelis unico minuto mortuus eſt; quartus demum paullo ultra ſemi-minutum vitam traxit. Poſteriores aves, quae, aëre jam valde depravato, in recipiens immiſſae ſunt vehementibus convulſionibus, vomitu, ſopore occupabantur. Aqua poſt primas quatuor horas ſenſibiliter amplius non aſcendit.

Poſt haec infuſa exterius aqua eſt, ſicque aër ſub campana ita condenſatus, ut aqua ad libellam reſtitueretur, tum carduelis alius in recipiens immiſſus: ne minutum quidem vixit, nec aëris elaterium amplius imminuit.

Ex quibus confirmatur aërem ab animalibus ita vitiari, ut immiſſa animalia alia citiſſime extinguat.

2. Neque ſolum flamma, & animalia in aëre ab alia flamma, aut animali vitiato ſuffocantur, ſed ipſae quoque ſtirpes, ut ex aëris intercluſione paullatim languent (*f*), ſic citiſſime intereunt, ſi aër ille ab incluſis antea ſtirpibus fuerit vitiatus, & cum aëris elaſticitatem infringant, ſimiliter infringere deſinunt, ſi aër, cum quo intercluduntur ab immiſſa antea ſtirpe elaſticitatis jacturam jam fecerit (*g*).

3. Porro diuturnitas vitae animalium in aëre intercluſorum, caeteris paribus, eſſe ſolet in ratione directa voluminis aëris, inverſa numeri animalium, ut Cl. Veratti obſervavit (*h*). Anomaliam tamen quamdam in ranis ſe deprehendiſſe teſtatur, quae ſive plures, ſive pauciores, aeque tamen cito interirent (*i*): Idemque animadvertit ne ulla quidem difficultate reſpirandi in iis anguſtiis ipſas labo-

(*e*) Bullae aliquot aëris, dum traduceretur cavea, per aquam in recipiens penetraverant.

(*f*) Confer Cl. Hallerum in Boerh. tom. 2. par. 1. pag. 89. not. 38. elem. phyſ. tom. 3. p. 315. n. f. g.

(*g*) Hales Statiq. des Végétaux exp. 122. n. 7. p. 278. 279. 280.

(*h*) Com. Bon. t. 2. par. 2.

(*i*) Ibid. p. 275. 276.

laboraſſe (*k*), quamquam & aëris elaſticitatem infringant (*l*), & ex interclùſione aëris, ut ipſe exiſtimat, inſtar aliorum animalium perimantur (*m*).

Equidem, ut alia praetermittam, ranas aërem vitiare, ex eo confirmari videtur, quod aërem flammae alendae imparem non minus reddant, quam caetera animalia (*n*); in vitiato autem aëre diutius vivere non poſſe, vel inde conſtat, quod artificiali aëre tam cito laedantur (*o*).

4. Cum itaque haec phoenomena quid miri, ac ſingularis praeſeferant, placuit eadem per experimenta perſequi: & primum libuit experiri, quantum reſpiratio ranis eſſet neceſſaria. De iis quidem legimus 10′ in vacuo torricelliano ipſas interire (*p*), in boyleano autem tribus horis ita torpeſcere, ut vitam recuperare adhuc poſſint (*q*), ſex autem (*r*), aut ad ſummum ſeptem horis (*ſ*) penitus extingui quamquam alias, aut horis duabus extinguerentur (*t*), aut ad horas viginti ſeptem, & ultra in ipſo boyleano vacuo languidam vitam producerent (*u*). Verumtamen dubium eſſe poteſt an ranae in vacuo defectu preſſionis, an reſpirationis intereant: idcirco quamdiu ſub aquis vivere poſſint explorandum ſuſcepi; & quoniam ad aquae ſuperficiem reſpirandi cauſſa identidem feruntur, propterea ipſas vinculis ſub aquis coëgi. Poſt horam unam jam mortuae videbantur, ut concuſſae hac illac cadaverum inſtar moverentur abſque ullo proprii motus indicio: cum vero ipſas attentius obſervarem depre-

(*k*) P. 277.
(*l*) P. 276. (*m*) p. 274.
(*n*) Miſcel. tom. praeced. p. 48. §. 45.
(*o*) Boyl. phyſico-mech. cont. II. art. V. exp. 4. 5. 7.
(*p*) Florentini p. 51. col. Acad.
(*q*) Boyl. nov. exp. pneum. tit. 2. exp. 1. & in tranſ. n. 62.
(*r*) Id. l. c. exp. 2.
(*ſ*) Id. l. c. exp. 5.
(*t*) Id. exp. phyſico-mech. cont. II. art. VI. exp. 7.
(*u*) Mussch. in Ciment. p. 51. 52.

deprehendi post octavum, aut decimum quodque minutum aliquot respirationis motus sub ipsis aquis edidisse, dein conatas fuisse, ut a vinculis sese expedirent, postremo mortuarum instar iterum jacuisse, donec post idem tempus eadem phoenomena recurrerent. Quinta ab immersione hora cum jam nullus hujusmodi motus appareret unam eduxi; cum vero postea adhuc in reliquis motum aliquem respirationis mihi videre visus sim cunctatus sum horam alteram, ut secundam ab aquis elicerem: septima demum elapsa hora cum jam motus nullus amplius cerneretur, quae sub aquis adhuc erant tres reliquas eduxi; singulas distinctis locis seposui, atque post horas aliquot priores duas, quae quinta, & sexta ab immersione hora eductae fuerant vitam recuperasse comperi; postremas autem tres, quae per septem horas sub aquis permanserant nec sponte, nec admoto calore, aut stimulis in vitam revocari amplius potuisse. Experimenta autem haec mense septembri, liquore in thermometro ad 15° circiter supra o scalae reaumurianae existente, instituta sunt, quod utique monendum censeo, cum videam in aliis experimentis (v) sex diebus, aut diutius ranas sub aquis vixisse, & contingere possit, celeberrimo HALLERO notante, ut ranae, quemadmodum caetera animalia, frigore torpentes absque respiratione vitam diutius conservent (x).

5. Quae autem in aëre intercluso phoenomena ranae exhibuerunt hujusmodi sunt. Ex ranis quatuor unam in vase inclusi, quod uncias duodecim; secundam in vase alio, quod duplum; tertiam in vase, quod quadruplum aquae recipere potuisset; quartam in libero aëre reliqui: thermometrum tunc indicabat gradum 20. caloris in scala reaumuriana. Post 48. horas vivebant adhuc omnes; post horas 60. omnes ita mortuas inveni, ut vitam recipere amplius non possent:

(v) BROWNE erreurs populaires lib. III, p. 315.
(x) Elem. physiol. tom. III. p. 266.

ſent: laeſae reſpirationis indicia ante mortem in his ranis in aëre intercluſis aut nulla, aut dubia extiterunt, cum earum reſpiratio a ranae in libero aëre relictae reſpiratione ſenſibiliter non differret.

6. Cum porro viderem aequali propemodum tempore ranas & in aperto, & in intercluſo aëre periiſſe, inde ſuſpicio mihi nata eſt, eas non tam intercluſione aëris, quam aliqua alia cauſſa, imprimiſque aquae defectu interiiſſe; ſiquidem notum eſt ranas in aqua etiam puriſſima abſque alimento ad hebdomadas, imo & ad menſes vitam protrahere poſſe (y). Hinc ranas una cum aqua in aëre intercludendas putavi, ut ſublata altera mortis cauſſa, quantam vim habeat intercluſi aëris vitium ad ipſas enecandas tutius judicare liceret.

7. Itaque in vaſorum vitreorum aequalium altero ranam unam, in altero tres cum aqua incluſi: (ſpatium ab aqua relictum, & ab aëre occupatum tantum erat in utroque vaſe, ut uncias 20. aquae capere adhuc potuiſſet) ranam aliam cum pari aëris quantitate abſque aqua intercluſi; aliam demum in aperto aëre reliqui: thermometrum tunc erat ad 5° ſupra o ſcalae reaumurianae. Poſt quindecim horas vivebant adhuc omnes: poſt horas 20. ranas tres cum aqua, & aëre ſimul intercluſas mortuas inveni, quae, aperto vaſe, vitam non recuperarunt; rana quae cum aqua, & aëre ſola fuerat intercluſa poſt quinquaginta quinque horas adhuc vivebat, hora ſexageſima tertia mortua erat; quae cum aëre abſque aqua fuerat intercluſa poſt viginti ſex horas adhuc vivebat, vigeſima octava hora mortuam inveni, datoque aëre amplius non revixit; quae demum in aperto aëre relicta fuerat quinto die langueſcebat quidem, adhuc tamen vivebat. Eodem experimento repetito ex tribus cum aqua intercluſis ranis una per horas viginti, altera per horas triginta;

(y) Swamerdam. Bib. natur. p. 170. col. Acad. Idipſum ſaepe obſervavi.

ginta; tertia poſt tringinta quinque jam mortua erat; ſic ſingularum vita in ſummam collecta ultra octuaginta quinque horas non perduravit; quae rana ſola cum aqua, & aëre fuerat intercluſa poſt ſeptuaginta quinque horas jam mortua videbatur, aperto tamen vaſe vitam recuperavit; quae abſque aqua in aëre fuerat intercluſa poſt horas viginti quatuor jam mortua erat; quae demum in aperto aëre fuerat relicta decima die adhuc vivebat.

8. Ranae porro cum aqua intercluſae principio ſub aquis delitescebant, nec niſi identidem reſpirandi cauſſa ad ſuperficiem innatabant; progreſſu tamen temporis frequentius ad aquae ſuperficiem ferebantur; ac tandem ſub finem perpetuo innatabant, & perpetuo reſpirabant. Reſpiratio primo frequens, & parva erat, dein frequens, & magna, ac laborioſa; quando ad extremum pervenerant vix ſe amplius ſuſtinere ad aquae ſuperficiem poterant, & capite ſub aquis demergebatur; identidem tamen magno niſu innatabant, & magnas aliquot, vehementeſque reſpirationes edebant. Frequentes quoque eo tempore convulſiones apparuerunt. Quae in aëre abſque aqua intercludebantur ranae, convulſiones nullas paſſae ſunt, & minus evidenter laeſam reſpirationem habuerunt.

9. Ex his itaque patet ranas cum aqua in aëre intercluſas vitam fere ducere, quae ſit ut quantitas aëris ſimul intercluſi; eaſdemque non ſecus ac caetera animalia ex difficultate reſpirandi interire, quodque rem conficere videtur jam morituras, & dyſpnoea, ac convulſionibus laborantes ſimiliter renovato aëre reſtitui.

10. Quandoquidem vero, ut dictum eſt, in poſtremis experimentis (7) ranae, quae in aperto aëre relictae fuerant multo diutius vivebant illis, quae in aëre abſque aqua fuerant intercluſae ſecus, ac in primo experimento (5) contigiſſet, ſive id a peculiari ranarum conſtitutione, ſive a tempeſtatis varietate repetendum eſſet, placuit iterum ranas abſque aqua numero vario in vaſis ejuſdem capacitatis cum aëre inter-

tercludere; & iterum obſervavi, perinde ac quando cum aqua intercludebantur, vitae durationem longiorem fuiſſe ubi pauciores ranae erant, etſi inverſam numeri ipſarum rationem minus exacte ſequeretur, & quaſdam mortuarum inſtar jacentes, aëre renovato, reſtitutas vidi.

11. Quoniam igitur ranae, quando citius in intercluſo aëre, quam in aperto intereunt, intereunt etiam eo citius, quo plures ſunt in pari aëris quantitate (9. 10.) patet vel ab alia cauſſa, quam ab intercluſione aëris ipſarum interitum accelerari, vel certe earum vitam eſſe in ratione quantitatis aëris: quemadmodum autem hujuſmodi anomaliae frequentes ſunt, ſi ranae abſque aqua intercludantur (3. 5.), ita, conceſſa iiſdem aqua, & nulla hujuſmodi inconſtantia apparet, & ex aëris intercluſione pereunt, & eo citius, quo minorem aëris quantitatem habent, iiſdemque demum ſymptomatibus, quibus caetera animalia, perimuntur, ſimiliterque periturae ex aëris renovatione refocillantur (7.8.).

12. Quemadmodum vero animalium, ita & flammarum durationem in eodem recipiente inverſam fere numeri ipſarum rationem ſecutam fuiſſe experimento comperi, dummodo candelae eſſent aequales, & aeque arderent: & in aequalibus quidem recipientibus, ex aequalibus candelis accenſis diutius ardere illam, quae in ampliori intercluſa ſit, docuit Halesius; ſin autem recipientia eſſent aequalia, candelae inaequales, majorem flammam citius extingui (a); ut appareat flammas, caeteris paribus, non ſecus ac animalia in intercluſo aëre citius extingui, quando minorem aëris quantitatem habent. Equidem idem monuit Halesius in ampliori recipiente aequalem flammam minus durare, quam pro ratione quantitatis contenti aëris debuiſſet, ſed cum ſimul adnotaverit parem candelam in majori recipiente aëris quantitatem longe majorem abſorpſiſſe (b), hinc

(a) Exp. 103. p. 198.
(b) Exp. 106. 107. p. 200. 201. 202.

hinc verosimile sit candelam in majori recipiente positam paullo magis arsisse, ideo & minus perdurasse: enim vero postea constabit absorpti aëris quantitatem flammae magnitudini, quam proxime respondere (30). Quod vero opinionem nostram confirmat illud est, pondus amissum sive ab una, sive a pluribus candelis homogeneis fere secutum fuisse rationem capacitatis vasis, seu quantitatis aëris, cum qua intercludebantur: similiter Cl. BECCARIA expertus est (ut ipse mihi narrabat) cum limaturam stamni, aut plumbi in vitris hermetice clausis calcinationi subjiceret, portionem tantum limaturae ex subjecto igne in calcem redigi potuisse, at eo majorem, quo vacui in vase vitreo spatii amplitudo major erat.

13. Cum vero hactenus exposita experimenta in aëre ejusdem densitatis fuerint instituta, illud praeterea dignum consideratione videbatur, quantum pro varia aëris densitate simul interclusorum animalium vita brevior, diuturniorve evaderet. Cum itaque phialam haberem vitream quinquaginta librarum aquae capacem, cujus collum cochlea cuprea munitum erat, latera autem utrimque tubulum vitreum continuum habebant, horum alteri syphonem vitreum hermetice adglutinandum curavi, ut ex immissi in ipsum mercurii altitudine variam aëris interclusi densitatem cognoscerem; alterum ad machinam pneumaticam aptavi: dein passerculum in phialam immisi, eademque cochleae ope firmiter obturata, aërem cito hausi, donec mercurius in syphone pol. 16. lin. 10. supra libellam elevatus esset: tunc commercium inter antliam, & phialam intercepi; eo autem tempore 2′ ab immisso passerculo erant praeterlapsa.

Passerculus principio vomuit (*c*) convulsiones nonnullas passus

(*c*) Similiter alauda in aëre ad dimidium rarefacto ter vomuit, dein melius se habuit, ut post horae $\frac{1}{4}$ mortis periculum adhuc abesset. BOYL. nov. exp. pneum. tit. XI. exp. 4. & in transf. n. 63.

paſſus eſt, poſtea aliquamdiu bene ſe habuit. Reſpiratio ipſi primum parva erat, & frequens (*d*), dein minor adhuc, & frequentior evaſit, poſtea frequens, ac magna, poſtremo magna, & rara, quando, ſupervenientibus convulſionibus, ſublatus eſt: mercurius paullatim in ſyphone elevabatur, ut mortis tempore lin. 4. $\frac{1}{2}$ circiter ejus altitudo adaucta eſſet. Vixit paſſerculus a clauſo tubo, qui cum antlia pneumatica commercium faciebat 35′. Cum poſt mortem paſſerculi tantum novi aëris in recipiens admiſiſſem, ut 3. pol. mercurius ſubſideret poſt horas 1. $\frac{1}{2}$ iterum paullo ultra lineam unam mercurium elevatum fuiſſe obſervavi; ſed non auſim affirmare alicui caloris viciſſitudini eam mutationem adſcribendam non eſſe; etſi mercurius in proximo thermometro nullum ejus rei indicium praebuerit.

Poſt haec paſſerculum parem in eamdem phialam prius lotam ſimiliter immiſi: aërem ſimiliter exantlavi, ut tamen mercurius in ſyphone pol. 13. lin. 5. tantummodo elevaretur, & phialae commercium cum anthlia intercepi, quae omnia pari celeritate, 2′ ſcilicet ab immiſſo paſſerculo abſoluta ſunt. Paſſerculus eadem paſſus eſt, quae prior: vixit 70′, cum mercurius ſeptem lineis ſupra priorem locum mortis tempore altior eſſet.

Demum in eadem phiala cum aëre nativae denſitatis par paſſerculus interclusus (altitudo mercurii in barometro tunc erat pol. 27. lin. 6.) eadem paſſus eſt praeter convulſiones, quae nullae fuerunt: vixit horas 3. $\frac{1}{2}$; mercurius in ſyphone mortis tempore pol. 1. lin. 1. $\frac{1}{2}$ circiter altius conſcenderat.

14. Porro in hujuſmodi experimentis quantitates aëris intercluſi erant uti numeri 128. 169. 330., adeoque fere

uti

(*d*) Etiam in rariſſimo aëre montium peruvianorum reſpiratio frequens, anheloſa (Bouguer *Mém. de l' Acad.* 1744. *p.* 261.) in aëre condenſato contra reſpiratio rarior (Boyl. phyſico-mech. cont. II. art. 4. exp. 6.)

uti 3. 4. 8., duratio autem vitae fuit uti 35. 70. 210., seu uti 1. 2. 6., ex quo primo patet in aëre diversae densitatis durationem vitae non respondere quantitati aëris; sed majori in proportione augeri, quam aëris quantitas, quando densitas major evadit; adeoque eamdem aëris quantitatem diutius animalium vitam sustentare quum condensata, quam quum fuerit rarefacta.

Quod autem in aëre nativo rariori experti sumus, id in densiori expertus similiter est BOYLEUS, qui cum mures duos in paribus recipientibus inclusisset, in quorum altero aër nativam, in altero duplam densitatem habebat vidit in duplo densiori mus 15. vicibus diutius vixisse, quam in nativo aëre, etsi conclusi aëris quantitatem duplam tantummodo haberet (*e*).

15. Illud deinde ex hisce experimentis deducitur, imminutionem elasticitatis aëris majorem esse, caeteris paribus, quando aëris densitas major est, & quantitatem imminutionis densitatis fere rationem sequi: imo novi admissi aëris, post animalium mortem, elasticitatem iterum imminui ex iisdem probabiliter deducitur.

16. Quod vero de animalibus dictum est; idipsum de flamma observavit HALESIUS; in aëre nimirum ad dimidium rarefacto eamdem flammam multo minus quam dimidium tempus perdurare; adeoque ipsius durationem conclusi aëris rationem nequaquam sequi (*f*).

17. Quum igitur eadem aëris quantitas, prout addensatur eo tardius flammae, aut animalibus exitialis evadat; inde intelligitur, cur 522. pollices aëris, qui in nativa densitate hominis respirationi per 2′ $\frac{1}{2}$ tantum inservire possunt (*g*) in campana urinatoria aquae pondere compressi,

&

(*e*) Loco ult. cit.
(*f*) Statiq. des Végét. p. 234.
(*g*) Ibid. append. exp. vi. p. 372.

& condensati per 5′, & ultra respirationi apti sint (*h*), inde etiam verosimile sit eamdem aëris quantitatem campana urinatoria inclusam eo diutius respirationi inservire posse, quo profundius demissa campana, ex incumbentis aquae pondere aër in angustius spatium adigitur (*i*).

18. Ex his etiam eruitur rariorem aërem ob raritatem animalibus, aut flammae nocuum non esse, sed quod cito ob hanc ipsam pervertatur, idcirco nocuum celeriter fieri: enimvero animalia in eo aëre per aliquod tempus optime respirant (*k*), & respiratio pedetentim laeditur, & eo tardius, quo recipientis amplitudo major est, & eodem demum modo, quo in nativo aëre intercluso laedi solet (13); at si propria raritate aër noceret, aeque cito nocere deberet, quacumque posita recipientis amplitudine: patet ergo vitium ipsius raritati non esse adscribendum: praeterea vero manifestum est tantam densitatem aëris respirationi sustentandae sufficere, quae apta sit pressione sua dilatandis pulmonibus; pressio autem dilatandis pulmonibus necessaria tanta est, quanta requiritur pulmonum vi contractili superandae (nullus enim est aër thoracicus, qui resistentiam augeat), adeoque pressionem 2. pol. mercurii vix superat (*l*), ex quo conficitur aërem etiam praetermodum rarum pressione quidem sua mechanismo respirationis perficiendo aptum esse.

19. Ut

(*h*) Nam centum pollices pro 1′ sufficiunt HALLEY philos. trans. n. 349. DESAGUL. *leçons* t. II. p. 236. 473.

(*i*) Docet tamen DESAGUL. l. c. p. 236. tempus quo aër pervertitur esse uti ipsius volumen, quaecumque fuerit ejusdem densitas.

(*k*) Si excipias frequentiam majorem, quae etiam in montano aëre observatur. Vid. §. 13. n. *d*.

(*l*) HALES l. c. exp. 112. p. 214. 215. in mortuis quidem brutis experimentum institutum; & iterum exp. 113. p. 216. 217. applicito ad apertum canis latus syphone, vidit in ordinaria inspiratione vix sex pollicibus, in vehementissima ad summum triginta poll. in syphone vini spiritum elevatum fuisse: tanta igitur erat vis, qua distentus pulmo inspirati aëris pressionem sustinebat.

19. Ut vero eo certius cognofcerem quantam nam aëris raritatem animalia tolerare poffint fequens experimentum inftitui. Pafferculum in phialam vitream immifi, cujus aperturam flacefcente ampla vefica arcte ad collum phialae circumligata obturavi: phialam cum pafferculo alio fub recipiens pneumaticum pofui, aëremque exantlavi, donec mercurius ad 19. pollic. altitudinem in appenfo fyphone elevaretur (altitudo ejufdem in barometro tunc erat poll. 27. $\frac{1}{2}$) dein tantum aëris per epiftomium admifi, ut mercurius duobus pollicibus fubfideret; mox parem aëris quantitatem prompte iterum exantlavi; ficque alterne, & celeriter eamdem aëris menfuram & haurire, & reddere continuavi per horae dimidium: hoc pacto uterque pafferculus femper verfatus eft in aëre adeo raro, ut 7. $\frac{1}{2}$ ad fummum 9. $\frac{1}{2}$ mercurii pollices fuftinere poffet, cum eo tamen difcrimine, quod pafferculus phiala inclufus eumdem femper aërem haberet, extra phialam fub recipiens pofitus affidue renovatum: ille principio vomitu correptus eft (*m*), poftea bene fe habuit, ut finita femihora integer, alacerque educeretur; hic dyfpnoea fenfim ingravefcente, & convulfivis demum motibus correptus, non multo poft quam eductus effet, interiit.

20. Ex his confirmatur aërem fub recipiente pneumatico etiam admodum rarefactum vitae, ac refpirationi fuftentandae aptum effe, dummodo renovetur, indeque fit, ut animalia majores mutationes denfitatis tollerent, quando denfitas nativa interclufi aëris augetur, quam cum imminuitur (*n*),

inde

(*m*) Et refpirationem minorem, frequentioremque perpetuo habuit; vomitus repentinae mutationi aëris (vid. not. *c*. §. 13.), refpiratio frequentior ipfi aëris raritati adfcribenda (vid. ib. n. *d*, & §. 18. n. *k*.)

(*n*) Homines in campana urinatoria aërem ferunt novem vicibus denfiorem (Mussch. *effai* §. 1411.) & animalia in machina compreffioria ex aëre etiam octuplo denfiore nullum incommodum paffa funt (ex Birch. Hallerus l. c. p. 194. not. *o*.) alauda contra in aëre quadruplo tantum rariore 2' interiit (Boyle nova exp. pneum. tit. XI. exp. 3.)

inde etiam ratio pendet, propter quam in rariori altiſſimorum montium aëre, & flamma ardet, & animalia optime ſe habent (*o*), in aëre contra per antliam ad parem raritatem perducto cito extinguuntur (*p*): ille ſcilicet aër apertus eſt, & ſponte renovatur, hic interclusus brevi perverti debet; veroſimile propterea eſt aërem montanum interclusum aeque cito laethalem futurum, ac ille, qui in aequali recipiente ad parem raritatem eſt perductus.

21. Jam ſi comparemus phoenomena expoſita cum phoenomenis liquorum in clauſo ſpatio evaporantium iiſdem accurate reſpondere comperiemus: vidimus nimirum primo. Evaporationem in clauſo ſpatio paullatim imminui, ac tandem omnino deſinere, ut novi vapores in id ſpatium erumpere amplius non poſſint. 2. Durationem autem evaporationis, caeteris paribus, fere eſſe ut amplitudinem recipientium. 3. demum, ſi aër rarefiat, evaporationem accelerari, & recipiens vaporibus multo citius repleri; ita ut tempus, quo repletur majori in proportione imminuatur, quam denſitas aëris (Differt. praec. §. 9. 10.): quae quidem omnia etiam in flamma, & animalibus in aëre interclusis vera eſſe obſervavimus; nam & paullatim illa languere vidimus, ac tandem extingui, & immiſſam novam flammam, aut novum animal tunc ſtatim ſuffocari (1), & durationem utriuſque in eadem aëris denſitate eſſe, uti quantitatem aëris concluſi (3. 11. 12.), in diverſa hanc rationem non amplius ſequi; ſed eo celerius deſinere, poſita aequali aëris intercluſi quantitate, quo rarior aër eſſet, eo tardius, quo

(*o*) Vid. Hallerum l. c. p. 189. not. *i*, k, p. 193. not. *b*, *c*, p. 197. not. *o*, *p*, *q*.

(*p*) Vid. not. *n* praeced. inde forte factum eſt, ut plerique doceant aves aërem $\frac{2}{3}$ leviorem ferre non poſſe; ſed diſcrimen hujuſmodi inter aërem montanum, & aërem antlia rarefactum jamdudum eſt adnotatum. Vid. Haller. l. c. p. 193. not. *t*.

quo densior (14. 15.). Dum vero flammam, & animalia in intercluso aëre vaporibus suffocari concludimus, nondum aut eorum naturam licet definire, aut peculiarem modum, quo noceant; num scilicet novis tantummodo coërcitis vaporibus, an potius mutatis physicis, aut mechanicis aëris qualitatibus; sed de his deinceps nonnulla erunt addenda.

22. At si vapores flammae nocent, qui fit, ut in propositis alibi experimentis aër non per candens tantummodo metallum, sed & per vitrum trajectus flammam extingueret (*q*), & ex admoto extrinsecus ad vitream phialam igne contentus aër flammae deinceps alendae ineptus evaderet (*r*)? Ad primum, quod spectat experimentum, in quo, flamma intra recipiens binis verticalibus foraminibus pertusum constituta, ad inferius foramen candens vitrum admovebatur, non prava qualitate ex vitro contracta, sed impetu, & unda sua aërem vitri calore rarefactum flammam extinxisse cognovi; aliter enim experimentum cessit, quando cautum est, ne aëris a vitro rarefacti, & nimio impetu ad flammam impulsi unda in eamdem irrueret. Ad alterum, quod attinet experimentum maxime dubito ne per tenues vitri parietes (*s*), aut per latentem rimulam halitus admoti extrinsecus ignis in ipsius cavum penetraverint, vel fortuita alia adfuerit erroris caussa; quandoquidem crassioribus vitris in cassum deinceps tentavi: nec dissimulatum est a nobis in superiori tomo frigidis etiam animalibus corruptum aërem alendae flammae imparem fieri, unde de prioris opinionis veritate dubitare coepimus (*t*): caeterum & DESAGULIERIUS monuit aërem per candentia metalla trajectum non perverti, nisi quatenus aut ipsorum metallorum (*u*), aut

(*q*) Tom. praec. §. 32. 34. 35.
(*r*) Ib. §. 36.
(*s*) Vid. BORRICHIUM Act. Hafn. tom. 2. pag. 137. 138.
(*t*) L. c. §. 45. 46. 47.
(*u*) Ut aër, qui a candente auricalco lapidis calaminaris halitus recipit. *Leçons* tom. 2. p. 467. 468.

aut prunarum, in quas immersa metalla sunt vaporibus (*v*) inficitur, & HAUKSBEI experimenta esse castiganda: expertus demum sum aërem phiala inclusum per menses in praecalido hypocausto servatum nullam noxiam qualitatem contraxisse. Atque haec quidem de hujusmodi experimentis: argumenta caetera, quae vaporum hypothesim nobis oppugnare videbantur (*x*) minoris momenti esse deinceps constabit.

23. Verum si phoenomena consideremus imminutae ab animalibus imprimis aëris elasticitatis luculentius constabit vapores in caussam suffocationis esse adducendos. Constat enim aëris elasticitatem a vaporibus iis infringi, qui vehementer adeo ad ejus particulas adhaerent, ut interpositione sua mutuam ipsarum vim repulsivam imminuant (*y*). Hinc 1.° vis elastica aëris principio a vaporibus magis imminuitur, dein sensim minus, prout aër vaporibus onustus novis recipiendis minus aptus efficitur, ut demum 2. Aëre vaporibus jam saturato ejus elasticitas infringi amplius non possit (*z*). Tunc vero 3., novo aëre in recipiens admisso nova fit elasticitatis deperditio (*a*). Hinc 4. aër factitius, qui vaporibus jam saturatus prodit, in vacuum, aut aërem vaporibus jam saturatum emissus nullam elasticitatis jacturam patitur (*b*), quam tamen in purum aërem emissus pari vi-

(*v*) Ut in HAUKSBEI experimentis immisso in prunas ferro, aut aere. Ibid. p. 439.

(*x*) §. 24. 25. 28. 33.

(*y*) Ita DESAG. l. c. p. 42. 43, HALES. passim.

(*z*) HALES exp. 106. p. 202.

(*a*) Et novus aër cum impuro effervescit. Id. append. exp. 3. p. 342., & sequent.

(*b*) Si subitam eam excipias, quae ex ipsius aëris geniti, aut admixtorum vaporum refrigeratione dependet. Sic aër factitius ex cornu cervi in vacuo per speculum causticum combusto post horam nullam amplius patitur elasticitatis jacturam (BOYLE contin. II. art. VIII. exp. 2. p. 375.) imo vero nec aër ipse ex charta sulphurata in vacuo combusta (Id. l. c. exp. 1. p. 374. 375.), nec aër ex aqua forti, & nitro fixo in vacuo mixtis (Id. l. c. art. XI. exp. 5. p. 390.), aut ex aqua forti, & cupro (PAPIN. trans. an. 1675. n. 119.)

videtur, ex eo, quod vaporibus ſuis hujus elaſticitatem imminuat (*c*): ex quibus 5. intelligitur, cur corpora quaedam, quae in vacuo, aut aëre vaporibus jam ſaturato aërem emittunt, in aëre nativo, puroque intercluſa, aliquando videantur abſorbere (*d*), quod ſcilicet decrementum elaſticitatis intercluſi aëris ex vaporibus majus ſit ejuſdem incremento ex novo aëre adjecto: cur item 6. corpora quaedam in aëre intercluſa aërem alterne gignere, & abſorbere videantur, quando, harum cauſſarum altera alteram alterne ſuperante, elaſticitas intercluſi aëris alterne adaugetur, vel imminuitur (*e*): cur tamen 7. corpora etiam, quae principio aëris intercluſi elaſticitatem imminuebant, poſtremo adaugeant, quando intercluſi aëris vaporibus jam onuſti elaſticitas ab erumpentibus novis vaporibus ita imminui amplius non poteſt, ut ejus decrementum ex hac cauſſa incrementum ſuperet, quod ab erumpente novo aëre producitur (*f*).

24. Et haec quidem phoenomena maxime conſentanea ſunt iis, quae ab intercluſis in aëre animalibus producuntur. 1. Enim ab iiſdem vis elaſtica aëris principio celerius, dein tardius, tardiuſque imminuitur (*g*), ut demum 2. aëre iis vaporibus jam ſaturato ejus elaſticitas imminui amplius non poſſit; tunc vero 3. novo aëre admiſſo,

(*c*) Hales l. c. exp. 76. p. 163.

(*d*) Sic ſulphur in vacuo fluidum elaſticum vi ignis emittere, cum aërem in Halesii experimentis abſorpſiſſet adnotat Mussch. in Ciment. pag. 31. Similiter ſpiritum nitri cum ferri limatura in vacuo fluidum elaſticum gignere ut pol. 4. $\frac{1}{2}$ mercurius deprimeretur (Mussch. l. c. p. 201. §. 166.), contra ſub recipiente aëre pleno aërem abſorpſiſſe (Hales exp. 94. p. 190.), etiam repetito, ſi novus aër in recipiens admitteretur (Id. append. exp. 3. n. 6. p. 344.)

(*e*) Hales p. 256.

(*f*) In quinque tubis ſucceſſive admixto minerali *de Walton* cum aqua forti ſub eodem recipiente immoto aëris pleno, priores tres miſcelae aëris elaterium imminuerunt, poſteriores duae auxerunt (Id. append. p. 350.)

(*g*) Veratti l. c. p. 277.

miſſo, ex admixtis cum eodem vaporibus, nova elaſticitatis deperditio fieri nobis viſa eſt (15). Quoniam vero, aëre vaporibus ſemel ſaturato, ejus elaſticitas ab iiſdem debilitari amplius nequit, ex eo fit, ut 4. quantitas imminutionis non animalium numero, ſed intercluſi aëris quantitati reſpondeat (§. cit.), & in eadem aëris quantitate, quovis numero fuerint animalia, par fere elaſticitatis imminutio fiat (*h*), quod nempe, quovis fuerint numero, ultra certam vaporum quantitatem in aërem illum effundere; atque adeo ejus elaſticitatem ultra certum terminum enervare non poſſint: hinc 5. ſi animalia in aërem aliorum halitibus jam ſaturatum immittuntur, cito pereunt, quin aëris elaterium ſenſibiliter amplius imminuant (1), quinimo 6. animalia, quae per aliquod tempus in aëre vaporibus ſaturato ſupervivere poſſunt (4), in aëre intercluſa, ſub finem ejus elaterium non modo non pergunt enervare, ut contra novum aërem ante mortem gignant (*i*), quemadmodum de miſcelis quibuſdam dictum, quae cum purum aërem abſorbere videantur, in aëre propriis halitibus ſaturato novum producunt (n. 7. §. praeced.)

25. Quare cum admixti animalium vapores ii ſint, qui aëris elaſticitatem infringunt, perperam nonnulli ex abſorpto per pulmones aëre, & in ſanguinem traducto hujuſmodi elaterii imminutionem repetendam putant: etſi enim vel maxime per pulmones aër in ſanguinem penetret, neceſſe nihilominus

(*h*) Ex uno cypſelo in aëre intercluſo mercurius digit. 1. lin. $\frac{1}{2}$ deſcendit, ex duobus ſub eodem recipiente lin. 10, ex tribus digit. 1.; ſcilicet fere aequaliter deſcendit in experimentis VERATTI, quod ut Cl. Auctor advertit numerus ipſorum vitae brevitate compenſetur (l. c. p. 271. 172.) Eamdem legem in ranis deprehendit (p. 276.), videtur tamen aliquanto diverſam obſervaſſe in coturnicibus (p. 272.) HALESIUS quoque in majoribus recipientibus abſorptionem aëris, proportione habita ad capacitatem, minorem obſervavit, ſed ejuſdem ſpeciei animalia non adhibuit, exp. 7. p. 202. 203.

(*i*) De ranis idem Cl. VERATTI p. 277. 278.

nus erit, ut aequalis aëris quantitas per pulmones ipſos, aut per viam aliam e ſanguine erumpat; adeoque nullus hujuſmodi effectus apparebit (*k*). Dein ſi vera hypotheſis, ſequeretur in eodem recipiente plus aëris a pluribus, quam a paucioribus animalibus abſorberi (vid. n. 4. §. praec.): poſtremo conſtitutis in rariori aëre animalibus nulla fieri deberet elaſticitatis deperditio; quinimo erumpens e ſanguine, & humoribus denſior aër elaſticitatem ambientis aëris augere deberet, cum tamen contrarium evenire experimenta oſtendant (15).

26. Juxta eaſdem generales leges (23) imminuitur etiam aëris elaterium ab interclufis ſtirpibus; dum enim hae per interclufum aërem vapores diſperdunt ejus elaterium paullatim enervant, &, imminuta pari paſſu evaporatione, langueſcunt, & demum ante interitum eouſque aëris interclufi elaſticitatem vaporibus ſuis imminuunt, ut immiſſa nova ſtirps, & cito pereat, & eam aëris elaſticitatem debilitare amplius non poſſit (2).

27. Equidem phoenomena imminutae a flamma aëris elaſticitatis non parum a prioribus diſcrepant 1. enim flamma in aëre intercluſa principio ejus elaſticitatem non modo non minuit, quin potius adauget, dein ſenſim imminuere incipit, haecque imminutio ea lege augetur, ut, extincta flamma, maxima evadat (*i*) 2. flammae, quo majores, aut plures in eodem recipiente, etſi pari proportione minus perdurent, & ponderis decrementum idem patiantur (12), quod innuit parem halituum quantitatem in eum aërem diffundere; eo tamen magis aëris elaterium enervant (*l*), & con-

(*k*) Enormis certe aëris quantitas intra ſanguinem accumularetur, ſi 100. grana, ſeu 353. pollices aëris quavis hora in ipſum penetrarent, quemadmodum ex Halesii computatione, l. c. exp. 110. p. 211. 212.

(*i*) Hales exp. 106. p. 200.

(*l*) Majores candelas in eodem recipiente plus abſorbere, Hales exp. 106. p. 201. Pluribus flammis cum animali interclufis hydrargiri deſcenſus majores, celerioſque fuerunt, Cl. Laghi Comment. Bonon. tom. 4. pag. 82.

contra in recipientibus utcumque inaequalibus par propemodum elasticitatis imminutio ab aequalibus flammis producitur (*m*), ut adeo non quantitati aëris, aut durationi flammae, sed ejus magnitudini absorptio respondeat: hinc 3. flamma in aëre alterius flammae halitibus jam infecto, etsi cito extinguatur, & sub quintuplum tempus ad summum perduret (*n*) haud minus tamen, quum prior flamma ejus elaterium enervat (*o*). Quin 4. in aëre fervidae fumis referto, etsi flamma minus perduret $\frac{1}{5}$ plus ipsius elaterium debilitat (*p*).

28. Quae omnia demonstrant elaterii imminutionem, quae a flamma producitur aëris rarefactioni tribuendam esse, quae a pari flamma, quaecumque fuerit recipientis amplitudo, aequalis producatur; a majori, aut pluribus, in eodem quamvis recipiente, major existat; & aequalis iterum sit, sive flamma in purum, sive in infectum aërem immergatur, major vero, quo aër humidior, atque adeo ex calore magis dilatabilis est: quando enim flamma languere incipiet, multoque magis quando extinguetur, aër minus, minusque calore rarefactus sese contrahet, unde ejus elaterium pari ratione decrescere videbitur, ac calor imminuitur.

29. Ut vero rarefactionis effectus ab effectibus effluviorum aëris elaterium imminuentium secernerem, hujusmodi experimentum tentavi. In aqua vase contenta accensum cereo-

(*m*) Equidem HALESIUS monuit flammam sub majori recipiente aliquanto plus absorbere, sed cum simul adnotaverit & absorptionem, & durationem minorem fuisse, quam pro ratione contenti aëris esse debuisset: hinc verosimile flammam paullo majorem extitisse, unde & plus absorberet, & minus perduraret, quemadmodum innuimus §. 12.

(*n*) Confer. §. 1. n. c.

(*o*) HALES exp. 106. p. 201. exp. 103. p. 198.

(*p*) In hujusmodi aëre flamma 64″ perduravit, cum in pari quantitate aëris puri 70″ perduraret, & tamen in priori experimento $\frac{1}{6}$ plus aëris absorpta fuit. Id. exp. 121. p. 256. 257.

reolum fulcro ſuſtentatum collocabam, poſtea campana vitrea tegebam, & ſyphonis ope aqua prius ad libellam compoſita, ſtatim ſyphonem in aquam immergebam, ut ablatae inter aërem externum, & aërem campana incluſum communicatione, ex aquae ſub campanam aſcenſu decrementum elaſticitatis aëris dimetiri poſſem. Cum primum flamma contrahi, ac minui incipiebat, aqua elevabatur, & multo celerius eo momento, quo interibat: aliquamdiu poſt aſcendere pergebat aqua, donec aër penitus refrixiſſet: tunc altitudinem ſummam, ad quam aqua pervenerat accurate metiebar.

Poſtea idem experimentum repetebam, applicito cereolo accenſo ad crus ſyphonis, quod ſub campana recipi debebat: cereolum autem ad ejus cruris latus ita adplicitum erat, ut, inclinato ſyphone, primo crus, & ſtatim poſtea flamma ſub aquas demergeretur, atque extingueretur. Res ita peracta erat eo conſilio, ut vix dum ablata communicatione inter aërem campana incluſum, & externum aërem, a quo jactura elaſticitatis a flamma producta reparari poterat, flamma ſtatim extingueretur, nulla mora temporis conceſſa, qua aërem conſumere poſſet; adeout aſcenſus aquae campana incluſae ſupra libellam exterioris aquae poſt flammae extinctionem ex toto fere aëris condenſationi eſſet tribuendus, quin abſorptioni, aut imminutae aëris elaſticitati quidpiam adſcribi poſſet: verumtamen non minus in hoc, quam in praecedente experimento aqua aſcendit, etiamſi in illo flamma diu perdurans aërem abſorbere potuerit, ſi revera abſorbet; aliqua dumtaxat anomalia obſervata eſt pro varia flammae magnitudine, quam prout accuratius aequalem in utroque experimento eſſe curabamus, minus etiam inaequalis erat aquae aſcenſus (*q*).

30. Ex

(*q*) Hujus experimenti ſocium habui Cl. Comitem Salutium.

30. Ex quibus jam patet aëris elaterium a flamma quidem ex cera vix, ac ne vix quidem debilitari, & elevationem aquae ſub recipientibus, ſub quibus flamma extinguitur, condenſationi aëris a flamma prius rarefacti potius quam elaterii imminutioni tribuendum eſſe, & demum decerni non poſſe utrum flamma magis, vel minus quam animalia aëris elaterium infringat, donec effectus rarefactionis ab imminutae elaſticitatis effectibus non fuerint ſecreti.

31. Quoniam vero phoſphorus etiam cauſtico vitro intra recipiens accenſus, aut accenſus in clauſo vaſe ex admoto extrinſecus calore (*r*) aëris elaterium enervat, & enervat etiam pyrophorus, dum intra recipiens clauſum ſponte incaleſcit, aut accenditur (*ſ*); quoniam fumi ſulphurei etiam frigefacti per circumpoſitam frigidam, ſi iterum circumfuſa fervida calefiant, iterum aëris elaſticitatem infringunt (*t*); quoniam imminutio elaſticitatis ab incenſo ſulphure, aut flamma etiam communi producta poſt viginti, aut triginta horas ab eadem extincta fieri perſeverat, multo ſcilicet poſtquam omnia refrigerata ſint (*u*), & demum ſulphur (*v*), aut etiam communis flamma (*x*) per vitrum cauſticum intra vitreum recipiens accenſa aëris elaterium imminuunt, inde ſequi videtur flammas ſaltem aliquas, forte etiam communes aëris elaterium nonnihil enervare. Et quidem pro varietate pabuli modo aëris elaterium infringi, modo

(*r*) Hales pag. 147. 257.

(*ſ*) Id. exp. 54. p. 151. 152. Boyl. noctiluc. obſ. 10. p. 11.

(*t*) 13. pol. aëris quinque diebus abſorpſit. Hales exp. 101. p. 196.

(*u*) Id. p. 147. & exp. 106. p. 200. Si tamen conſideremus aërem tardiſſime refrigerari, probabile fit in amplioribus recipientibus vel permultas horas requiri prius quam ad ambientis temperaturam ſe reſtituat: quam tarde autem frigefiat aër thermometrum amontoſianum oſtendit.

(*v*) Accenſum ſulphur ultra 2. menſuras *pintes* aëris a detonante prius nitro producti abſorbebat. Id. exp. 121. p. 257.

(*x*) Accenſa eſt per chartam ſulphuratam, & nitratam. Id. p. 201. Sed quantum aëris elatetium imminuerit non narrat.

modo novum aërem a flammis produci demonstrare videntur experimenta HALESII, qui ex corporibus quibusdam inflammabilibus distillatis aëris elaterium infringi observavit, cum corpora alia similiter inflammabilia, & olea ipsa copiosum aërem producerent (*y*).

32. Verum ex iis ipsis experimentis, quae memoravimus constat imminutionem elasticitatis a flammae vaporibus productam imminutione ea, quae ex refrigeratione, & condensatione aëris fit, longe minorem esse: nam & sulphur distillatum multo minus, quam accensum aëris elaterium imminuit (*z*), & duo grana phosphori accensa, & sub recipiens immissa viginti octo pollices aëris absorbebant, cum intra vas clausa, dein accensa ex admoto extrinsecus igne tredecim tantum consumerent (*&*), quae rursus ostendunt, quam imperfecte imminuti elaterii mensura ab aquae, aut mercurii ascensu exhibeatur.

33. Caeterum quando flammae aëris elaterium imminuunt, id non absorpto aere efficere, sed vaporibus suis, qui vim repulsivam partium aëris, cum quibus admiscentur, imminuunt (23), vel eo constat, ut notat Cel. HALESIUS, quod post sulphuris deflagrationem, nonnisi terra sicca supersit, quae certe aërem nullum continet (*a*).

34. Postquam vero evictum est vapores esse, qui flammam, & animalia in intercuso aëre suffocant, illud primum quaerendum sese offert, num vapores iidem sint, qui flammae, & animalibus nocent. Et vidimus quidem aërem animalibus, sive calidis, sive frigidis (*b*) corruptum, immissam flammam statim suffocare. Vidit etiam PAPINUS flammam in vase clausam, ut nonnisi per tubum aër circum ipsam reno-

(*y*) De oleis exp. 62., de cera exp. 64.
(*z*) Id. exp. 76. p. 163.
(*&*) Id. exp. 54.
(*a*) Exp. 120. p. 256.
(*b*) Tom. praec. l. c. §. 44. 45.

renovari posset, extinctam fuisse quotiescumque loco puri aëris aërem ab homine exspiratum recipiebat (c): at aër flamma vitiatus, quocumque demum pabulo alatur, etsi flammam aliam quamvis confestim suffocet (d), non perinde animalibus nocet, sed pro varietate pabuli modo noxius admodum, modo vix notabiliter molestus est: sic Cl. LAGHIUS observavit animalia cum flammis communibus interclusa diu iisdem supervixisse (e), & licet animalia aliquanto citius interiisse adnotaverit, quando flamma simul interclusa erat (f), cum tamen etiam citius periisse animadverterit, quando plures flammae simul intercludebantur (g), ex hoc ipso erui videtur flammas eas halitibus suis animalibus non nocuisse; nam a flammis sive pluribus, sive paucioribus in idem spatium eadem quantitas halituum disperditur, cum eo citius finiant quo plures, & idem ponderis decrementum patiantur (12). Verosimilius igitur ideo animalibus nocuisse, quod aërem rarefacerent, eoque magis, quo plures, unde & paucior aër intra recipiens relinqueretur, & aqua altius assurgeret (h), pari prorsus modo, quo passerculus in recipiente, in quo aër exteriori calore fuerat rarefactus, ne horam quidem vixit, cum par passerculus in eodem recipiente, cui calor similiter admotus fuerat, sed ita, ut aër undique interclusus rarefieri non posset, ad 73′ vitam protraxerit (i). De flamma vero ex vini spiritu

(c) Act. lipsiens. ann. 1689. p. 466. Col. Acad.

(d) Vid. §. 1. n. c.

(e) Comm. Bonon. tom. 4. p. 88. Mus sub eodem recipiente cum cerea candela accensa interclusus, & novies, aut decies diutius quam vixisset flamma sub recipiente relictus, laesus non apparuit (BOYL. de relat. inter aërem, & flammam vital. animal. tom. III. exp. 1. p. 168.

(f) Passerculus sub recipiente halitibus candelae referto vixit horas 4. 48″, cum sub eodem nativo aëre pleno vixerit hor. 5. 24′, l. c. p. 81.

(g) Modo singulae aeque arderent p. 82.

(h) Id. l. c.

(i) Id. l. c. p. 87.

ſpiritu Boyleus narrat (*k*), & ſaepe etiam ſum expertus, aviculam cum ea flamma in aëre intercluſam huic diu ſupervixiſſe: lignorum etiam quorumdam flamma animalibus parum noxia (*l*), dum aliorum infenſa admodum (*m*), ut & flamma prunarum, quae aperto igne parantur parum animalibus nocet, cum carbonum ligneorum, aut lithantracis flamma iiſdem perniciofiſſima ſit (*n*). Admodum etiam perniciofus halitus ſulphuris, aut pulveris pyrii (*o*) incenſorum.

35. Quod ſi igitur flammarum quarumdam halitus, qui flammae manifeſte quidem nocent, animalibus vix, ac ne vix quidem moleſtiam afferunt, inde concludi poſſe videtur diverſos omnino halitus eſſe, quibus flamma, & animalia ſuffocantur (*p*); ac propterea flammas, quae animalia ſuffocant ſimul cum halitu flammam extinguente caeteris flammis communi, halitum alium emittere, qui animalibus perniciem afferat: & in carbonibus quidem halitum animalia extinguentem diſtinctum ineſſe, & ab illo diverſum, quo flamma perimitur, demonſtrare videtur ſpiritus carbonis, qui cum animalia ſuffocet, flammam non modo non extinguit, ut imo ab admota flamma incendatur (*q*). Jam vero hujuſmodi halitus ignem, & animalia extinguentes conjunctos adeſſe patet tum in reſpirato aëre, tum in aëre facti-

(*k*) Quinquies, aut ſexies diutius quam vixiſſet flamma ſub recipiente relicta avicula laeſa non apparuit (loc. ult. cit. p 167.) Aërem tamen, qui per flammam ex vini ſpiritu in vacuum penetrat linariam intra 2′ ſuffocare, Desag. t. II. p. 467. 468.

(*l*) Hales exp. 121. p. 237. Déſcriptions des arts & mêtiers par Mrs. de l'Acad. Art du charbonier p. 3.

(*m*) De flamma ligni quaercus viridis Mussch. *eſſai t. II.* §. 1330. *n.* 3.

(*n*) Art du charbonier p. 2. 3. & alibi.

(*o*) Mus ſuffocat $\frac{1'}{4}$ Boyle phyſico-mech. cont. II. exp. 8.

(*p*) Flammam vulgarem, & vitalem diverſis ſubſtantiis ali, aut ſaltem eo alimento multo magis indigere flammam vulgarem, Boyle l. c. exp. 2. Similia Cl. Laghius l. c. p. 88.

(*q*) Tranſ. philoſ. n. 452.

factitio plurium corporum, tum demum in aëre plerarumque mephitidum; cum contra alias hujusmodi halitus singillatim erumpant, ut e flammis, quae animalibus non nocent, aut e corporibus, quae cum animalia suffocent, vicissim flammam non laedunt (r), aut etiam inflammabilem halitum emittunt (ſ).

36. Quae cum ita sint minus tutum indicium est quo ex quantitate pabuli dato tempore a flamma consumti de aëris salubritate, aut insalubritate judicium fertur, cum aeque aptus alendae flammae esse possit aër animalibus admodum infensus, & contra.

37. Ignis porro, & flamma aërem animalibus vitiatum, aut halitibus aliis, non quidem corrigunt, sed eumdem expellunt, ut novus in ipsius locum succedere possit (t); hinc quando aër halitibus hujusmodi saturatus est igne non modo emendari non potest, ut imo hunc ipsum extinguat (u).

38. Si vero de eorum halituum natura, qui flammam, aut animalia in clauso aëre suffocant, quaerere libeat, illud primum manifestum est, fumos non esse, qui flammae noceant; nam & aër flamma infectus diu id vitium retinet postquam fumi subsederunt (v), & percolatione per liquida varia, quibus fumi retinentur, aër hujusmodi corrigi non potest (x), & flamma etiam, quae fulgines nullas emittit, qualis ea est, quae alcohole nutritur, in clauso aëre non minus

(r) Aut minus manifeste (LAGHI p. 84. 85.): certe spiritus sanguinis humani animalibus infensissimus (Ibid.) flammae non nocuus, quum contra ejus halitus admota flamma accendatur. Vid. inf. §. 40.

(ſ) Aëris factitii inflammabilis exempla HALESIUS habet exp. 57.

(t) De renovatione aëris, quae per ignem fit fuse diximus tom. praec. a §. 5. ad 17. Et ignem quidem ad aërem renovandum utiliter adhibent in fodinis (transf. phil. n. 5.) & in locis aliis. Ibid. n. 462. 463. SUTTON in libro in eam rem conscripto. DUHAMEL *art de préserver a p.* 121. *ad* 128.

(u) Quemadmodum notat DESAG. l. c. p. 475.

(v) Tom. praec. §. 28.

(x) Ibid. §. 24. 25.

minus ſuffocatur (*y*), & demum combuſtibilium corporum fumi flammam non ſuffocant, cum ipſi inflammabiles ſint (*z*). Igitur non phlogiſto, ſed vapore eo, qui fit ex phlogiſto, ſeu ignis pabulo vi ipſius ignis permutato, flamma in interclúſo aëre ſuffocatur.

39. Ad halitus quod ſpectat, quibus animalia in aëre interclúſa perimuntur perſpicuum eſt eoſdem ex perſpiratione, inprimiſque pulmonali provenire; nam & vitri interna ſuperficies iis mortuis obnubilatur, & aperto recipiente odor putidus ſtomaco infenſus percipitur (*a*): ex his vero conſtat halitus hujuſmodi non mere aquoſos eſſe (*b*), tum etiam ex eo, quod aëris elaterium infringant (24), quod mere aquoſi halitus non praeſtant (*c*); demum ex eo, quod aqua ſaepe majori quantitate in aëre communi adſit, quam in reſpirato, quin tamen veneficam qualitatem praeſeferat (*d*).

40. Cum vero ab allatas rationes putrido vapori ſimilis ſit is, qui animalia in interclúſo aëre ſuffocat, ob idipſum ex alkalino volatili ſale inprimis conſtare videbatur, eo vel maxime, quod Cl. LAGHIUS obſervaverit interclúſa animalia ex hujus ſalis vapore, cujuſmodi eſt ſpiritus ſanguinis humani multo celerius ſublata fuiſſe: placuit vero ejus etiam ſalis vim in flammam experiri. Itaque in interclúſum aërem, qui jamdiu exhalantis ſpiritus ſalis ammoniaci calce parati halitibus fuerat ſaturatus, flammam immiſi totumque ſtatim aërem illum concepta flamma deflagraſſe obſervavi; idemque fuit eventus quando flammam immiſi in interclu-
ſum

(*y*) Ibid. §. 2.
(*z*) Hoc argumento utitur HELMONTIUS l. c.
(*a*) Cl. LAGHI l. c. p. 82. 83.
(*b*) Ex aqua fiunt oleoſo volatili halitu praegnante, olente, non acida, nec alkalina, & praecipua cauſſa ſunt vitii, quod ex reſpirantium hominum turba in anguſto ſpatio aër contrahit HALLER el. phyſ. tom. II. p. 37. 38. tom. III. p. 353. 354.
(*c*) HALES. exp. 121. p. 260.
(*d*) Hoc argumento utitur idem HALESIUS p. 375.

ſum aërem halitibus tinॆurae ſulphuris volatilis ſimiliter ſaturatum; quoniam vero aër reſpiratus flammam non modo non concipit, verum etiam extinguit (34), inde conficitur halitus, quibus aër reſpiratus foedatur, vel a ſalis volatilis halitibus diſcrepare, vel cum iiſdem alios admiſceri, qui & flammam ſuffocent, & ipſorum inflammationem impediant: ex his vero inſuper confirmatur quod aliis jamdudum experimentis fuerat evictum pinguem ſubſtantiam ad ſalis volatilis conſtitutionem requiri, & intelligitur, cur putridorum corporum vapor aliquando inflammabilis ſit, alias contra alkali volatili jam diſſipato, aut vapore alio cum eodem admixto, vel eidem ſuccedente flammam extinguat (*e*).

41. Aër autem hujuſmodi ex flamma immiſſa accendebatur etiam aliquot menſes, poſtquam dictis halitibus fuerat ſaturatus, ut propterea vapores ſemel per aërem diſperſi diutiſſime eidem inhaereant, unde intelligitur quando aër flamma infectus, aut reſpiratus, aut artificialis id vitium diutiſſime retineat (*f*).

42. Dum vero dicimus halitus, quibus intercluſa in aëre animalia ſuffocantur ad putridorum halituum naturam accedere ſimul notandum innumeros alios eſſe, qui animalibus noceant; idque demonſtrant Cel. HAUKSBEI, DESAGULIERII, LAGHII experimenta, & ingens multitudo ſtirpium noxios halitus emittentium, & venefica vis factitii aëris ex tot diverſis corporibus prodeuntis; indeque ſit ut halitus venefici aliquando aëre ſint leviores (*g*), alias fere graviores (*h*) aliquan-

(*e*) Vid. HALLER elem. phyſ. tom. III. n. k. *l*.

(*f*) Tom. praec. §. 28. 46.

(*g*) Hujuſmodi eſſe videntur halitus omnes, qui in aperto, tranquilloque aëri innocui, in intercluſo admodum perniciosi ſunt, ut halitus animalium: hinc in noſocomiis, in quibus foetor purum gravis eſt, vix tolerabilis evadit, ſi prope laquear conſcendas, DUHAMEL l. c. p. 77. 277.

(*h*) Tales eſſe videntur halitus mephitidum quarumdam, quae aperto aëri expoſitae ſunt: hinc ex phiala in phialam ita transfundi poſſunt, ut interpoſitam flammam in tranſitu extinguant. *Sauvages effets de l'air* §. 119.

aliquando sonum intercipiant (*i*), alias non item (*l*), olentes demum aliquando sint, alias vix ullum odorem praeseferant (*m*).

43. Illud nunc inquirendum, quomodo collecti flammae, aut animalium vapores eadem in intercluso aëre suffocent: & ut primo de flamma dicamus, imminutam a vaporibus aëris elasticitatem in extinctionis caussam adduci non posse alibi demonstravimus (*n*): simplicissima vero ratio in eo sita videtur, quod aër flammae vaporibus semel saturatus novorum vaporum, in quos per combustionem ignis pabulum fuisset resolvendum, eruptionem cohibeat, pari modo, quo in caeteris evaporationibus contingit (diss. praec. §. 9.). Sane interclusae in aëre flammae aeque diuturna duratio est, sive superiora, sive inferiora recipientis teneat, & non aër solum inficitur, qui ipsam ambit, aut supra ipsam eminet, sed totus aër undequaque aequabiliter vitiatur, ut immissa nova flamma in limine suffocetur (1); quod argumento est ut dicamus non a calore (22), sed ab halitibus quaquaversum diffusis vitium illud proficisci: caetera etiam phoenomena evaporationis in clauso vase suppressae cum phoenomenis suffocationis flammae in aëre interclusae apprime convenire superius ostendimus (14).

44. Nec dissimilis ratio est ob quam stirpes in intercluso aëre pereunt; nam & aëris elaterium infringunt paullatim minus, & pari passu languescunt, adeo ut, quando demum perierunt, immissa ejusdem generis stirps & cito pereat, & aëris elaterium infringere amplius non possit (2. 26.), quae sane ostendunt vapores, ex quibus aëris elaterium imminuitur paullatim cohiberi, hinc aëreae elasticitatis jacturam

(*i*) Sauvages l. c. §. 160.
(*l*) Saggio delle transf. filosof. tom. 5. p. 10. 11.
(*m*) Vid. Cl. HALLER l. c. p. 113. n. *f*.
(*n*) Tom. praec. §. 2. 3.

ram minorem fieri, & ſtirpem languere, tandem vero omnino ſupprimi, hinc & elaſticitatem aëris non amplius infringi, & ſtirpem interire: ſtirpibus enim neceſſaria exhalatio eſt, ut novum ſuccum per radices haurire poſſint, ex cujus jugi affluxu earum vita, & incrementum dependet: ex quibus facile eſt intelligere cur ſtirpes ſolitariae ramos undique aequabiliter diffundant, altiores, gracilioreſque ſint quae in ſylvis adoleſcunt (*o*); nam ſolitariae ſtirpes aequabiliter undique exhalant; & propterea aequabilis ſit nutritii laticis affluxus, & aequabile incrementum; in iis vero, quae confertae in ſylvis ſunt lateralium ramorum evaporatio minor eſt, quod ambientium ſtirpium halitibus refertus aër eamdem cohibeat: hinc ad verticem copioſius affluens nutritius humor eaſdem in altitudinem magis, quam juxta aliam dimenſionem expandit.

44. Obſcurius aliquanto eſt, quo pacto infectus ex interclusione aër animalibus perniciem afferat: illud quidem facile eſt demonſtrare, perinde ac de flamma diximus (43), vapores non ideo iiſdem nocere, quod aëris elaſticitatem imminuant: nam in aëre aliorum animalium halitibus jam infecto intereunt, etiamſi aut, aperto vaſe, aditus externo aëri concedatur, ut ad aequilibrium ſe componat, aut adjecta aqua, ſicque condenſato intra recipiens aëre, ad nativam elaſticitatem reſtituatur (1): mihi etiam aliquando obſervare contigit ut immiſſa in recipiens avicula interiret, immoto mercurio in appoſito ſyphone, quod indicio fuit hiatum aliquem patuiſſe, per quem aër & inſinuari, & renovari etiam ex parte potuerit, quod & paullo conſueto diuturnior animalis vita confirmavit (*p*), quo quidem in caſu cum non

elaſti-

(*o*) Hales l. c. p. 300.

(*p*) Boyleo etiam aliquando contigit, ut in aëre interclusa animalia interirent, etſi mercurius in indice immobilis perſtaret (nov. exp. pneum. tit. XV. exp. 1. 2. & in tranſ. n. 63. art. 1.), aut exterior aër admitteretur, aperto vaſe (Ibid.).

elasticitate, sed pondere aër ageret, manifestum est imminutam a vaporibus aëris elasticitatem in mortis caussam adduci non posse. Porro demonstravit Cel. HALLERUS animalia ex perenni inspiratione ob eamdem rationem suffocari, propterquam in intercluso aëre pereunt (*q*), id autem, vel inde confirmatur quod, caeteris paribus, inspirationem eo breviorem edant; quo rarior aër citius inficitur, eo tardiorem, quo densior aër est, tardiusque pervertitur (13), atqui tamen dum in aperto aëre animalia inspirant, aëris pulmone contenti elasticitas tanta esse debet, ut cum aëris adglottidem incumbentis pondere aequilibretur, atque adeo immutata esse debet; ergo nec animalia spiritum retinentia, nec propterea in aëre interclusa ob imminutam ipsius elasticitatem suffocantur.

46. Si aër infectus per pulmones permearet, alter esset modus mechanicus, quo respirationi ineptus posset evadere; at in cuniculis, quos ejus rei experiundae caussa, in intercluso aëre suffocaveram, detecta pleura, pulmonem ei undique contiguum observavi, eademque sub aquis perforata, nullas bullas aëreas prodiisse vidi, manifesto argumento, aërem etiam respiratione corruptum pulmonem non permeare: ex quibus jam constat, mechanicis quidem qualitatibus, aërem respiratione corruptum dilatando pulmoni aptissimum esse, nec dubium quin machina, quae respirationis functionem imitatur (*r*), hanc aeque feliciter in hujusmodi aëre exhibere possit.

47. Quod si in physicos modo inquiramus, quibus inquinatus aër animalia suffocet primo quidem occurrit imminuta, aut etiam suppressa perspiratio a similibus vaporibus, quibus aër jam refertus sit, ac saturatus, cum ejus elasticitas ab immissis aliis animalibus infringi amplius non possit (14),

(*q*) Elem. phys. tom. III. p. 258. 359. 260.
(*r*) Vid. apud HALLER. l. c. p. 236. 237.

(24), & ex ea ſane cauſſa fieri videtur ut homines, qui ex puro in infectum aërem, etiam frigidiorem ſe transferunt, ſenſu caloris corripiantur, qui faciem imprimis invadit (*f*): verumtamen adeo neceſſaria non videtur perſpiratio, ut animalia, hac etiam ſuppreſſa, brevi adeo debeant ſuffocari (1), & aliae evacuationes ejus defectum ad tempus ſaltem poſſent compenſare, & demum in aëre admodum denſo, in quo perſpiratio tantopere imminuitur, animalia commode vivunt (20).

48. Alia vero, quae ſeſe offert phyſica cauſſa eſt nervoſi ſyſtematis a deleteriis in aëre congeſtis vaporibus irritatio, ac perturbatio, unde bronchia, & pulmones contrahantur, & aëri expanſuro negent cedere. Hujuſmodi vim ſulphureis vaporibus BOERHAAVIUS tribuit (*t*), & Cl. SOVASIUS mephitico cuidam vapori etiam adſcribit (*u*), etſi odore, & ſapore deſtituatur (*x*): eo igitur veroſimilius tribui poſſe videtur vaporibus, quibus reſpiratus aër inficitur, quique, Cl. LAGHIO notante, foetent adeo, ut ſtomachum moveant (*y*); & reſpirationis quidem viciſſitudines, quae interclusis in aëre animalibus contingunt, conjecturae favere maxime videntur: principio enim, quando aër vaporibus foedari incipit, reſpiratio paullatim frequens, ac parva evadit, quod vix inſpiratus aër moleſtia ſua ad expirationem ſtatim ſollicitet; deinde vero, pluribus collectis vaporibus, ex brevi, & parva in brevem, magnamque mutatur (*z*), & in aëre vaporibus jam foedato hujuſmodi reſpiratione animalia ſtatim afficiuntur (1), quod ſignificare videtur, aërem illum non ſolum moleſtum eſſe, ſed etiam bronchia vi ſua irritante conſtringere; ita ut eidem ingreſſuro magis reſiſtant, unde

(*f*) DUHAMEL l. c. p. 28. 29.
(*t*) De morb. nervor. p. 259.
(*u*) L. c. §. 148. eaque ſententia Cl. HALLERO placuit l. c. p. 254. n. *d*.
(*x*) Id. l. c. §. 144.
(*y*) L. c. p. 82. 83.
(*z*) LAGHI l. c. p. 82. VERATTI l. c. p. 269.

unde anxietas nascatur, quam laboriosa, ac magna inspiratione animal superare conetur: quoniam vero effectus idem est, sive vis aëris in pulmonem irruentis imminuatur, sive resistentia pulmonis adaugeatur, inde forte factum est, ut imminuta aëris elastica pressio a multis accusaretur; ast non imminutae pressioni aëris, sed auctae pulmonis resistentiae hanc respirationis laesionem tribuendam esse tum superius dicta (45. 46.) suadent, tum confirmant HALESII, & BOYLEI experimenta: hic enim cum aërem corruptum, in quo animal laborabat, condensaret, nihil levatum fuisse observavit (*a*); ille autem, compressa vesica, quae ad sectam vivi canis trachaeam adnexa erat, etsi aërem non renovaret, animal tamen refocillari perspexit (*b*). In primo nimirum experimento vis omnis aëris in pulmonem irruentis a dilatatione thoracis pendebat, ita ut, quacumque posita aëris densitate, ejus in pulmonem impetus tantus semper esset, quanta vis erat, qua pectoris cavum dilatabatur (18. not. l.), mirum propterea non est animal inde minus laboriosam respirationem assecutum non fuisse; secus vero in altero experimento, compressa vesica, aëris in pulmonem vis augebatur, quin necesse esset majorem nisum a pectoris parietibus exerceri, inde magis dilatabatur pulmo, & animal minori cum labore respirabat.

49. Ex his vero intelligitur, cur HALESIUS ex vesica (*c*), aut recipiente flexilibus parietibus instructo (*d*) aërem respirans perfocationis sensum perceperit, & canis, cui vesica ad trachaeam adnexa erat, reapse fuerit suffocatus (*e*), & animalia intra vasa flaccescentibus vesicis obturata non minus intereant (*f*), etiamsi in hisce adjunctis aër exterior vesica-rum,

(*a*) Ita tamen, ut novum aërem non adderet, cont. II. art. IV. exp. 18.
(*b*) L. c. exp. 114. p. 217.
(*c*) Exp. 108. p. 204. 205.
(*d*) Exp. 116. p. 225. 227. 228.
(*e*) Ib. exp. 114. p. 257. & seq.
(*f*) LAGHI l. c. p. 83.

rum, aut flexilis vasis parietibus incumbens eos ita comprimere debeat, ut inclusi aëris elasticitas cum atmosphaerae pondere perpetuo aequilibretur; intelligitur etiam cur animalia in condensato aëre intercluso intereant, quando ipsius elasticitas nativi aëris elasticitate adhuc major est, quemadmodum barometrum indicat (*g*): cur in nativo aëre intercluso intereant, etsi mercurii descensus in barometro minor sit, quam a mutata tempestate produci soleat (*h*): cur contra in montano aëre, aut etiam in aëre per antliam rarefacto, dummodo renovetur, optime se habeant, etiamsi ipsius in pulmonem pressio longe minor sit (20): cur demum aër mephiticus (*i*), aut artificialis (*k*), qui eodem fere modo ac aër interclusus animalibus infensus est, etiam in aperto loco animalia suffocet, ubi tamen non elasticitate, sed pondere aëris pulmones dilatantur, quod a vaporibus hujusmodi immutari nequit, ut facile apparet, & barometrum ostendit (*l*): cur hujusmodi aër citius etiam, quam vacuum animalia suffocet (*m*), & animalia etiam, quae diu vacui vim tolerare possunt (*n*).

50. Vi-

(*g*) Mussch. in Ciment. p. 59.
(*h*) Notante Cel. Hallero l. c. p. 208. 209. Profecto Halesius (append. exp. 6. pag. 371.) perfocationis sensum percepit, quando in recipiens, ex quo aërem respirabat, 18. pollices aquae penetraverant: recipientis vero diameter erat 9. pol., adeoque altitudo ejus aquae supra libellam 3. lin. circiter esse debuit; hinc pressio elastica respirati aëris tantumdem; hoc est 3. lin. aquae, aut $\frac{3}{14}$ lin. mercurii imminuta tantum erat.
(*i*) Vid. *Encyclop. artic. gas.*
(*k*) Hoc argumento Halesius inductus est ut crederet, artificialem aërem neutiquam nocere ob elasticitatis defectum l. c. p. 370. 371.
(*l*) Vid. Haller. l. c. pag. 213. n. h.
(*m*) Vacuum torricellianum aviculas $\frac{1'}{2}$ interimit (Cimentin. p. 49. 50.) aër ex pasta $\frac{1'}{4}$ (Boyl. conf. II. art. V. exp. 5.) tum ex uvis ad solem exsiccatis (Ibid. exp. 10.)
(*n*) De ranis ib. exp. 7. p. 371., de cochleis exp. 6. p. 367.

50. Videtur utique respiratus aër ea in re a mephitico discrepare, quod convulsiones nullas producat (*o*), quas tamen nullas observari verosimilius est, quod pedetentim halitibus aër saturetur, sicque interclusa animalia vel iisdem paullatim assuescant, vel paullatim debilitata, aut stupefacta minus ab iisdem afficiantur: etenim in aërem ab aliis animalibus jam infectum immissa animalia gravibus convulsionibus torqueri observavimus (1), & in aëre rariori, qui citius inficitur, ex convulsionibus interiisse (13) (*p*), & demum in nativo etiam, puroque aëre interclusa animalia ex convulsionibus periisse vidi, quando recipiens adeo angustum erat, ut cito foedatus aër eadem promte suffocaret (*q*).

51. Quum igitur nocua aëris vis ab admixtis vaporibus proveniat, mirum non est aërem corruptum directione quavis agitatum, aeque tamen nocere (*r*), imo vero cum vapores tenaciter plerumque aëri adhaereant (23. & seq.), inde est ut percolatione per liquida varia aër hujusmodi hactenus depurari non potuerit (*s*): frigore potius vehementi vapores cogente corrigi potuit (*t*). Equidem si peculiaris vaporum natura perspecta esset forte, aut liquores hujusmodi reperiri possent, qui vapores nocuos absorberent, reti-

(*o*) Cl. Laghi l. c. p. 88.

(*p*) Quae convulsiones non confundendae cum iis, quibus principio animal corripiebatur ex repentina mutatione densitatis aëris, quaeque paullo post sedabantur. Vid. §. 13. not. c.

(*q*) In angusto recipiente nativo aëre pleno interclusos cuniculos intra dimimidiam horam gravissimis convulsionibus correptos interiisse vidi. Boyleus etiam murem observavit in recipiente nativo aëre pleno, sed adeo angusto, ut 24' tantum vixerit, ex convulsionibus periisse. cont. II. art. IV. exp. 6.

(*r*) Flamma in intercluso aëre extinguitur, quacumque directione agitetur (tom. praec. §. 21.), & accensae prunae licet interclusus aër rapidissimo motu adversus illas insuffletur. (Shaw *leçon de chym. leç. 2. exp.* 5.) & animalia (Tabor exerc. medic. p. 173.)

(*s*) Tom. praec. §. 25.

(*t*) Ib. §. 39. Vel ipse spiritus salis ammon. calce paratus usque adeo volatilis frigore artificiali ex nive, & nitri spiritu in glaciem densatur (Martine diss. IV. art. VI p. 211.).

retinerentque, maxime si aër infectus per eosdem percolaretur; aut corpora alia invenirentur, quorum salutares halitus vel nocuos vapores ab aëre separarent, vel cum his coalescentes, eosdem in mediam, minimeque noxiam naturam converterent, quae quidem hactenus occulta, penitusque incomperta esse videntur (*u*). Sed alius suppetit aërem depurandi modus, qui, etsi in usum revocari vix possit non parum tamen facit ad confirmandum noxiam aëris vim vaporibus esse adscribendam. Cum enim vapores minus quam aër elastici sint, & aëre rarefacto minus quam ipse dilatentur, semel autem ab eodem separati, nonnisi lente, ac tarde cum ipso iterum permisceantur (Differt. praec. §. 12. 13.), propterea alterna, ac repetita rarefactione, ac condensatione aër maxima ex parte vaporibus expurgatur. Et hoc quidem artificio passerculum in eodem aëre alterne, & repetito ad dimidium rarefacto, ac ad nativam densitatem restituto per hor. 3. 50′ vivum servavi (*v*), cum in aëris immoti aequali quantitate par passerculus h. 1. 21′ interiisset. Sed de peculiaribus quibusdam hujus experimenti adjunctis, deque aliis aërem depurandi modis accuratiora alias me spero prolaturum.

(*u*) De Halesii experimentis sale tartari institutis dubitationes nostras proposuimus tom. praec. §. 46., quae eo firmiores videntur, quod vapores nocui aquosi non sint §. 39. tum quod oleum tartari, aqua jam saturatum minorem quidem quam sal tartari, aliquem tamen effectum produxerit (exp. 116.), qui nullus esse debuisset, si in humidi absorptione vis corrigens posita esset: similiter in recipiente induto tela lanea oleo tartari imbuta flammam aeque perdurasse vidit, ac in nudo, etsi $\frac{1}{3}$ recipientis a tela occuparetur (exp. 117. p. 231.) verum & absorptus aër $\frac{1}{3}$ minor significare videtur flammam tantumdem minorem fuisse (§. 12. 30.) ideo in angustiori spatio aeque perdurasse.

(*v*) Scilicet passerculus inclusus erat phiala, cujus orificium flaccida ampla vesica obturabatur; phiala vero ipsa sub recipiente pneumatico posita erat, quemadmodum §. 19. Hujusmodi experimentum a Boyleo olim in alium finem fuerat tentatum, ut scilicet decerneret num animalia rariori aëri assuescere possent (nov. exp. pneum. tit. XIV. & in trans. n. 63. art. 1. eodem tit.), idque sibi alias repetendum proposuerat (ib. in post scripto.)

FOELICIS

FELICIS VALLE TAURINENSIS FLORULA CORSICAE EDITA A CAROLO ALLIONO.

*Scripsi olim * periisse totam illam suppellectilem herbarum, quas in Insula Corsicae legit Cl.* Valle, *& fasciculum maritimarum Stirpium, quas acquisieram, ad Savonae territorium pertinere. Certior factus cum fuerim hasce stirpes etiam in Insula Corsicae circa* S. Fiorenzo *ab eodem fuisse collectas, in Botanicorum commodum eas recenseo, additis rariorum icone & descriptione.*

Achillea foliis lanceolatis obtusis acute serratis. *Linn. syst. p.* 1224.
  Balsamita minor. *Dod. pempt.* 295.
Agrostemma glabra, foliis lineari lanceolatis, petalis emarginatis coronatis. *Linn. syst. p.* 1038.
  Lychnis foliis glabris calyce duriore. *Bocc. sic.* 27.
Alisma foliis ovatis acutis, fructibus obtuse trigonis. *Linn. syst. p.* 993.
  Plantago aquatica. *Cam. epit.* 264.
Allium caule planifolio umbellifero, foliis inferioribus hirsutis, staminibus subulatis. *Linn. syst. p.* 977.
  Moly angustifolium umbellatum. *Bauh. pin.* 75.

Alo-

* V. Rar. ped. spec. pag. 23.

ALOPECURUS panicula villosa oblonga folio involuto. *Linn. syst. p.* 871.

Gramen alopecurum minus, spica longiore. *Bauh. pin.* 4.

ANDRYALA *Ger. galloprov. p.* 171.

Sonchus villosus luteus major, & minor. *Bauh. pin.* 124.

ANTHYLLIS herbacea foliis quaterno pinnatis, floribus lateralibus. *Linn. syst. p.* 1160.

Trifolium halicacabum. *Cam. hort.* 171. *t.* 47.

ANTHYLLIS fruticosa foliis pinnatis aequalibus, floribus capitatis. *Linn. syst. p.* 1160.

Barba jovis pulchre lucens. *Bauh. hist.* 1. *p.* 885.

ANTIRRHINUM foliis ternis ovatis. *Lin. syst. p.* 1160.

Linaria triphilla minor lutea. *Bauh. pin.* 212.

ANTIRRHINUM foliis hastatis alternis, caulibus procumbentibus, corollis calcaratis. *Linn. syst. p.* 1110.

Elatine folio acuminato in basi auriculato, flore luteo. *Bauh. pin.* 253.

ANTIRRHINUM procumbens ramosum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimis, floribus candatis axillaribus. *Misc. Taurin. tom.* 1. *p.* 88.

Hujus brevem descriptionem dedimus l. c., modo iconem exhibemus. Tab. I.

ARENARIA foliis subulatis subtus hispidis. *Linn. syst. p.* 1033.

ARUM acaule, foliis cordato-oblongis, spatha inflexa, spadice incurvo. *Linn. syst. p.* 1250.

Arisarum latifolium majus. *Bauh. pin.* 196.

ASPHODELUS caule nudo, foliis strictis subulatis striatis subfistulosis. *Linn. syst. p.* 982.

Asphodelus minor. *Clus. hist.* 1. *p.* 197.

ASTER foliis lanceolatis integerrimis carnosis glabris, ramis inaequalibus, floribus corymbosis. *Linn. syst. p.* 1216.

Tripolium majus caeruleum. *Bauh. pin.* 267.

ASTRAGALUS caulescens procumbens, leguminibus subulatis recurvatis glabris. *Linn. syst. p.* 1174.

Securidaca lutea minor corniculis recurvis. *Bauh. pin.* 349.

Astragalus caulescens procumbens leguminibus capitatis cordatis acutis hirsutis complicatis. *Linn. syst. p.* 1174.
Astragalus hispanicus siliqua epiglottidi similis flore purpureo major. *Herm. lugdb. t.* 75.

Bellis caule subfolioso. *Linn. syst. p.* 1220.
Bellis leucanthemum annuum Italicum. *Mich. gen. p.* 34.

Briza spiculis cordatis, flosculis septendecim. *Linn. syst. p.* 875.
Gramen tremulum maximum. *Bauh. pin.* 2. *Scheuch. gram.* 204.

Bunias siliculis ovatis laevibus ancipitibus. *Linn. syst. p.* 1136.
Eruca maritima italica, siliqua hastae cuspidi simili. *Bauh. pin.* 99.

Bupleurum involucris universalibus nullis, foliis perfoliatis. *Linn. syst. p.* 953.
Perfoliata vulgatissima arvensis. *Bauh. pin.* 277.

Butomus. *Linn. syst. p.* 1010.
Juncus floridus major. *Bauh. pin.* 112.

Calendula seminibus radii cymbiformibus echinatis, disci bicornibus. *Linn. hort. cliff.* 425.
Caltha arvensis. *Bauh. pin.* 275.

Campanula caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis, floralibus oppositis. *Linn. syst. p.* 295.
Rapunculus minor foliis incisis. *Bauh. pin.* 92.

Campanula foliis radicalibus reniformibus, caulinis linearibus. *Linn. syst. p.* 925.
Campanula minor rotundifolia vulgaris. *Bauh. pin.* 93.

Cardamine foliis pinnatis, axillis stoloniferis. *Linn. syst. p.* 1131.
Nasturtium aquaticum majus, & amarum. *Bauh.* 3. *pin.* 104.

Cata-

CATANANCHE squamis calycinis inferioribus ovatis. *Linn. syst. p.* 1197.

Chondrilla caerulea, cyani capitulo. *Bauh. pin.* 130.

CENTAUREA calycibus setaceo spinosis, foliis decurrentibus sinuatis spinosis. *Linn. syst. p.* 1232.

Carduus galactites. *Bauh. hist.* 3. *p.* 54.

CHRYSANTHEMUM . . . . . .

Chrysanthemum latifolium. *Bauh. hist.* 3. *p.* 105.

Tota planta leviter pilosa est. Folia amplexicaulia cum auriculis; inferiora spatulata, superiora fere linearia, omnia brevibus, & acutis dentibus simplicibus secta. Squamae calycis membranaceae, ut in chrysanthemo segetum, *sed sub hirsulae. Semiflosculi lutei longiores, & graciliores quam in* chrysanthemo segetum, *viginti circiter.*

CISTUS arborescens foliis linearibus sessilibus, utrinque pubescentibus trinervis, alis nudis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus ladanifera monspeliensium. *Bauh. pin.* 467.

CISTUS herbaceus exstipulatus, foliis oppositis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. syst. p.* 1078.

Helianthemum flore maculoso. *Col. ecphr.* 2. *p.* 78. *t.* 77.

CISTUS arborescens, foliis oblongis tomentosis incanis sessilibus supra enerviis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus mas folio oblongo incano. *Bauh. pin.* 464.

CISTUS . . . . . .

Chamaecistus luteus toroso folio hispanicus. *Barrel. ic.* 436.

CISTUS frutescens foliis ovatis petiolatis utrinque hirsutis, alis nudis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus foemina folio salviae. *Bauh. pin.* 464.

CISTUS suffruticosus stipulatus, erectus, foliis oblongo ovatis, acuminatis, subtus subincanis, minime ciliatis. *V. Tab. II.* *Plurimum accedit ad* Helianthemum vulgare flore luteo C. B. *a quo distinguitur foliis ex ovato sensim acuminatis, nec ellipticis, obscure virentibus, brevissime pilosis, nullis ciliatis. Caules duri lignosi, subrubentes, rotundi, subincani,*

cani, & aliquantulum piloſi ſunt in hac ciſti ſpecie.

Clypeola perennis ſiliculis bilocularibus ovatis diſpermis. *Linn. ſyſt. p.* 1130.

Thlapſi narbonenſe centunculi anguſto folio. *Tabern. ic.* 461.

Cneorum. *Linn. ſyſt. p.* 867.

Chamaelea tricoccos. *Bauh. pin.* 462.

Convolvulus foliis palmatis cordatis ſericeis, lobis repandis, pedunculis bifloris. *Linn. ſyſt. p.* 922.

Convolvulus argenteus folio althaeae. *Bauh. pin.* 295.

Convolvulus foliis linearibus acutis, caule ramoſo ſubdichotomo, calycibus mucronatis piloſis. *Linn. ſyſt. p.* 923.

Convolvulus linariae folio. *Bauh. pin.* 295.

Convolvulus foliis reniformibus, pedunculis unifloris. *Linn. ſyſt. p.* 924.

Soldanella maritima minor. *Bauh. pin.* 295.

Coris. *Linn. ſyſt. p.* 931.

Coris caerulea maritima. *Bauh. pin.* 280.

Cynosurus paniculae ſpiculis ſterilibus pendulis ternatis, floribus ariſtatis. *Linn. ſyſt.* 836.

Gramen barcinonenſe panicula denſa aurea. *Tourneſ. inſt.* 523.

Cytisus floribus ſubſeſſilibus, pedunculatiſque, foliis conduplicatis tomentoſis, caulibus fruticoſis. *Linn. ſyſt. pag.* 1167.

Trifolium argenteum, floribus luteis. *Bauh. hiſt.* 2. *p.* 359.

Echium caule ſimplici erecto, foliis caulinis lanceolatis hiſſpidis, floribus ſpicatis lateralibus. *Linn. ſyſt. p.* 916.

Echium vulgare. *Bauh. pin.* 254.

Echium calycibus fructeſcentibus diſtantibus, caule procumbente. *Linn. ſyſt. p.* 916.

Echium creticum latifolium rubrum. *Bauh. pin.* 254.

Euphorbia umbella multifida: dichotoma, involucellis ſubcordatis: primariis triphyllis, caule arboreo. *Linn. ſyſt. p.* 1050.

Tithy-

Tithymalus dendroides. *Cam. epit.* 965.

EUPHORBIA umbella quinquefida: trifida, dichotoma; involucellis diphyllis reniformibus, foliis amplexicaulibus, cordatis serratis. *Linn. syst. p.* 1049.

Tithymalus characias, folio serrato. *Bauh. pin.* 290.

EUPHORBIA umbella quinquefida, trifida, bifida, involucellis ovatis, petalis integris, fol. lanceolatis subpilosis apice serrulatis. *Linn. syst. p.* 1049.

Tithymalus palustris villosus mollior erectus. *Barr. rar.* 41. *t.* 885.

EUPHORBIA dichotoma; fol. integerrimis semicordatis; floribus solitariis axillaribus, caul. procumbentibus. *Linn. syst. p.* 1048.

Peplis maritima folio obtuso. *Bauh. pin.* 293.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis lanceolatis, foliis linearibus. *Linn. syst. p.* 1048.

Tithymalus S. Esula exigua. *Bauh. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella subquinquefida simplici, involucellis ovatis: primariis triphyllis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoso. *Linn. syst. p.* 1048.

Tithymalus maritimus spinosus. *Bauh. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis ovatis, fol. integerrimis obovatis petiolatis. *Linn. syst. p.* 1048.

Peplus S. Esula rotunda. *Bauh. pin.* 292.

EUPHORBIA umbella suboctifida: bifida, involucellis subovatis, fol. spathulatis patentibus carnosis mucronatis margine scabris. *Linn. syst. p.* 1050.

Tithymalus myrsinites legitimus. *Clus. hist.* 2. *p.* 189.

EUPHORBIA umbella quadrifida: bifida, foliis cuneiformi-linearibus tridentatis. *V. Tab. III.*

Procumbere videtur haec Euphorbiae *species, quae ex radice alba simplici tortuosa varios fundit cauliculos semipalmares. Folia glabra habet sessilia sublinearia in fine ampliora, & tridentata. Umbella quadrifida. Involucri universalis folia*

quatuor

quatuor ex cordato ampliori principio, deinde linearia apice tridentato. Umbellula bifida. Involucella diphilla foliis amplioribus. Fructus glabri.

EUPHORBIA umbella quinquefida: dichotoma involucellis cordatis acutis, foliis lineari-lanceolatis, ramis floriferis. *Linn. hist. p.* 1049.

Tithymalus annuus lunato flore linariae folio longiore. *Mor. ox.* 111. *p.* 339.

EUPHRASIA foliis dentato-palmatis, floribus subcapitatis. *Linn. syst. p.* 1107.

Euphrasia tertia latifolia pratensis. *Col. ecphr.* 200. *t.* 202. *f.* 2.

FILAGO floribus sessilibus terminalibus, foliis floralibus majoribus. *Linn. syst. p.* 1235.

Gnaphalium roseum hortense. *Bauh. pin.* 263.

FRANCHENIA foliis obovatis retusis subtus pulveratis. *Linn. syst. p.* 989.

Frankenia maritima quadrifolia supina, chamaesyces folio, & facie. *Mich. gen.* 23.

FUMARIA pericarpiis monospermis racemosis, caule diffuso. *Linn. syst. p.* 1153.

Fumaria officinarum, & dioscoridis. *Bauh. pin.* 143.

GALIUM foliis verticillatis lineari-setaceis, pedunculis folio longioribus, *Linn. syst.* 892.

Galium nigropurpureum montanum tenui folium. *Col. ecphr.* 1. *p.* 298.

GALEOPSIS internodiis caulinis aequalibus: verticillis omnibus remotis. *Linn. syst. p.* 1100.

Sideritis arvensis angustifolia rubra. *Bauh. pin.* 233.

GENTIANA corollis octofidis, foliis perfoliatis. *Linn. syst. p.* 952.

Centaurium luteum perfoliatum. *Bauh. pin.* 278.

GERANIUM pedunculis multifloris calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis sublobatis. *Linn. syst. p.* 1143.

Gera-

Geranium folio althaeae. *Bauh. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis ternatis lobatis. *Linn. syst. p.* 1143.

Geranium acu longissima. *Bauh. pin.* 319.

GLOBULARIA caule fruticoso, foliis lanceolatis tridentatis, integrisque. *Linn. p.* 888.

Alypum monspeliensium, s. Frutex terribilis. *Bauh. hist.* 1. *p.* 598.

GLOBULARIA caule herbaceo, foliis radicalibus tridentatis, caulinis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 888.

Bellis caerulea, caule folioso. *Bauh. pin.* 262.

GNAPHALIUM foliis linearibus, caule fruticoso ramoso, corymbo composito. *Linn. syst. p.* 1210.

Elichrysum s. Staechas citrina angustifolia. *Bauh. pin.* 264.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus. *Linn. sp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum nostras stoechadis citrinae foliis tenuissimis. *Pluk. alm.* 172. *t.* 298. *f.* 2.

GNAPHALIUM caule simplicissimo foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo composito terminali. *Misc. Taurin. tom.* 1. *p.* 95. *cum descript.*

Hujus iconem exhibet Tab. IV.

HIPPOCREPIS leguminibus sessilibus solitariis. *Linn. syst. p.* 1169.

Ferrum equinum siliqua singulari. *Bauh. pin.* 349.

HYOSCYAMUS foliis petiolatis, floribus sessilibus. *Linn. syst. p.* 932.

Hyoscyamus albus major. *Bauh. pin.* 169.

HYOSERIS fructibus subglobosis glabris, caule ramoso. *Linn. syst. p.* 1196.

Hedypnois annua. *Tournef. inst.* 478.

HYOSERIS scapis unifloris nudis, foliis glabris lyrato-hastatis angulatis. *Linn. syst. p.* 1196.

Dens leonis minor foliis radiatis. *Bauh. pin.* 129.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis obvallatis, caulibus procumbentibus, fol. laevibus. *Linn. ſyſt. p.* 943.

Paronychia hiſpanica. *Cluſ. hiſt.* 2. 183.

INULA foliis dentatis hirſutis; radicalibus ovatis, caulinis lanceolatis amplexicaulibus, caule paucifloro. *Linn. ſyſt. p.* 1218.

Aſteris altera ſpecies apula. *Col. ecphr.* 1. *p.* 251. *t.* 253.

INULA ſoliis oblongis integris hirſutis caule piloſo corymboſo floribus confertis. *Linn. ſyſt. p.* 1218.

Conyza 3. auſtriaca. *Cluſ. hiſt. xx.*

LAGURUS ſpica ovata ariſtata. *Linn. ſyſt. p.* 878.

Gramen ſpicatum tomentoſum longiſſimis ariſtis donatum. *T. Scheuch. gram.* 58.

LAPSANA calycibus fructus undique patentibus, radiis ſubulatis, foliis lanceolatis indiviſis. *Linn. ſyſt. p.* 1197.

Hieracium ſiliqua falcata. *Bauh. pin.* 128.

LATHYRUS pedunculis unifloris cirrho terminatis, cirrhis diphyllis: foliolis linearibus. *Linn. ſyſt. p.* 1164.

Lathyrus anguſtiſſimo folio, ſemine anguloſo. *Tourneſ. inſt.* 395.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphyllis, ſtipulis ſagittato-cordatis. *Linn. ſyſt. p.* 1164.

Vicia lutea, foliis convolvuli minoris. *Bauh. pin.* 345.

LAVANDULA foliis lanceolato-linearibus, ſpica comoſa. *Linn. ſyſt. p.* 1097.

Staechas brevioribus ligulis. *Cluſ. hiſt.* 1. *p.* 344.

LAVATERA caule arboreo, foliis ſeptemangularibus tomentoſis plicatis, pedunculis confertis unifloris axillaribus. *Linn. ſyſt. p.* 1147.

Malva arboreſcens. *Dod. pempt.* 653.

LEPIDIUM foliis lanceolatis amplexicaulibus dentatis. *Linn. ſyſt. p.* 1127.

Draba umbellata, sive draba major capitulis donata. *Bauh. pin.* 109.

LINUM calycibus subulatis, foliis lanceolatis strictis, mucronatis, margine scabris. *Linn. syst. p.* 968.

Passerina lobelii. *Bauh. hist.* 3. *p.* 454.

LOTUS leguminibus subquinatis, arcuatis compressis, caulibus diffusis. *Linn. syst. p.* 1179.

Lotus peculiaris siliquosa. *Cam. hort.* 91. *t.* 25.

LOTUS capitulis aphyllis, foliis sessilibus quinatis. *Linn. syst. p.* 1179.

Dorycnium monspeliensium. *Lob. ic.* 51.

LOTUS capitulis dimidiatis, caule diffuso ramosissimo, foliis tomentosis. *Linn. syst. p.* 1179.

Lotus siliquosa maritima lutea cytisi facie. *Barrel. ic.* 1031.

LYSIMACHIA calycibus corollam superantibus, caule erecto ramosissimo. *Linn. syst. p.* 919.

Linum minimum stellatum. *Bauh. pin.* 214.

LYTHRUM foliis alternis linearibus, floribus hexandris. *Linn. syst. p.* 1045.

Salicaria hyssopi folio latiore. *Hall. jen.* 147. *t.* 2. *f.* 3.

MEDICAGO pedunculis racemosis, leguminibus cochleatis spinosis, caule procumbente tomentoso. *Linn. syst. p.* 1180.

Medica marina. *Clus. hist. p.* 243.

MEDICAGO leguminibus reniformibus, margine dentatis, foliis pinnatis. *Linn. syst. p.* 1180.

Loto affinis siliquis hirsutis circinnatis. *Bauh. pin.* 333.

MEDICA pedunculis multifloris, leguminibus cochleatis spinulis hamatis, stipulis integris. *Ger. Galloprov. p.* 518.

Medica echinata hirsuta. *Bauh. hist. p.* 386.

MENYANTHES foliis cordatis integerrimis, corollis ciliatis. *Linn. syst. p.* 918.

Nymphaea lutea minor, flore fimbriato. *Bauh. pin.* 194.

MYOSOTIS seminibus nudis, foliis hispidis, racemis foliosis. *Linn. syst. p.* 913.

Echium luteum minimum. *Bauh. pin.* 255.

ONONIS pedunculis unifloris filo subterminatis, foliis ternatis stipulis dentatis, *Linn. syst. p.* 1160.

Anonis pusilla villosa, & viscosa purpurascente flore. *Tourn. inst.* 408.

ORCHIS rad. subrotundis, galea longissime rostrata, labello vomerem referente *Hall. orch. n.* 6.

Orchis macrophilla. *Col. ecphr. p.* 321.

ORCHIS radicibus subrotundis labello holosericeo emarginato, medio processu brevissimo *Hall. orch. n.* 5.

Orchis fucum referens major foliis superioribus candidis, & purpurascentibus. *Bauh. pin.* 83.

ORNITHOPUS foliis ternatis subsessilibus, impari maximo. *Linn. syst. p.* 1168.

Scorpioides postulacae folio. *Bauh. pin.* 287.

ORNITHOPUS foliis pinnatis, leguminibus subarcuatis, *Linn. syst. p.* 1168.

Ornithopodium minus. *Bauh. pin.* 350.

OTHONNA foliis pinnatifidis tomentosis, laciniis sinuatis; caule fruticoso. *Linn. syst. p.* 1235.

Jacoboea maritima. *Bauh. pin.* 131.

PAPAVER capsulis subglobosis torosis hispidis, caule folioso multifloro. *Linn. syst. p.* 1072.

Argemone capitulo breviore. *Bauh. pin.* 172.

PASSERINA foliis carnosis extus glabris, caulibus tomentosis. *Lynn. syst. p.* 1004.

Thymelaea tomentosa, foliis sedi minoris. *Bauh. pin.* 463.

PHILLYREA foliis lanceolatis inregerrimis. *Lin. hort. Cliff.*

Phillyrea angustifolia. *Bauh. pin.* 476.

PISTACIA foliis abrupte pinnatis: foliolis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 1290.

Lentiscus vulgaris. *Bauh. pin.* 399.

PISTACIA foliis impari-pinnatis: foliolis ovatolanceolatis. *Linn. syst. p.* 1290.

Tere-

Terebinthus vulgaris. *Bauh. pin.* 400.

PLANTAGO fol. linearibus dentatis, ſcapo tereti. *Linn. ſyſt. p.* 896.

Coronopus ſylveſtris hirſutior. *Bauh. pin.* 190.

PLANTAGO caule ramoſo ſuffruticoſo, foliis integerrimis, ſpicis aphyllis. *Linn. ſyſt. p.* 896.

Pſyllium majus erectum. *Bauh. pin.* 191.

PLANTAGO foliis lanceolatis flexuoſis villoſis, ſpica cylindrica erecta, ſcapo tereti foliis longiore. *Linn. ſyſt.* 895.

Holoſteum hirſutum albicans majus. *Bauh. pin.* 190.

POLYGALA floribus criſtatis racemoſis, caulibus herbaceis ſimplicibus procumbentibus, fol. lineari lanceolatis. *Linn. ſyſt. p.* 1154.

Polygala major. *Bauh. pin.* 215.

RHAMNUS inermis floribus diviſis ſtigmate triplici. *Linn. ſyſt. p.* 937.

Phylica elatior. *Bauh. pin.* 477.

RUBIA foliis ſenis. *Linn. ſyſt. p.* 893.

Rubia ſylveſtris aſpera. *Bauh. pin.* 33.

RUMEX floribus hermaphroditis: valvulis dentatis nudis, pedicellis planis reflexis. *Linn. ſyſt. p.* 990.

Acetoſa ocymi folio, bucephalophoros. *Col. ecphr.* 1. *p.* 151. *t.* 150.

SAGITTARIA foliis ſagittatis acutis. *Linn. ſyſt. p.* 1270.

Sagitta aquatica minor latifolia. *Bauh. pin.* 194.

SALVIA fol. ſinuato-ſerratis, corollis calyce anguſtioribus. *Linn. ſyſt. p.* 854.

Horminum verbenacae laciniis anguſtifolium. *Triumf. obſ.* 66. *t.* 66.

SCIRPUS culmo tereti nudo, ſpica ſubovata imbricata. *Linn. ſyſt. p.* 867.

Scirpus equiſeti capitulo majore. *T. Scheuchz. gram.* 360.

Scorpiurus pedunculis subquadrifloris ; leguminibus extrorsum spinis confertis acutis. *Linn. syst. p.* 1169.

Scorpioides bupleuri folio, corniculis asperis magis in se contortis, & convolutis. *Moris. hist.* 2. *p.* 127. *s.* 2. *t.* 11. *f. II.*

Scorzonera foliis linearibus dentatis acutis, caule erecto. *Linn. syst. p.* 1191.

Scorzonera foliis laciniatis. *Tournef. inst.* 477.

Scrophularia foliis cordatis: superioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris. *Linn. syst. p.* 1113.

Scrophularia peregrina. *Cam. hort.* 157. *t.* 43.

Scrophularia foliis cordatis, pedunculis axillaribus solitariis dichotomis. *Linn. syst. p.* 1114.

Scrophularia flore luteo. *Bauh. pin.* 236.

Sherardia foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus. *Linn. syst. p.* 590.

Rubeola arvensis repens caerulea. *Bauh. pin.* 334.

Sideritis herbacea decumbens, calycibus spinosis: labio superiore indiviso. *Linn. syst. p.* 1098.

Sideritis genus verticillis spinosis. *Bauh. pin. hist.* 3. *p.* 428.

Silene calycibus fructiferis pendulis inflatis angulis decem scabris. *Linn. syst. p.* 1032.

Viscago hirsuta sicula, lychnidis aquaticae facie supina. *Dill. elth.* 421. *t.* 312. *f.* 404.

Silene hirsuta, petalis emarginatis, flor. erectis, fructibus reflexis pedunculatis alternis. *Linn. syst. p.* 1031.

Viscago cerastii foliis, vasculis pendulis anglica. *Dill. elth.* 417. *t.* 309. *f.* 398.

Sisymbrium siliquis axillaribus sessilibus subulatis aggregatis, fol. repando-dentatis. *Linu. syst. p.* 1132.

Erysimum polyceratium s. corniculatum. *Bauh. pin.* 101.

Smilax caule aculeato angulato, foliis dentato-aculeatis, cordatis novemnerviis. *Linn. syst. p.* 1292.

Smilax aspera fructu rubente. *Bauh. pin.* 296.

Son-

Sonchus foliis omnibus integris denticulato ſpinoſis, ramis unifloris, ſemifloſculis quinquedentatis. *Enum. nic. p.* 85.
Sonchus pedunculo nudo, foliis lanceolatis amplexicaulibus indiviſis, retrorſum argute dentatis. *Linn. ſyſt. pag.* 1192. ?

Spartium foliis ternatis, ramis angulatis ſpinoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1156.
Acacia trifolia. *Bauh. pin.* 392.

Stachis ramis ramoſiſſimis, foliis lanceolatis glabris. *Linn. ſyſt. p.* 1110.
Sideritis viſcoſa cretica bitumen redolens. *Zan. hiſt.* 136.

Statice caule nudo paniculato, foliis ſpathulatis retuſis. *Linn. ſyſt. p.* 967.
Limonium maritimum minus, foliis cordatis. *Bauh. pin.* 192.

Tamus foliis cordatis indiviſis. *Linn. ſyſt. p.* 1292.
Bryonia ſylveſtris baccifera. *Bauh. prodr.* 135.

Teucrium foliis ſubtriſcupidatis linearibus, floribus ſeſſilibus. *Linn. ſyſt. p.* 1094.
Chamaepitys moſchata foliis ſerratis. *Bauh. pin.* 249.

Thlaspi ſiliculis ſubrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis ſubſerratis. *Linn. ſyſt. p.* 1128.
Thlaſpi arvenſe perfoliatum majus. *Bauh. pin.* 106.

Tragopogon calycibus corolla brevioribus inermibus, foliis lyrato ſinuatis. *Linn. ſyſt. p.* 1191.
Chondrilla foliis cichorei tomentoſis. *Bauh. pin.* 130.

Tragopogon calycibus corolla radio longioribus, foliis integris nudis, pedunc. ſuperne incraſſatis. *Linn. ſyſt. pag.* 1191.
Tragopogon purpuro-caeruleum, porri folio, quod Arteſi vulgo. *Bauh. pin.* 274.

Trapa. *Linn. ſyſt. p.* 898.
Tribulus aquaticus. *Bauh. pin.* 194.

Trifolium spicis subovatis, calycibus inflatis, dorso gibbis, caulibus prostratis. *Linn. syst. p.* 1178.

Trifolium pratense folliculatum. *Bauh. pin.* 329.

Trifolium spicis villosis ovalibus, dentibus calycinis setaceis aequalibus. *Linn. syst. p.* 1177.

Trifolium arvense humile spicatum s. Lagopus. *Bauh. pin.* 328.

Trifolium spicis villosis conico-oblongis, dentibus calycinis setaceis subaequalibus, foliolis linearibus. *Linn. syst. p.* 1177.

Trifolium montanum angustissimum spicatum. *Bauh. pin.* 328.

Valeriana floribus monandris, foliis pinnatifidis. *Linn. syst. p.* 860.

Valeriana foliis calcitrapae. *Bauh. pin.* 164.

Veronica racemis lateralibus, fol. ovatis rugosis dentatis sessilibus, caule debili. *Gerar. p.* 324. *Linn. syst. p.* 849.

Chamaedrys spuria minor rotundifolia. *Bauh. pin.* 249.

Veronica, floribus solitariis, fol. cordatis incisis pedunculo longioribus. *Linn. syst. p.* 849.

Alsine veronicae foliis, flosculis cauliculis adhaerentibus. *Bauh. pin.* 250.

Vicia leguminibus sessilibus reflexis pilosis pentaspermis, corollae vexillis villosis. *Linn. syst. p.* 1166.

Vicia siliquis sessilibus erectis foliis imis ovatis, superioribus linearibus. *Hall. helv. p.* 598.

Vicia angustifolia. *Riv. t.* 55.

Urtica foliis oppositis ovatis serratis, amentis fructiferis globosis. *Linn. syst. p.* 1265.

Urtica urens pilulas ferens. *Bauh. pin.* 232.

ADDI-

ADDITION AUX RÉFLEXIONS

Sur le Fluide Élaſtique

PAR M. DE SALUCE.

IL m'eſt tombé entre les mains un livre, qui a pour tître *l'Artillerie raiſonnée*, après que mon mémoire a été imprimé, & j'y ai trouvé quelques propoſitions, qui ſont entiérement oppoſées à ce que j'ai avancé, & qui en même-tems ne me ſemblent pas appuyées ni à une théorie fort-éclairée, ni à des expériences fort-exactes : je ne rapporterai que les plus frappantes de celles que j'ai déja parcouru.

1. La premiere (*pag.* 86.) porte en ſubſtance, qu'en parvenant à diſpoſer le canal de la lumiére de maniére que le feu prenne au centre de la charge, il en réſulte des petites différences dans les portées ; je ne lui conteſterai pas le fait, lorſque la charge ſera proportionnée à l'arme ; mai je dirai ſeulement en paſſant, que comme on réüſſit à accélérer par là l'inflammation totale de la poudre, on peut auſſi augmenter la charge, c'eſt enſuite à l'expérience à juger ſi l'avantage, qui réſulte ainſi d'un plus grand effort, n'eſt point balancé par bien d'autres inconvéniens, & entr' autres par ceux que nous avons indiqué (*pag.* 138.).

2. La ſeconde propoſition (*pag.* 91.) eſt que l'objet des chambres, qu'on fait aux piéces de 24 & de 16, *eſt de diminuer l'effort de la poudre ſur la lumiére*, ce qui eſt abſurde : car cet effort ſe faiſant par la diſtribution uniforme du fluide dévélopé, la preſſion eſt égale dans tous les points : il ſe ferait d'ailleurs exprimé plus exactement dans

la seconde raison, qu'il apporte, savoir de *la plus grande épaisseur* de l'arme dans cet endroit, s'il avait dit, que l'effet en est modifié.

3. La troisiéme, qu'il parait déduire de l'expérience (*pag.* 105.) ne me semble pas mériter d'être réfutée sérieusement; je ne fairai que la rapporter dans son entier, & je prierai les Lecteurs de voir ce que j'ai dit à cet égard dans le Chap.e premier; *L'on a trouvé*, dit-il, *que les piéces chargées sans bouchon sur la poudre portoient réguliérement plus loin, que celles qu'on tirait avec des bouchons refoulés, savoir de six ou huit coups sur la poudre, suivant l'usage, & de six sur le boulet &c.* Nous observerons enfin, qu'il faut qu'il ait employé de très-petites quantités de poudre dans les piéces, dont il a fait usage, & cela devient alors très-naturel; mais c'est un des préjugés, dont on n'a pas encore pû se défaire, & qui est la source de beaucoup de maximes équivoques, & souvent fausses; nous en avons un exemple dans *la théorie du jet des bombes*, que les Auteurs modernes n'ont pas encore voulu abandonner, quelqu'un d'entr'eux s'efforçant même de nous persuader, qu'elle est assès exacte, & que les différences, qui résultent dans la pratique ne sont d'aucune considération: généralement je crois, que les essais en petit dans ce qui regarde l'Artillerie sont non seulement superflus, mais même pernicieux, parceque nous ne connaissons point les loix, suivant lesquelles agissent toutes les causes, qui concourent dans un effet; c'est pour cela aussi que tous les Problèmes qui y ont raport se réduisent en parlant à la rigueur à des cas particuliers.

4. L'expérience nous apprend, que de deux qualités de poudre il arrive souvent, que dans les petites charges une a l'avantage sur l'autre, & que non seulement elle ne le conserve plus dans les grandes (*a*), mais que sa force en est alors diminuée, & j'observe, que c'est celle, qui est plus

(*a*) Manuel de l'Artificier. pag. 16.

plus facile à s'enflammer, jufqu'à un certain point, qui a l'avantage dans les petites charges, & au contraire, que celle qui a moins d'inflammabilité gagne dans le fervice en grand.

Ne ferait-ce point, parceque dans les grandes charges le plus ou moins grand effort, dépand entiérement de l'intenfité de la flamme dont la matière eft fufceptible, au lieu que dans les petites charges il n'eft pas néceffaire, qu'elle foit fi grande, parceque elles font bien-tôt détruites, & qu'elles font dans un moindre raport avec l'arme, pendant que le diamètre de la lumiére femble en avoir un plus grand dans les petites, que dans les grandes armes?

5. Je ne fais de même pas concevoir ce qu'il prétend déduire par ce raifonnement (*pag.* 142. *à la fin*): "*Le peu de longueur de l'ame du canon fait auffi que le boulet perd moins de fon mouvement, & qu'il éprouve une moindre réfiftance de la part de l'air qui s'oppofe à fa fortie.* Cette raifon de la *moindre réfiftance de la part de l'air* ne me parait pas conforme aux principes de phyfique, car la colonne d'air péfe & refifte également fur un cilindre, qu'il foit court ou long, puifqu'elle eft toujours en équilibre avec le refte de l'Atmofphére.

ERRATA, ET ADDENDA.

Pag.	6.	lin. 12.	tranfverfum	*lege* tranfverfim
		24.	&	ei
	8.	7.	Ammeniana	Ammaniana
	9.	3.	calyci	calyce
	9.	18.	un	um den
	11.	25.	albidus	dilute violaceus
	12.	32.	fulco	& fulco
	15.	6.	feparat	fuperat
		18.	aliis	alis
	16.	14.	autem	*dele* autem
	18.	19.	parum	ex

Pag. 19.	lin. ult.	*Ebro*	*Ebrodunum*
27.	13.	neutrum	neutra
29.	3.	Jeman	Alysso M.
31.	23. & 24.	*dele* in M. Chetillon &c. usque ad provenit	
33.	8.	forte	fere
37.	23.	recentiorem	recentiorum
39.	7.	lutea	lutea sunt
44.	27.		*dele* ad caulem
45.	7.		*dele* synonimum columnae
	14.	ad caulem	amplexicaulibus
Pag. 51.	lin. 28.	*Lamium montanum &c.* leg. *Lamium garganicum subinc. fl. purpurasc. cum labio superio crenato D. Micheli apud* TILLI *pis.*	
52.	3.	Cilnopodium	leg. Clinopodium
53.	4.	psiyllium	psyllium
53.	10. . . . . . . 16.		campanulatum
55.	6.	triba	triloba
55.	18.	phisalodes	physalodes
62.	27. . . . . . . 57.		Cardamine lunaria
63.	7.	viscosum	viscosa
64.	3.	hirsutus	hirsuta
	19.	squarrosum	incarnatum
65.	4.	galloprovinciale	caput galli
66.	17.	biennis	pimpinelloides
69.	14.	serpilifolia	serpillifolia
70.	19.	*Monostylae*	1. *Monostylae*
71.	7.	Aquilegia silvestris	Aquilegia silvestris*
	8.	Nigella damascena	Nigella damascena*
	18.	ulmaria	ulmaria *
73.	11.	*Tetrantherae*	*Pentantherae*
75.	24.	scalinus	secalinus

Stirpes praetermiſſae. ſuis locis inſerendae.

Pag. 50.		Veronica latifolia. *
		Valeriana rubra *
51.	Poſt *Thymum*	Hyſſopus officinalis *
		Satureja juliana *
		hortenſis *
		montana *
	Ante *Lamium*	Ocynum baſilicum
		fruteſcens
52.		Meliſſa grandiflora *
53.		Antirrhinum minus *
		Scrophularia vernalis *
54.	Poſt *Ilicem aquifolium*	Vitex agnus caſtus
57.		Ariſtolochia piſtolochia
59.		Santolina annua
62.		Eryſinum cheirantoides
65.		Lathyrus articulatus
		Robinia caragana
		Sium ſiculum
66.		Chaerefolium aromaticum
67.		Malva hiſpanica
68.		Rhus vernix
		toxicodendron
70.		Crataegus aria *
		Meſpilus cotoneaſter *
71.		Aquilegia alpina *
71.	Poſt *Iſopyrum*	Ranunculus ficaria *
		ſceleratus *
		aconitifolius *
		nivalis *
		bulboſus *
		repens *
		acris *
		arvenſis *
		aſiaticus

Pag.

Pag. 71. Potentilla verna *
rupeſtris *
ſupina
Potentilla *foliis ternatis hirſutis caule erecto umbellifero.* HALL. *gott. p.* 108.
71. Geum montanum *
71. Poſt *Geum* Drias octopetala *
74. Polygonum divaricatum *
75. Poſt *cyperum* Scirpus paluſtris *
76. Poſt *rutam murariam* Aſplenium . . . *lingua cervina foliis coſtae innaſcentibus* T.
76. Polipodium cambricum

Pag.	lin.		leg.
80.	5.	praecipuae	praecipue
82.	23.	erupuiſſe	erupiſſe
	25.	ſpatium , exiguum	ſpatium exiguum
84.	14.	quidquod	quid quod
	28.	centeſima	centeſimam
86.	19.	tympanitide	tympanite
91.	16.	cruſta in	cruſta quando in
92.	21.	ut praeterea	ut propterea
144.	pen.	alkalici	alkalicis
148.	7.	bacillo , fit	bacillo fit ,
162.	9.	(*k*)	(*l*)
	10.	(*l*)	(*k*)
	17.	Vid. inf. not. *g.*	Vid. inf. not. *q.*
	pen.	admicta	admixta
163.	pen.	*refroit-elle*	*refroidit-elle*
180.	25.	tollerent	tolerent
189.	ult.	elatetium	elaterium
195.	16.	quando	quomodo
	29.	aëri	aëre
198.	7.	quae rarior aër	quo rarior aër
205.	19.	candatis	caudatis
210.	1.		*dele*

LETTRE

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

Depuis ma derniére lettre j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du Son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, & quoique je ne doute pas que Vous n'y soyés parvenu plus heureusement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illustre Société qu'en lui présentant mes Recherches sur ce même sujet.

Recherches sur la propagation des ébranlemens dans une milieu élastique.

En considérant le milieu dans l'état d'équilibre soit sa densité $= 1$, & son élasticité balancée par le poid d'une colomne du même fluide, dont la hauteur $= h$; Je commence par considérer un élément quelconque du fluide qui dans l'état d'équilibre se trouve au point Z (*fig.* 1.) déterminé par les trois coordonnées perpendiculaires entr'elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l'agitation ce même élément ait été transporté en z, dont les coordonnées soient $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$, qui seront certaines fonctions des premiéres X, Y, Z pour un instant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ$$
$$dz = SdX + TdY + VdZ.$$

Ensuite je considére un volume infiniment petit de fluide, qui dans l'état d'équilibre ait la figure piramidale $Z\xi\eta\theta$ (*fig.* 2.) rectangulaire, qui par l'agitation soit transporté en $z\lambda\mu\nu$, dont la figure sera aussi piramidale, & posant pour l'état d'équilibre

du point	les coordonnées
Z	$X, \quad Y, \quad Z$
ξ	$X+\alpha, Y, \quad Z$
η	$X, \quad Y+\beta, Z$
θ	$X, \quad Y, \quad Z+\gamma$

le volume de la piramide $Z\xi\eta\theta$ sera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$.
On aura ensuite pour l'état d'agitation

du point	les trois coordonnées		
ζ.	$Ax = x,$	$xy = y,$	$y\zeta = \zeta$
λ.	$AL = x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\gamma = \zeta + S\alpha$
μ.	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = \zeta + T\beta$
ν.	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = \zeta + V\gamma$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle piramide $\zeta\lambda\mu\nu$, qu'on voit être composée de ces prismes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la solidité de chaque part, on trouvera cette solidité =

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + n\nu)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(y\zeta + m\mu + n\nu)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda + m\mu + n\nu)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + m\mu)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + V\gamma)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$-\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn - \frac{1}{3}T\beta\Delta yln + \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm.$$

Ensuite

Ensuite on trouve les aires de ces triangles, à cause de $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il suit

$$\Delta ymn = \frac{1}{2}\, xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2}\, MN(2y + Q\beta + R\gamma) - \frac{1}{2}\, xN(2y + R\gamma) = \frac{1}{2}\, Q\beta \times xN - \frac{1}{2}\, R\gamma \times xM = \frac{1}{2}\, \beta\gamma\,(NQ - MR).$$

$$\Delta yln = \frac{1}{2}\, xN(2y + R\gamma) + \frac{1}{2}\, LN(2y + P\alpha + R\gamma) - \frac{1}{2}\, xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2}\, R\gamma \times xL - \frac{1}{2}\, P\alpha \times xN = \frac{1}{2}\, \alpha\gamma\,(LR - NP).$$

$$\Delta ylm = \frac{1}{2}\, xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2}\, LM(2y + P\alpha + Q\beta) - \frac{1}{2}\, xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2}\, Q\beta \times xL - \frac{1}{2}\, P\alpha \times xM = \frac{1}{2}\, \alpha\beta\,(LQ - MP).$$

De-là nous tirons la solidité de notre piramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans l'état d'agitation $= -\frac{1}{6}\,\alpha\beta\gamma S\,(NQ - MR) - \frac{1}{6}\,\alpha\beta\gamma T\,(LR - NP) + \frac{1}{6}\,\alpha\beta\gamma V\,(LQ - MP)$, & partant la densité du milieu agité en ζ sera $= 1 : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, & posant Π pour la hauteur de la colomne qui y balance l'élasticité, nous aurons $\Pi = h : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z posons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de sorte que $E = (\frac{d\Pi}{dX})$, $F = (\frac{d\Pi}{dY})$, $G = (\frac{d\Pi}{dZ})$. Soit pour abréger

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K$, de ſorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; ſi nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point ſe trouvera après l'agitation en z', dont les coordonnées ſeront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$z + SdX + TdY + VdZ,$$

donc réciproquement la poſition du point z' infiniment proche de z dans l'état troublé étant donnée par les coordonnées $X + \alpha$, $Y + \beta$, $Z + \gamma$ ſon lieu dans l'état d'équilibre ſera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de ſorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$
$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$
$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

Delà l'élaſticité en z étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle ſera en $z' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$, ou bien ſi nous poſons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élaſticité en z' ſera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$ la denſité y étant $\frac{1}{K}$.

Conſidérons maintenant un parallélepipéde rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 3.) dont les cotés paralleles à nos

nos coordonnées ſoient $zb = \alpha$, $zc = \beta$, $zd = \gamma$, ſon volume ſera $= \alpha\beta\gamma$ & ſa maſſe $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepipéde eſt ſollicité, cherchons d'abord l'élaſticité du milieu à chacun de ſes angles de la manière ſuivante

du point	les coordonnées			l'élaſticité
z	x,	y,	z,	Π
b	$x + \alpha$,	y,	z,	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	x,	$y + \beta$,	z,	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x + \alpha$,	$y + \beta$,	z,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
α	x,	y,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x + \alpha$,	y,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	x,	$y + \beta$,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x + \alpha$,	$y + \beta$,	$z + \gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il eſt clair, que conſidérant les faces oppoſées $zc\alpha\gamma$ & $bd\beta\delta$, les preſſions ſur celle-ci ſurpaſſent les preſſions ſur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l'aire de ces faces étant $\beta\gamma$, il en réſulte une force ſuivant la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepipéde ſera pouſſé ſuivant la direction xy par la force $= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, & ſuivant la direction yz par la force $= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$. Donc la

maſſe

maſſe de ce parallélepipéde étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ ſi nous introduiſons la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde, en exprimant le tems écoulé t en ſecondes, nous aurons pour la connoiſſance du mouvement les trois équations ſuivantes.

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA,$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB,$$
$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations poſſibles, je ne conſidére ici que les cas où ces agitations ſont quaſi infiniment petites; pour cet effet je poſe $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de ſorte que p, q, r ſont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L - 1)\,dX + MdY + NdZ;$$
$$dq = PdX + (Q - 1)\,dY + RdZ$$
$$dr = SdX + TdV + (V - 1)\,dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$, & $K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)$$
$$F = -h\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)$$
$$G = -h\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)$$

Enſuite nous trouvons $A = E$, $B = F$, $C = G$. Pour nous débaraſſer encore des autres lettres, remarquons que $L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right)$, $Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right)$, $V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$ de ſorte qu'outre les coordonnées X, Y, Z, avec le tems t

il

il ne reſte dans le calcul que les lettres p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point. Car ſubſtituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement cauſé par une agitation quelconque mais fort petite, ſera déterminé par les trois équations ſuivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right).$$

ou bien poſant $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = u$ nous aurons

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dX}\right),\ \left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dY}\right),\ \&$$

$\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dZ}\right)$, d'où il eſt aiſé de conclure

$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)$, d'où il faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z, & le tems t.

Delà il n'eſt pas difficile de trouver une infinité de ſolutions particuliéres, comme

$$p = \beta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$q = \gamma\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$r = \delta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvû que $\alpha = \sqrt{2gh\,(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}$ où β, γ, δ ſont des quantités quelconques, & φ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre deſſein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit eſpace, d'où il s'eſt répandu enſuite en tout ſens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agitation primitive & poſons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s ſera une fonction du tems t, & de la quantité $\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = V$ qui marque la diſtance du point A. Donc puiſque $ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV\left(\frac{ds}{dV}\right)$ nous aurons $ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + \left(\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}\right) \times \left(\frac{ds}{dV}\right)$, & puis $\left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dr}{dZ}\right) = s + \frac{Z^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, donc $u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right)$; maintenant aiant $\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V}$, notre première équation deviendra $\frac{X}{2gb}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$ ou $\frac{1}{2gb}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$, à laquelle ſe réduiſent auſſi les deux autres; & l'éloignement du point Z depuis le centre A ſera $Vs = s\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = \sqrt{(pp + qq + rr)}$ qui en marque le déplacement par rapport à l' état d' équilibre, de ſorte que le rayon d'une couche ſphérique, qui dans l' état d' équilibre étoit $= V$, ſera à préſent $= V + Vs$. Donc ſi nous poſons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$ afin que u exprime le changement de cette couche, la particule u ſera déterminée par cette équation

$$\frac{1}{2gb}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Après pluſieurs recherches j' ai enfin trouvé que cette équation admet une réſolution générale ſemblable au cas, où l' on ne ſuppoſe à l' air qu'une ſeule dimenſion. Que

Φζ

φz marque une fonction quelconque de z, & qu'on indique son différentiel de cette façon $d \cdot \varphi z = dz\, \varphi' z$. Cela posé, on verra qu'on satisfait à notre équation en supposant

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V \pm t\sqrt{(2ggh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V \pm t\sqrt{(2gh)}].$$

Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2}\varphi V - \frac{A}{V}\varphi' V$; d'où l'on voit que pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction φz doit toujours être $= 0$ excepté le cas, où la quantité z est extrémement petite. Or il faut que la fonction $\varphi' z$ ait la même proprieté & encore celle-ci $\varphi'' z$, en supposant $d\varphi' z = dz\, \varphi'' z$, afin que non seulement la quantité u, mais aussi la vitesse $(\frac{du}{dt})$ s'évanoüisse au commencement par tout, excepté dans le petit espace autour de A où s'est fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, & nous aurons la solution générale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V + t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B}{V^2}\psi[V - t\sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$

& pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V^2}\varphi'[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V}\varphi''[V + t\sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V^2}\psi'[V - t\sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V}\psi''[V - t\sqrt{(2gh)}].$$

Delà il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon $= V$ demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{(2gh)}$ ne

ne devient aſsès petite, ou moindre que le rayon de la petite ſpére ébranlée au commencement; & partant l'agitation primitive ſera répandue à la diſtance $= V$ après le tems $t = \frac{V}{\sqrt{(2gh)}}$ ſecondes, d'où il s'enſuit la même viteſſe du Son que Newton a trouvé, c'eſt-à-dire plus petite que ſelon les expériences. D'où je conclus qu'aïant ſuppoſé dans ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur cauſe une propagation plus prompte.

Enſuite ces formules nous apprennent que lorſque les diſtances V ſont fort grandes, en ſorte que les termes diviſés par V^2 s'évanoüiſſent à l'égard des autres diviſés par V, tant les petits eſpaces u, que les viteſſes $(\frac{du}{dt})$ diminuent en raiſon des diſtances; d'où l'on peut juſtement juger de l'affoibliſſement du Son par des grandes diſtances.

Voila mes Recherches que vous pourrés inſérer, MONSIEUR, *dans vôtre ſecond Volume ſi vous le jugés à propos, &c.*

Berlin ce 1.^r Janvier 1760.

NOUVELLES RECHERCHES
SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. DE LA GRANGE.

CHAPITRE PREMIER.

Remarques sur la Théorie de la propagation du Son, donnée par M. Newton.

1. Soient (*fig.* * *plan.* 1.) E, F, G trois particules d'air en repos, placées sur la droite BC à des distances égales l'une de l'autre; imaginons que ces particules parviennent, dans un tems quelconque t, en ε, φ, γ; & supposons avec M. Newton (*Prop.* 47. *liv. II. des Principes Mathématiques*) que la loi de leur mouvement soit renfermée dans une seule courbe PKS (*fig.* ** *plan.* 1.) de telle maniére qu'en faisant $PH = t$ & prenant les portions d'arc HI, IK égales entr'elles, & qui aient un rapport donné aux distances primitives EF, FG, les abscisses correspondantes PL, PM, PN soient égales aux espaces parcourus $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$; il est clair qu'on aura $\varepsilon\gamma = EG - LN$; par conséquent, si on suppose que l'élasticité de l'air soit en raison inverse de sa densité, l'élasticité de l'air condensé en $\varepsilon\gamma$ sera à son élasticité naturelle, que je nomme E, en raison inverse de $\varepsilon\gamma$ à EG, ou de $EG - LN$ à EG; donc l'élasticité de la particule F transportée en φ, sera exprimée par $\frac{E \times EG}{EG - LN}$. Par le même raisonnement on trouvera, en coupant dans l'arc PKS, les parties HF, DK égales à HI, IK, & menant les ordonnées FQ, DR, que l'élasticité de la particule E en ε sera $= \frac{E \times EG}{EG - QM}$, & celle de la particule G en $\gamma = \frac{E \times EG}{EG - MR}$; d'où l'excès de l'élasticité de l'air en ε sur son élasticité

 en

en γ sera $E \times EG \times (\frac{1}{EG - QM} - \frac{1}{EG - MR}) = E \times EG \times \frac{QM - MR}{(EG - QM) \times (EG - MR)} =$ (à cause que les excursions des particules sont fort petites par l' hyp.) $E \times \frac{QM - MR}{EG}$. Cette quantité est la force qui fait mouvoir la partie du milieu φ, ou $\varepsilon\gamma$, dont la masse est $D \times EG$, en posant D pour la densité naturelle de l'air; donc la force accélératrice de la particule φ sera $= \frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2}$; or la loi du mouvement de cette particule demande qu'elle soit sollicitée par une force accélératrice $= \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{DI^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$, b étant la hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems T; donc on doit avoir $\frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$ ce qui se réduit, en supposant $KH = \alpha EG$, à $\frac{E}{D} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{1}{\alpha^2}$; d' où l' on tire $\alpha = \pm \surd (\frac{T^2 D}{2Eb})$, la nature de la courbe PKS demeurant indéterminée.

Delà résulte donc cette conclusion, dont l'exactitude ne peut être révoquée en doute, savoir que la loi des mouvemens des particules de l'air, n' est pas unique & déterminée, comme l' a crû M. Newton, mais que, soit celle des pendules adoptée par ce grand Géomètre, soit celle des corps qui tombent par leur pésanteur, que M. Cramer jugeoit absurde & contradictoire, ou toute autre qu'on imagine à volonté, a également lieu & peut être indifféremment emploïée dans la solution Analitique. Je dis dans la *solution Analitique*: car, lorsqu'il s'agira de déterminer cette loi dans des cas particuliers, il faudra encore avoir égard aux premiers ébranlemens des particules, donnés par l'hypotése.

2. J'avois

2. J'avois déja trouvé cette conclusion générale dans le premier Chap. de mes *Recherches sur la nature & la propagation du Son* (*) imprimées dans le Volume précédent; mais elle m'avoit paru alors si paradoxe & si éloignée de la nature de la question que j'avois cru pouvoir la regarder comme une preuve de l'insuffisance des Principes de M. Newton. Or je vais démontrer ici que cette même conclusion est au contraire entiérement conforme à la Théorie de la propagation du Son que j'ai donnée dans le Chap. I. de la seconde Section des *Rech. citées.*

Qu'on considére une particule quelconque de la fibre AD dont la distance à la particule E soit x dans l'état d'équilibre; on trouvera aisément, par la construction ci-dessus, que l'espace parcouru par cette particule dans le tems t sera égal à l'abscisse qui répond à l'arc $PH = t$ diminué d'un arc $= \alpha x$; c'est-à-dire à un arc $= t - \alpha x$. Or quelle que soit la nature de la courbe PHS, il est constant qu'on peut en regarder les arcs, comme des fonctions données des abscisses correspondantes, & de même les abscisses comme des fonctions des arcs; donc l'espace parcouru par une particule quelconque de la fibre AD, pendant le tems t sera exprimé généralement par $\varphi\,(t - \alpha x)$. Cette formule en faisant $t = 0$ doit représenter les ébranlemens primitifs de la fibre AD; donc, si on suppose comme dans l'endroit cité des *Rech. préc.* qu'une particule quelconque E soit ébranlée par le corps sonore, il faudra que la fonction $\varphi\,(- \alpha x)$ soit toujours nulle, excepté lorsque $x = 0$. Par conséquent la formule générale $\varphi\,(t - \alpha x)$ aura seulement une valeur réelle, lorsque $t - \alpha x = 0$, savoir $x = \frac{t}{\alpha}$; par où l'on voit que

l'ébran-

(*) Comme j'aurai souvent occasion dans la suite de renvoïer à ces mêmes *Recherches* je les appellerai simplement *Recherches précédentes*, & j'en citerai les Chapitres & les Articles en chiffre Romain pour les distinguer de ceux de la Dissertation présente.

l'ébranlement excité dans la particule E ſe propagera dans la fibre AD de maniére que, dans un tems quelconque t, il parviendra à la particule qui eſt diſtante de la E par l'eſpace $\frac{t}{\alpha}$; d'où il s'enſuit que la viteſſe du Son ſera uniforme & $= \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\surd(\frac{T^2 D}{2 E h})} = \surd(\frac{2 E h}{T^2 D})$ = (en mettant au lieu de $\frac{E}{D}$ la hauteur A de l'air ſuppoſé homogéne) $\frac{\surd 2 A h}{T}$ ce qui s'accorde avec *l'Art. LVI. des Rech. préc.*, & avec ce que M. Newton a trouvé par une méthode differénte. *Prop.* 49. *liv. II. des Principes*.

Au reſte il eſt clair, qu'à cauſe de l'ambiguité des ſignes de la valeur de α, la formule $\varphi\,(t - \alpha x)$ renfermera réellement les deux formules $\varphi\,(t - \frac{x}{\surd c})$, $\varphi\,(t + \frac{x}{\surd c})$ en poſant, pour abreger, c au lieu de $\frac{2 h A}{T^2}$; donc, en prenant deux fonctions differéntes l'une pour le ſigne +, & l'autre pour le ſigne −, & les ajoutant enſemble, on aura $\varphi\,(t - \frac{x}{\surd c}) + \psi\,(t + \frac{x}{\surd c})$: pour l'expreſſion générale de l'eſpace parcouru par chaque particule de la fibre AD dans un tems quelconque t.

Nous verrons dans la ſuite les conſéquences qui réſultent de cette formule par rapport à la propagation du Son conſidérée d'une maniére générale; mais nous remarquerons d'avance que la viteſſe de la propagation eſt toujours $= \surd c$ comme on l'a trouvé ci-deſſus dans un cas particulier.

3. Telle eſt la ſolution générale qui peut ſe déduire des Principes de M. Newton; cet illuſtre Auteur n'en a tiré cepen-

cependant qu'une solution assès particuliére, & même peu exacte, mais qui l'a conduit néanmoins au même résultat sur la vitesse de la propagation. C'est ce qu'il faut développer.

M. Newton commence par supposer que la courbe *PKS* est un cercle dont le diamètre *PS* est égal à la plus grande excursion *Ee* de la particule *E*, & dont la circonférence est à l'intervalle *BC des pulsions* comme *KH* à *EG*, savoir comme $\alpha : 1$ selon nos dénominations; d'où il résulte que le mouvement de chaque particule d'air est le même que celui d'un pendule qui décrit des arcs de cicloïde, & que la durée de chaque oscillation est égale à la circonférence entiére du cercle *PKSkP*, savoir $\alpha BC = \frac{T}{\sqrt{2hA}} BC$.

M. Newton suppose ensuite que, dans le tems d'une oscillation, *la pulsion* en avançant parcoure sa largeur *BC*; c'est-à-dire qu'il se forme en *CD* une nouvelle fibre sonore *CD* égale à la premiére *BC*; d'où il déduit la vitesse du Son $= \frac{\sqrt{2hA} \times BC}{T \times BC} = \frac{\sqrt{2hA}}{T}$ précisément comme on l'a trouvé ci-dessus.

Je remarque d'abord que la premiére hypotése de M. Newton, savoir que la courbe *PKS* soit un cercle, ne peut être admise qu'analitiquement, & non rélativement à la question de la propagation du Son. Car 1.° Les ébranlemens primitifs dépendent absolument de l'impulsion du corps sonore, laquelle peut étre quelconque; par conséquent il est impossible que ces ébranlemens soient toujours exprimés par la même courbe, & encore moins par un cercle; 2.° Comme le cercle est une courbe rentrente, il est clair qu'on peut toujours trouver un arc $= t - \alpha x$, dont l'abscisse représentera (suivant la construction) l'excursion d'une particule quelconque distante comme l'on voudra de la particule *E*; d'où il s'ensuit que toutes les

par-

particules de la fibre *AD* infiniment prolongée de part & d'autre doivent être toutes en mouvement à la fois ; ce qui détruit la propagation du Son, & eſt directement contraire à la nature même de la queſtion.

A l'égard des oſcillations des particules qui forment *la pulſion BC*, nous démontrerons plus bas (*Art.* 15.) que leur durée eſt toujours la même quelle que puiſſe être la nature de cette *pulſion*; & qu'ainſi la formule $\frac{\sqrt{2hA}}{T} \times BC$, que donne l'hypotéſe particuliére de M. Newton, eſt exacte & conforme à la véritable Théorie de la propagation du Son.

Il en eſt de même de l'autre hypotéſe de M. Newton, ſavoir, qu'il s'engendre une ſeconde fibre égale à la premiére, lorſque cette premiére a achevé une vibration entiére. Cette hypotéſe eſt légitime, comme on le verra plus bas (*Art.* 12. 15.) ; mais doit-on l'admettre ſans la démontrer ? On eſt d'autant plus en droit d'en exiger la démonſtration que, ſuivant la conſtruction de M. Newton, les *pulſions AB*, *BC*, *CD &c.* ne ſe forment point l'une après l'autre, mais exiſtent toutes à la fois & ne font que changer de place ſur la fibre *AD*, comme il eſt aiſé de s'en convaincre en examinant cette conſtruction.

En voila aſſès pour prouver l'inſuffiſance de la Théorie de M. Newton, & pour rendre raiſon pourquoi elle conduit néanmoins aux véritables loix de la propagation du Son.

4. Nous venons de montrer que la courbe *PKS* ne peut être un cercle. Or je dis qu'elle ne peut pas même être une courbe algébrique, ou tranſcendante. Pour le prouver je remarque que la fonction $\varphi(t - \frac{xT}{\sqrt{2hA}})$ qui repréſente en général les excurſions des particules de la fibre *AD* pour un tems quelconque t, doit auſſi repréſenter les excurſions primitives, telles qu'elles ſont engendrées dans le premier inſtant par l'action du corps ſono-

re

re ſur les particules de l' air contigu. Or il eſt clair que cette impreſſion ne ſauroit s'étendre à l'infini, mais qu'elle devra même être renfermée dans un très-petit eſpace autour du corps, à cauſe de l'extrème petiteſſe de ſes vibrations; d' où il ſuit, que dans le premier inſtant il ne peut y avoir qu'un certain nombre de particules, dans la fibre aérienne, qui ſoient miſes en mouvement, & pour leſquelles la valeur de $\varphi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2hA}}\right)$ doive être réelle; il faudra en conſéquence, pour remplir cette condition, que la fonction $\varphi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2hA}}\right)$ s' évanoüiſſe toujours d' elle même, lorſque, t étant $= 0$, x ſurpaſſera une quantité donnée. Soit a la longueur de la portion de la fibre qui eſt ébranlée au commencement, il faudra avoir en général $\varphi\left(- \frac{(a+z)T}{\sqrt{2hA}}\right) = 0$, prenant pour z une quantité quelconque poſitive.

Telle devra donc être la nature de la courbe PHS, d'où dépend la valeur de φ, que tous les arcs exprimés par $- \frac{(a+z)T}{\sqrt{2hA}}$ répondent toujours au même point de l'axe, où les abſciſſes ont leur origine; c' eſt ce qui ne ſauroit avoir lieu dans aucune courbe ſoit géométrique, ſoit tranſcendante, puiſque il faudroit pour cela que dans un tel point elle ſe transforma tout-à-coup en une droite perpendiculaire à l' axe.

CHAPITRE II.

Des fonctions irrégulières & discontinues.

OBSERVATIONS

Sur la nature & l'usage de ces fonctions.

5. NOus venons de démontrer que, pour trouver les ébranlemens des particules de l' air dans le cas de la nature, il faut se servir d' une ligne courbe, dont le cours devienne tout-à-coup rectiligne en un point donné, condition qui est absolument incompatible avec la loi de continuité, à laquelle toutes les courbes soit algébriques, soit mécaniques sont nécessairement soumises.

Delà on voit la nécessité d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles, que les Géomètres ont considéré jusqu'à présent, & d' emploïer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, & qu'on peut très-bien appeller fonctions *irrégulières* & *discontinues*. Mais ce n'est pas ici le seul usage qu'on doit faire de ces sortes de fonctions; elles sont nécessaires pour un grand nombre de questions importantes de Dinamique & d'Hidrodinamique. Car, lorsque on a un sistème de corps, ou de points mobiles, dont le nombre est infini, & qu'on en cherche les mouvemens, après les avoir, comme que ce soit, derangé de leur état d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mouvemens ne pourront être contenus dans une même formule, à moins qu'elle ne soit aussi applicable au prémier état du sistème, qui est tout-à-fait arbitraire, & dans lequel la loi de continuité est le plus souvent violée;

M. Euler

M. Euler eſt, je crois, le prémier qui ait introduit dans l' Analiſe ce nouveau genre de fonctions, dans ſa ſolution du problême *de chordis vibrantibus* qui rentre dans la claſſe de ceux, dont nous venons de parler; mais nous avons expoſé ailleurs (*art.* XV. *Rech. préc.*) les difficultés, dont cette ſolution eſt ſuſceptible, & la néceſſité où l' on étoit de l' établir & de la confirmer par une métode auſſi directe & rigoureuſe que celle que nous avons donné dans le *Chap.* V. *des Rech. citées*; M. Euler même m'a fait l'honneur de me l' avoüer dans une lettre particuliére qu'il m'a écrit au ſujet de ma Théorie ſur le Son. Cette métode cependant qui conſiſte à regarder d' abord le nombre des corps mobiles comme fini & indéterminé, eſt extrémement pénible & embaraſſante, & elle le devient encor beaucoup plus, lorſqu'il s' agit de rendre leur nombre infini. Un tel paſſage du fini à l' infini dans mes formules, n'aïant pas paru aſsès évident & démonſtratif à deux grands Géomètres, Mrs. Daniel Bernoulli & D' Alembert, comme ils ont daigné me le faire ſentir dans des lettres particuliéres; j' ai cru devoir chercher de nouveau une autre méthode plus ſimple, par laquelle on pût éviter tous les embaras qui ſe rencontrent dans la transformation des formules, & qui leva de même tous les doutes qui pourroient encore ſe préſenter ſur l' exactitude de mes réſultats.

PROBLEME I.

6. *ETant donné un ſiſtème d'un nombre infini de points mobiles, dont chacun dans l' état d'équilibre ſoit déterminé par la variable* x, *& dont le prémier & le dernier qui répondent à* $x = 0$, *& à* $x = a$ *ſoient ſuppoſés fixes; trouver les mouvemens de tous les points intermédiaires, dont la loi*

eſt

est contenue dans la formule $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, *z étant l'espace décrit par chacun d'eux durant un tems quelconque* t.

Qu'on multiplie cette équation par Mdx, M étant une fonction quelconque de x, & qu'on l'intégre en ne faisant varier que l'x; il est clair, que si dans cette intégrale prise ensorte qu'elle évanoüisse lorsque $x = 0$, on fait $x = a$, on aura la somme de toutes les valeurs particuliéres de la formule $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx$, qui répondent à chaque point mobile du sistème donné. Cette somme sera donc $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx$.

Or l'intégrale $\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx$, où la différence d^2z ne dépand que de la variable x, peut se transformer par les régles connues en $\left(\frac{dz}{dx}\right) M - \int\left(\frac{dz}{dx}\right) \times \left(\frac{dM}{dx}\right) dx$; cette derniére intégrale se change de même en $z\left(\frac{dM}{dx}\right) - \int z\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$; de sorte qu'on aura $\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx = \left(\frac{dz}{dx}\right) M - z\left(\frac{dM}{dx}\right) + \int z\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$; or puisque $\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx$ est $= 0$, lorsque $x = 0$, si on suppose que $\int z\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$ le soit aussi, il faudra que $\left(\frac{dz}{dx}\right) M - z\left(\frac{dM}{dx}\right)$ évanoüisse de même dans ce point; mais par hipotése l'on a ici $z = 0$, donc il suffira que l'on ait $\left(\frac{dz}{dx}\right) M = 0$, ou bien $M = 0$, lorsque $x = 0$.

Par

Par là notre équation intégrale deviendra $\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx$ $= c [(\frac{dz}{dx}) M - z (\frac{dM}{dx})] + c \int z (\frac{d^2 M}{dx^2}) dx$.
Posons $x = a$; & puisque z s'évanoüit de nouveau par hipotése, faisons disparoître de même l'autre terme $(\frac{dz}{dx}) M$ par une valeur convenable de M.

Il ne restera, après cela, que la simple équation

$$\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx = c \int z (\frac{d^2 M}{dx^2}) dx.$$

Soit supposé $(\frac{d^2 M}{dx^2}) = kM$, k désignant une constante indéterminée dont on trouvera la valeur au moïen des conditions qu'on a déja attaché à la quantité M; on aura $\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx = kc \int z M dx$.

Soit encore $\int z M dx = s$; prenant la différence de part & d'autre, dans la supposition que le seul t soit variable, on a, à cause de $M =$ fonct. x; $\int (\frac{dz}{dt}) M dx =$ $(\frac{ds}{dt})$; & différentiant une seconde fois $\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx =$ $(\frac{d^2 s}{dt^2})$; ces valeurs substituées dans la derniére équation intégrale, il en résulte $(\frac{d^2 s}{dt^2}) = cks$, équation qu'il faut maintenant intégrer en ne regardant que le tems t comme variable. Nous avons donc deux équations différentielles à intégrer, dont l'une regarde simplement la variabilité de x, & l'autre celle de t, ce qui fait qu'elles rentrent dans la classe ordinaire des équations différentielles à deux changeantes.

Com-

Commençons par l'équation $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks$, & faisons usage de la méthode inventée par M. D'Alembert pour ces sortes d'équations.

Soit supposé $\frac{ds}{dt} = r$, on aura $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dr}{dt}$, & l'équation donnée se changera en $\frac{dr}{dt} = cks$; qu'on la multiplie par un coéficient quelconque μ, & qu'on la joigne avec celle qu'on a faite par hipotése, on aura $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \mu cks + r = \mu ck\,(s + \frac{1}{\mu ck} r)$; soit fait $\mu = \frac{1}{\mu ck}$, & par con- $\mu^2 = \frac{1}{ck}$, $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{ck}}$, j'aurai donc $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \frac{1}{\mu}(s + \mu r)$, différentielle dont l'intégrale est par les méthodes connues, en ajoutant une constante A, $s + \mu r = Ae^{t:\mu}$; substituant la valeur de μ, on a, à cause de l'ambiguité des signes, les deux équations

$$s + \frac{r}{\sqrt{ck}} = Ae^{t\sqrt{ck}}$$

$$s - \frac{r}{\sqrt{ck}} = Be^{-t\sqrt{ck}}.$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Pour déterminer les valeurs de A & de B, supposons que s & r deviennent S & R, lorsque $t = 0$, nous aurons $S + \frac{R}{\sqrt{ck}} = A$; & $S - \frac{R}{\sqrt{ck}} = B$; substituant ces valeurs, & joignant ensemble les deux équations il nous vient

$$s = S \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + \frac{R}{\sqrt{ck}} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

de méme, en retranchant l'une équation de l'autre, on trouve

$$r = R \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + S\sqrt{ck} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

ces

ces équations se réduisent à la forme suivante qui est beaucoup plus simple ; savoir

$$s = S \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} - \frac{R}{\sqrt{-ck}} \operatorname{sin.} t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} + R\sqrt{-ck} \operatorname{sin.} t\sqrt{-ck}.$$

Or s est par supposition $= \int zMdx$, & $r = \frac{ds}{dt} = \int (\frac{dz}{dt}) Mdx$, ou bien, puisque $\frac{dz}{dt}$ exprime la vitesse qui répond à l' espace z & au tems t, si on dénote cette vitesse par u, on a $r = \int uMdx$. Pour avoir de même les valeurs de S & de R, supposons que Z soit en général la valeur de z, & V celle de u au commencement du mouvement, lorsque $t = 0$, on aura $S = \int ZMdx$ & $R = \int VMdx$, substituant ces valeurs on changera les équations précédentes en celles-ci

$$\int zMdx = \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} \int ZMdx - \frac{\operatorname{sin.} t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int VMdx$$

$$\int uMdx = \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} \int VMdx + \sqrt{-ck} \operatorname{sin.} t\sqrt{-ck} \int ZMdx.$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de M par la résolution de l'équation $\frac{d^2M}{dx^2} = kM$, qu'on intégréra par la même métode que nous avons pratiqué ci-dessus ; prenant deux constantes quelconques C & D on trouvera aisément que la valeur de M est en général $Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}}$; or M doit prémiérement être $= 0$, lorsque $x = 0$, ce qui donne $A + B = 0$ & $B = -A$; par conséquent $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}})$. Changeons la constante A, & supposons la divisée par $2\sqrt{-1}$, on aura plus simplement $M = A \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}$.

Il faut maintenant faire ensorte que M évanoüisse, lorsque $x = a$, d'où l'on a $A \operatorname{sin.} a\sqrt{-k} = 0$, & prenant pour ν un nombre quelconque entier positif, ou négatif,

$a\sqrt{-k}$

$a\sqrt{-k} = \frac{\nu\pi}{2}$, ce qui nous apprend que $\sqrt{-k}$ peut avoir une infinité de valeurs différentes, qui rempliſſent toutes également les conditions données. Subſtituons à préſent pour M ſa valeur trouvée, & retenant pour plus de ſimplicité la quantité $\sqrt{-k}$, on aura après avoir diviſé par A

$$\int z \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = \text{coſ.}\, t\sqrt{-ck}\int Z \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}\int V \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$$
$$\int u \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = \text{coſ.}\, t\sqrt{-ck}\int V \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$$
$$- \sqrt{-ck}\,\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}\int Z \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$$

Ces deux équations doivent ſe vérifier pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\sqrt{-k}$, & c'eſt, d'après une telle condition, qu'il faut déterminer les valeurs cherchées de z & de u par celles de Z & V qui ſont ſuppoſées données.

Pour cela il faut commencer par faire diſparoître au moïen de quelques transformations, la quantité $\sqrt{-k}$ qui n'eſt point renfermée dans des *ſinus* ou des *coſinus*; ces transformations ne conſiſtent qu'à prendre les intégrales par parties comme nous l'avons déja pratiqué plus haut; enſorte que l'intégrale qui reſte ſe trouve naturellement multipliée, ou diviſée par $\sqrt{-k}$. Par ce moïen on transformera d'abord l'expreſſion $\int V \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$ dans celle-ci $= \text{ſin.}\, x\sqrt{-k}$ $\int V dx - \sqrt{-k}\int(\text{coſ.}\, x\sqrt{-k}\int V dx)\, dx$. Je remarque maintenant que la valeur de $\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}$ devient nulle dans les deux cas de $x = 0$, & de $x = a$, d'où il ſuit, que puiſque les formules intégrales que nous manions ici, doivent être priſes pour toute l'étendue de x depuis 0, juſque à a, on aura plus ſimplement

$$\int V \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = -\sqrt{-k}\int(\text{coſ.}\, x\sqrt{-k}\int V dx)\, dx.$$

Par une opération contraire on trouvera enſuite

$$\int Z \,\text{ſin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = -\frac{Z\,\text{coſ.}\, x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} + \frac{1}{\sqrt{-k}}\int\left(\frac{dZ}{dx}\right)$$

coſ.

cof. $x\sqrt{-k}\,dx$; & puifque $Z = 0$, lorfque $x = 0$, & $= a$, par l'hipotéfe du problême, on aura pour notre cas

$$\int Z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx.$$

Ces valeurs fubftituées, il en réfulte

$$\int z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$- \frac{\text{fin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{c}} \int \left(\int V dx\right) \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$\int u \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck} \int V \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$- \sqrt{c} \text{ fin. } t\sqrt{-ck} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ cof. } x\sqrt{-k}\,dx.$$

Avant d'aller plus loin je remarque que comme on aura occafion dans la fuite de comparer des valeurs de Z & de V avec des valeurs de z & u qui ne répondent pas aux mêmes x, pour ne pas fe méprendre dans ces opérations, il fera utile de diftinguer par des expreffions différentes les x qui conviennent aux Z & V, d'avec ceux qui conviennent aux z & u; je défignerai les prémiers par la lettre X que je fubftituerai par tout dans les feconds termes des équations précédentes au lieu de x, en retenant néanmoins le dx qui ne peut caufer aucun embarras; j'obferve de plus, que les intégrales qui entrent dans ces termes fe rapportent uniquement à la variable x ou X, ce qui fait qu'on peut mettre auffi fous le figne ces quantités fin. $t\sqrt{-ck}$; & cof. $t\sqrt{-ck}$, qui font conftantes à leur égard; j'aurai donc $\int z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \int Z \text{ fin. } X\sqrt{-k} \times \text{cof. } t\sqrt{-kc}\,dx$

$$- \frac{1}{\sqrt{c}} \int \left(\int V dx\right) \text{ cof. } X\sqrt{-k} \times \text{fin. } t\sqrt{-kc}\,dx.$$
$$\int u \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \int V \text{ fin. } X\sqrt{-k} \times \text{cof. } t\sqrt{-kc}\,dx.$$
$$- \sqrt{c} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ cof. } X\sqrt{-k} \times \text{fin. } t\sqrt{-kc}\,dx.$$

Je développe à préfent les produits des *finus* & *cofinus* par les métodes connues; j'obtiens

$\int z$ fin.

$$\int z \text{ sin. } x \sqrt{-k}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int Z \text{ sin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int Z \text{ sin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (\int V dx) \text{ sin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (\int V dx) \text{ sin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx.$$

$$\int u \text{ sin. } x \sqrt{-k}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int V \text{ sin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int V \text{ sin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2} \int (\frac{dZ}{dx}) \text{ sin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{\sqrt{c}}{2} \int (\frac{dZ}{dx}) \text{ sin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx.$$

Ces équations ſont réduites maintenant à la forme néceſſaire pour en tirer les valeurs de z & de u. Voici comment je m'y prends.

Je conſidére, qu'en ſubſtituant pour $\sqrt{-k}$ ſa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$, le nombre ν qui peut être tel qu'on veut, pourvu qu'il ſoit entier, doit néceſſairement diſparoître de l'équation, puiſque elle doit être vraie pour toutes les valeurs poſſibles de ν. Il faut donc faire enſorte que la quantité $\sqrt{-k}$ diſparoiſſe elle même de l'equation qui la renferme; ce qu'on ne peut obtenir dans notre cas qu'en rendant égaux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$ dans tous les termes de l'une & de l'autre équation; mais comme on pourroit être embarraſſé dans les différentes valeurs qu'il faut donner à X, je ne retiendrai cette lettre X, que dans la ſeule expreſſion ſin. $(X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}$, & je mettrai dans l'autre expreſ-

expreſſion ſin. $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, X' au lieu de X, en déſignant de même par Z' & V' les valeurs de Z & de V qui y répondent; ainſi j'aurai par la comparaiſon des angles, après avoir diviſé par $\sqrt{-k}$, $x = X + t\sqrt{c} = X' - t\sqrt{c}$; & enſuite les équations

$$z = \frac{Z}{2} + \frac{Z'}{2} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}} + \frac{\int V' dx}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V}{2} + \frac{V'}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx} + \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ'}{dx}.$$

Maintenant, l'abſciſſe qui convient à Z & à V étant X, elle deviendra $= x - t\sqrt{c}$, qui eſt ſa valeur tirée de l'équation ci-deſſus; on aura de même pour l'abſciſſe X' qui répond à Z' & à V', l'expreſſion $x + t\sqrt{c}$; donc ſi, pour plus des commodité, on joint à chaque quantité ſon abſciſſe en forme d'expoſant placé entre deux parenthéſes, on aura enfin les valeurs de z & de u exprimées de la maniére ſuivante

$$z = \frac{Z^{(x+t\sqrt{c})} + Z^{(x-t\sqrt{c})}}{2} + \frac{\int V dx^{(x+t\sqrt{c})} - \int V dx^{(x-t\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V^{(x+t\sqrt{c})} + V^{(x-t\sqrt{c})}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})} - \left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})} \right).$$

Telles ſont donc les valeurs de z & de u pour chaque point mobile du ſiſtême donné, & pour tous les inſtans de leurs mouvemens; valeurs qui ne dépandent, comme on le voit, que des quantités Z & V données à volonté dans le commencement du mouvement.

7. Les formules qu'on vient de trouver nous ménent directement à la conſtruction ſuivante. Sur l'axe $AB = a$ (*fig.* 1.), j'éléve à chaque point M la perpendiculaire MN, égale à la valeur de Z, c'eſt-à-dire à la valeur initiale de

z qui répond à l'abſciſſe $x = AM$. J'en fais autant à l'égard des valeurs initiales de u ſur un autre axe de même longueur AB (*fig.* 2.); & j'obtiens par ce moïen les deux courbes ANB, AQB que j'appelle *courbes fondamentales*, & qui ſont les lieux géométriques des quantités Z & V.

Ces courbes ſeront réguliéres, ou irréguliéres, ſuivant la nature des quantités Z & V; mais elles ſe termineront toujours d'un côté & de l'autre aux extrémités A & B de l'axe, puiſque les valeurs de Z & de V dans ces points ſont nulles par ſuppoſition.

Je trace enſuite ſur deux autres axes égaux, AB, AB (*fig.* 3. & 4.) les nouvelles courbes anb, Aqb, telles, que chaque ordonné Mn de la prémiére ſoit toujours quatriéme proportionnelle à la ſoutangente MT de la courbe ANB, à l'ordonnée correſpondante MN, & à la quantité conſtante $\surd c$, & que l'ordonné Mq de la ſeconde ſoit égale à l'aire AQM de la courbe AQB, diviſée par la même quantité $\surd c$.

Ces quatre courbes ainſi données, ſi l'on cherche les valeurs de z & de u qui répondent à une abſciſſe quelconque $x = AM$, & à un téms quelconque t, on n'aura qu'à prendre de part & d'autre des points M, les points M' & $`M$ éloignés par des intervalles égaux $MM'$ & $M`M = t\surd c$, & l'on aura

$$z = \frac{M'N' + `M`N + M'q' - `M`q}{2}$$

$$u = \frac{M'Q' + `M`Q + M'n' - `M`n}{2}.$$

Quelque générale que paroiſſe cette conſtruction que nous venons de trouver, elle ne l'eſt cependant pas tout-à-fait; car il y a une infinité de cas où elle ne ſauroit avoir lieu; c'eſt ce qui arrivera toutes les fois que les points $`M$ & M' tomberont au delà de A & de B.

Pour

Pour voir ce qu'il faudra faire dans ces cas, & comment les courbes données pourront être continuées de part & d'autre, il eſt néceſſaire de reprendre les derniéres formules intégrales, d'où l'on a tirées les valeurs de z & de u, & de les examiner avec attention; pour mieux y réuſſir nous réduirons ces formules à des conſtructions géométriques.

Soit imaginée la ligne ARB (*fig.* 5.) qui ſoit le lieu géométrique des valeurs de z pour tous les points de l'axe AB, & ſoit décrite ſur le même axe la courbe ASB qui ait à chaque abſciſſe x l'ordonnée ſin. $x\sqrt{-k}$. Il eſt manifeſte que ſi l'on fait les produits des ordonnées correſpondantes de ces deux courbes, l'aire d'une troiſiéme courbe qui aura ces produits pour ordonnées ſera la valeur de l'intégrale $\int z$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$.

Pour conſtruire de même les autres formules intégrales ſuppoſons d'abord $t\sqrt{c} < a$, & aïant tracé (*fig.* 6.) la ligne ANB, qui renferme toutes les valeurs de Z, qu'on coupe de part & d'autre du point A les deux portions de l'axe AA', AA'' égales entr'elles, & $= t\sqrt{c}$, & qu'on tranſporte la courbe ASB en $A'S'B'$ & en $A''S''B''$, il eſt clair que ſi l'on prend de nouveau les produits des ordonnées de chacune de ces courbes par les ordonnées correſpondantes de la courbe ANB, les aires des ces produits exprimeront les valeurs des intégrales
$\int Z$ ſin. $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$, & $\int Z$ ſin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$.
Mais il faut remarquer, que comme ces intégrales ne doivent s'étendre que depuis $X=0$ juſque à $X=a=AB$, les aires, qui les exprimeront, ne pourront contenir que les parties de l'une & de l'autre courbe qui répondent à l'axe AB. D'où il s'enſuit que les deux portions $A'S'$ & $S''B''$ qui ſe trouvent au déhors de l'eſpace compris entre les ordonnées AS', BS'' élevées des points A & B, ne feront ici aucun uſage; mais qu'il faudra au contraire ajouter à

l'une & l'autre courbe, ce qui lui manque par rapport à l'axe entier AB; c'eſt-à-dire que la courbe $A'S'B'$ devra être continuée juſqu'en $'S$, & de même la courbe $B''S''A''$ juſqu'en $''S$; ce qui étant exécuté, on aura les deux branches $S'B''S$ & $S''A''''S$, qui feront celles qu'on devra emploïer dans la formation des aires propoſées. Pour cela examinons la nature des fonctions ſin. $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, & ſin. $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui forment les courbes $A'S'B''S$ & $B''S''A''''S$, en comptant les abſciſſes X du point d'origine A; & voïons ce que ces fonctions deviennent au delà du point B'' & en deça du point A''.

Puiſque les deux courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$ ne ſont que la même courbe ASB, dans laquelle, nommant x les abſciſſes, les ordonnées ſont exprimées par ſin. $x\sqrt{-k}$, la queſtion ſe réduit à déterminer la valeur de ſin. $x\sqrt{-k}$, lorſque x eſt négatif, & lorſque x eſt plus grand que a; ſoit donc en prémier lieu x négatif; on aura, comme on le ſait, ſin. $(-x)\sqrt{-k} = -$ ſin. $x\sqrt{-k}$, c'eſt-à-dire que la fonction donnée de x ne recevra point d'autre changement, ſi non qu'elle deviendra négative. Soit enſuite $x > a$, mais $< 2a$, ſavoir $x = 2a - z$, on aura ſin. $x\sqrt{-k} =$ ſin. $(2a - z)\sqrt{-k} =$ ſin. $(2a\sqrt{-k} - z\sqrt{-k})$. Or par la valeur déterminée ci-deſſus de $\sqrt{-k}$, $2a\sqrt{-k} = \nu\pi$, & par les règles connuées de la Trigonométrie, ſin. $(\nu\pi - z\sqrt{-k})$ $=$ ſin. $(-z\sqrt{-k}) = -$ ſin. $z\sqrt{-k}$; donc puiſque $z = 2a - x$ on aura dans ce cas ſin. $x\sqrt{-k} =$ ſin. $(2a - x)\sqrt{-k}$. Delà il s'enſuit 1.° Que pour avoir la continuation $A''''S$ du côté des abſciſſes négatives de la courbe $A''S''B''$, on n'aura qu'à renverſer la même courbe au deſſous de l'axe, enſorte que le point A'' demeure immobile. 2.° Que pour avoir la continuation $B''S$ du côté des abſciſſes plus grandes que a dans la courbe $A'S'B'$ il faudra auſſi renverſer cette courbe de la même façon que l'autre; mais en prenant ici le point B' pour fixe.

Je dis maintenant, que la portion de courbe $A'''S$ eſt la même que la $A'S'$; ainſi que la portion $B''S$ eſt la même que la $B''S''$; & que par conſéquent, au lieu des deux courbes $S'B''S$ & $S''A'''S$, on peut ſubſtituer les deux autres $A'S'B'$ & $A''S''B''$, lorſque il ne s' agit que d' avoir la ſomme des mêmes parties. Je dis enſuite que la ſomme des aires formées des produits des ordonnées de l' une & de l'autre courbe $S'B''S$ & $S''A'''S$ par celles de la courbe ANB ſera égale à la ſomme des aires qu'on pourra former de la même façon par les ordonnées des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, pourvu que dans les eſpaces AA', BB'', on prenne, pour ordonnées de la courbe ANB, celles qui conviennent aux eſpaces AA'' & BB' avec des ſignes contraires; d'où je déduis, que ſi l'on veut continuer la courbe même ANB de part & d' autre de l' axe, afin qu'elle réponde immédiatement à toute l'étendue des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, on n'a qu'à la renverſer deſſous l'axe en AN' & BN'', le point A demeurant immobile dans le prémier cas, & le point B dans le ſecond comme on le voit clairement dans la *fig.* 7.

Il réſulte donc de tout ce qu'on vient de démontrer que pour avoir la valeur de l' expreſſion compoſée
$\int Z \text{ſin.} (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx + \int Z \text{ſin.} (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$,
on n' a qu'à prendre la ſomme des deux aires qui ſe formeront par les produits des ordonnées des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$ multipliées par les ordonnées correſpondantes de la courbe $N'ANBN''$. La moitié de cette ſomme, ſi l'on ſuppoſe $V = 0$, devra donc être égale à l' aire formée par les deux courbes ARB, ASB.

Or puiſque les ordonnées de la courbe ASB, qui eſt la même que les deux courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, renferment la quantité $\sqrt{-k}$, laquelle doit s' évanoüir de l' équation, on ne parviendra à ſe defaire de cette quantité, qu'en égalant la valeur de z, qui multiplie chaque ordonnée de ARB, à

la

la démisomme des valeurs de Z, qui multiplient la même ordonnée dans l' une & l' autre courbe $A'S'B'$ & $A''S''B''$; prenant pour ces valeurs de Z les ordonnées correspondantes de la courbe $N'ANBN''$; on coupera donc des points A' & A'', qui sont les origines des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, deux abscisses $= x$, ou bien, à cause de $AA' = AA'' = t\surd c$, on coupera du point A, origine de la courbe génératrice ANB, deux abscisses $x + t\surd c$ & $x - t\surd c$, & la démisomme des ordonnées correspondantes dans cette courbe, sera la valeur cherchée de z.

Si on suppose la courbe ANB anéantie, & qu'on y substitue la courbe AQB, on aura par la construction précédente les valeurs de la vitesse u dans le cas, où $Z = 0$. Mais si l'on veut avoir égard à la fois aux deux courbes ANB & AQB; il faudra encore faire attention aux autres formules intégrales que nous avons négligées; & qui se construisent de la même façon que les précédentes avec cette seule différence qu'au lieu des courbes ANB, AQB il faut emploïer les anb & AqB. On s'y prendra donc à l' égard de ces derniéres courbes d' une manière parfaitement analogue à celle qu'on vient de pratiquer pour les prémiéres; il faudra seulement observer, que comme les deux formules intégrales, qui naissent de chacune d'elles, ont des signes différens, les branches $A'S'B'$ & $A''S''B''$ devront être situées l'une au dessus & l'autre au dessous de l' axe; c' est pourquoi la partie $A''{}'S$, qui doit servir de continuation à la branche $B'S'$ au lieu de sa partie $A'{}'S$, se trouvera du même côté de l'axe, comme aussi que la partie $B'{}'S$ à l'égard de l'autre branche $A''S''$, dont elle est le supplement au lieu de $S''B''$; d'où il s'ensuit que les branches de continuation dans les courbes Anb & aqb se trouveront au dessus de l'axe, comme on le voit dans la *fig.* 8. On prendra donc dans ces courbes ainsi continuées de part & d'autre les ordonnées qui répondent aux abscisses $x + t\surd c$ & $x - t\surd c$

en

en comptant du point A, & leur démidifférence donnera ce qu'il faut ajouter à la valeur de z & de u.

La conſtruction que nous venons de trouver eſt la même, pour le fond, que celle qu'on a donné plus haut, mais elle en eſt plus générale en ce que les courbes ici ſe trouvent continuées de part & d'autre par une étendue égale à l'axe AB; ce qui ſuffit pour réſoudre tous les cas, où $t\sqrt{c}$ ne ſurpaſſe point a comme on l'a ſuppoſé d'abord.

Tous les autres cas demanderont donc encore une nouvelle continuation, qu'on pourroit trouver auſſi en ſuivant une méthode analogue à celle que nous avons emploïé ci-deſſus, mais qu'on déduira plus aiſément de la reflexion ſuivante. Je conſidére d'abord le *ſinus* de l'angle $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui eſt celui qui donne des valeurs de X plus grandes que a; je trouve que ce *ſinus* ne change point en retrachant de X un multiple quelconque de $2a$; car ſin. $[(X-\sqrt{c})\sqrt{-k}-2\mu a\sqrt{-k}]$ devient (en ſubſtituant au lieu de $\sqrt{-k}$ ſa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$) ſin. $[(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}-\mu\nu\pi]$. Or, μ étant un nombre quelconque entier, $\mu\nu$ le ſera auſſi, & par conſéquent par les règles connues ce *ſinus* deviendra $=$ ſin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, tel qu'il étoit d'abord. J'examine de même le *ſinus* de l'autre angle $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, d'où naiſſent les valeurs négatives de X; & je vois que ce *ſinus* demeure le même, en ajoutant à X un multiple quelconque de $2a$; Car on trouve auſſi ſin. $[(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}+\mu\nu\pi] =$ ſin. $(X+t\sqrt{c})$.

Ces deux propoſitions prouvent donc que les abſciſſes X peuvent être augmentées ou diminuées de $2a$, de $4a$ &c. ſans qu'il en réſulte aucun changement dans les formules intégrales; d'où il ſuit que les ordonnées à toutes ces abſciſſes ainſi augmentées ou diminuées ſeront néceſſairement les mêmes. Donc puiſque nous avons ci-deſſus trouvé moïen d'étendre les courbes *fondamentales* juſques à l'abſciſſe $2a$

d'un côté, & jusqu'à l'abscisse $-a$ de l'autre, on pourra à présent les étendre tant qu'on voudra, en appliquant à chaque abscisse exprimée par $z + 2\mu a$ l'ordonnée qui convient à la simple abscisse z, dont la valeur est supposée contenue entre les limites $+2a$, & $-a$. Il ne faudra pour cela que transporter successivement le long de l'axe toute la courbe qui répond à l'abscisse $= 2a$, & qui est composée de deux branches égales, situées l'une au dessus & l'autre au dessous du même axe; d'où il résultera une courbe continue, & de figure anguiforme, c'est-à-dire, contenant plusieurs ventres égaux, situés alternativement au dessus & au dessous de l'axe. Nous appellerons les courbes ainsi formées *courbes génératrices*.

Or fera la même chose à l'égard des autres courbes formées par les tangentes, & par la quadrature des courbes *fondamentales*; mais comme la portion de ces courbes, qui répond à l'abscisse $2a$, est composée de deux branches égales, situées l'une & l'autre du même côté de l'axe, la courbe, qui résultera de la repétition de cette partie, contiendra aussi plusieurs ventres égaux, mais tous placés du même côté de l'axe.

Voila comment par la simple déscription réitérée des branches données ANB, AQB, anb, Aqb, on peut prolonger toutes ces courbes à l'infini, & avoir par conséquent des ordonnées réelles pour toutes les abscisses exprimées par $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$, quelle que soit la valeur du tems t; ce qui suffit pour que la construction des valeurs de z & de u ne soit plus sujette à aucune exception.

Le problême, dont la solution nous a jusqu'à présent occupé, est le même que celui qu'on résolu dans le *Chap.* V. *des Rech. préced.*; car il est facile de voir que les équations de l'*Art.* XIX., dans le cas ou le nombre des points mobiles est infini, peuvent se réduire à la formule générale

(d^2z)

$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$. Auſſi la conſtruction que nous venons de trouver s'accorde entiérement avec celle qu'on a donné dans l'*Art.* XXXIX., & plus amplement dans l'*Art.* XLV.; ce qui doit être regardé comme une confirmation de la juſteſſe & de la bonté de nos calculs.

REMARQUES
Sur la ſolution précédente.

8. QUOIQUE la ſolution précédente ſoit beaucoup moins compliquée que celle qui ſe trouve dans *mes Rech. ſur le Son*; elle l'eſt cependant encore à un point qui la rend aſſès difficile à ſuivre. C'eſt pourquoi il me paroit bon de l'éclaircir par quelques remarques, qui faſſent connoître plus à fond la nature & l'eſprit de la méthode qui nous y a conduit.

Comme la queſtion eſt de trouver les mouvemens d'une infinité de points mobiles, dans la ſuppoſition que leur état d'equilibre ait été dérangé d'une manière quelconque, on ne peut pas, ainſi qu'on l'a prouvé plus haut, exprimer tous ces mouvemens par une ſeule formule générale; mais il faut regarder au contraire chaque point mobile comme iſolé, & en chercher le mouvement, en reſolvant comme autant de problêmes à la fois, qu'il y a de points mobiles dans le ſiſtème donné. Une telle queſtion demande donc, pour être pleinement reſolue, d'autres procédés que ceux de l'Analiſe ordinaire; c'eſt ce que M. D'Alembert a eu ſoin de faire remarquer au ſujet des cordes vibrantes, dans l'*Art.* II. de ſon Addition au *Mémoire ſur la courbe que forme une corde tendue miſe en vibration*, imprimée parmis les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1750. *Dans tout autre cas*, di-t-il, (c'eſt-à-dire dans tous les cas où la courbe initiale n'aura point les conditions preſcrites par cet Au-

teur;

teur; *le problême ne pourra ſe reſoudre, au moins par ma méthode, & je ne ſais même s' il ne ſurpaſſera pas les forces de l' Analiſe connue. En effet on ne peut, ce me ſemble, exprimer* y *analitiquement d' une manière plus générale qu'en la ſuppoſant une fonction de* t *& de* s; *mais dans cette ſuppoſition on ne trouve la ſolution du problême, que pour le cas, où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une ſeule & même équation. Dans tous les autres cas il me paroit impoſſible de donner à* y *une forme plus générale.*

La méthode, que nous avons expoſé ci-deſſus, eſt une réduction de celle que j' ai inventé pour reſoudre le problême des vibrations d'une corde chargée d' un nombre indéfini de petits poids; ainſi elle remplit la condition, que tous les points mobiles ſoient conſidérés chacun en particulier, & en même tems elle n' eſt pas ſujette aux difficultés qui ſe préſentent en paſſant du nombre indéfini des points mobiles à un nombre réellement infini.

Le fondement principal de l' une & de l' autre de ces méthodes, c'eſt l' ingénieuſe Analiſe inventée par M. D'Alembert pour intégrer des équations différentielles d' un dégré quelconque, & contenant un nombre quelconque de variables, pourvu qu' elles ne paroiſſent que ſous une forme linéaire. Auſſi eſt-ce une juſtice qu'il faut rendre à ce ſavant Géomètre, que de reconnoître que nous lui devons le prinpal ſecours qui nous a aidé à franchir les difficultés, que lui même ſemble avoir cru inſurmontables à l' Analiſe.

A l' égard des procédés de nos deux métodes, ils ne différent d'abord entr'eux, que parce l'on a ſubſtitué, dans les derniers, des différentiations & des intégrations au lieu des ſommes & des différences algébriques qui ſe trouvent dans les autres; mais comme on pourroit craindre que ces opérations n' entrainaſſent les inconvéniens qu'on a indiqué dans l' *Art.* XV. des *Rech. préc.*, il me paroit utile de dé-

velopper

velopper cet objet plus en détail, en rapprochant l' Analiſe que j' ai donné ci-deſſus de celle du *Chap*. III. des *mêmes Rech.*

J' immagine d'abord qu'au lieu de la ſimple équation générale $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2z}{dx^2})$, qui appartient à tous les points mobiles, il y en ait une infinité, dont chacune repréſente le mouvement de chacun des points en particulier; mouvement qui dépend d'ailleurs de tous les autres, puiſque la différentielle d^2z qu'on prend, en ne faiſant varier que x, exprime la différence ſeconde des valeurs de z pour trois points conſécutifs. Je multiplie donc chacune de ces équations par un coéficient indéterminé M, ou plutôt par la quantité Mdx, en regardant M comme une variable qui peut convenir à toutes les équations en général; & j' en prens la ſomme par une intégration indiquée à la manière ordinaire.

Maintenant, comme il s'agit de joindre enſemble les coéficiens de chaque valeur de z qui répond à chaque point mobile, je transforme mon équation intégrale enſorte que les différentielles de z dépendantes de x, s' évanoüiſſent.

Les transformations, dont je fais uſage dans cette occaſion, ſont celles qu'on appelle intégrations par parties, & qui ſe démontrent ordinairement par les principes du calcul différentiel; mais il n' eſt pas difficile de voir qu'elles ont leur fondement dans le calcul général des ſommes & des différences; d'où il ſuit qu'on n'a point à craindre d'introduire par-là dans notre calcul aucune loi de continuité entre les différentes valeurs de z.

Après cela, je determine les valeurs de l' indéterminée M par la comparaiſon des coéficiens des termes correſpondans z & $\frac{d^2z}{dt^2}$; & je trouve pour cela une équation différentielle du 2 dégré qui contient une nouvelle indétermi-

née

née conſtante k, & dont l'intégration entraine encore dans la valeur de M deux autres conſtantes arbitraires. Je détermine ces conſtantes à être telles, que M s'évanoüiſſe, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = a$, puiſque les valeurs de z étant nulles dans ces deux points, les M qui les multiplient ne doivent non plus avoir des valeurs réelles; par ce moïen on fait diſparoître de l'équation intégrale les termes qui ſont abſolument algébriques, & qui auroient d'ailleurs empêché le reſte des opérations. Ces deux conditions laiſſent encore indéterminée la valeur d'une conſtante, par laquelle toute l'expreſſion de M eſt multipliée; mais cette conſtante s'évanoüit enſuite d'elle même par la diviſion. A l'égard de la conſtante k, on trouve une infinité de valeurs différentes, qui toutes lui conviennent également, & dont le nombre répond à celui des équations particuliéres qu'on réſout à la fois. C'eſt de ce nombre infini de valeurs de k, que dépand enſuite la détermination de toutes les valeurs de z.

Delà je paſſe à l'intégration actuelle de notre équation formée par l'addition de toutes les équations particuliéres. Cette intégration ne regarde que la variabilité de t, & elle s'achève ſelon les méthodes connues du calcul intégral, puiſque ici la loi de continuité a lieu. Après cela je ſubſtitue la valeur de M, & il en réſulte une équation aſsés ſimple qui renferme toutes les valeurs de z, pour chaque point mobile dans tous les inſtants du mouvement, avec les valeurs particuliéres des mêmes z & des viteſſes u dans le prémier inſtant; valeurs qu'on ſuppoſe données à volonté, & qui ne ſont point réglées par aucune loi de continuité. Je trouve en même tems une formule ſemblable pour les viteſſes u de tous les points dans un tems quelconque.

Juſqu'ici cette Analiſe eſt parfaitement d'accord avec celles du *Chap. cité de mes Rech.*; mais elle en différe entiérement dans la ſuite, où il s'agit de tirer les valeurs de z & de u.

Comme

Comme il eſt néceſſaire que nos derniéres formules ſoient vérifiées, quelques valeurs qu'on donné à k, parmi le nombre infini de celles qu'on a trouvé; il eſt viſible qu'il faut chaſſer cette même quantité k, à l'aide d'autant d'équations particuliéres qu'il y a de différentes fonctions de k. C'eſt à quoi nous ſommes parvenus, en emploïant différentes tranſformations & réductions, dont on a rendu compte dans le cours de cette Analiſe; & qui me paroiſſent les ſeules capables de remplir l'objet propoſé.

La conſtruction qu'on a donné enſuite des valeurs de z & de u par le moïen des courbes *génératrices*, & la maniére de continuer ces courbes à l'infini de part & d'autre dépendent d'une conſidération intime ſur la nature de nos formules. Il eſt vrai que les principes, d'où l'on a tiré cette conſtruction, pourroient paroitre trop recherchés; mais elle n'en eſt pas moins démonſtrative & certaine; ce n'a été que pour conſerver une entière rigueur que j'ai été obligé d'avoir recours à de tels principes; car dès que l'on aura démontré dans deux ou trois problêmes de cette ſorte, que la nature des courbes *génératrices* eſt la même, que celle qu'on trouve en ſuppoſant ces courbes repréſentées par une fonction réguliére & continue, ainſi que l'a fait M. D'Alembert dans ſa ſolution du problème des vibrations des cordes, on ſera aſsès fondé à appliquer la métode de ces fonctions aux cas mêmes où l'on voudra ſuppoſer qu'elles n'aïent point lieu.

9. Après tout ce que nous venons d'expliquer, il ne ſera pas difficile de déterminer le dégré de généralité, dont notre méthode eſt ſuſceptible. On verra prémiérement qu'elle ne pourra réuſſir à moins que l'indéterminée z & ſes différences ne ſe trouvent que ſous une forme linéaire, & de plus qu'elles ne ſoient point mélées avec la variable t; lorſque ces conditions ſeront obſervées, quoique les différentielles de z montent a un dégré plus haut que le ſecond, & qu'il y

ait

ait même un terme sans z, qui soit une fonction quelconque de t & de x, on pourra toujours se servir avec succès des artifices & des transformations enseignées ; comme on le verra dans les solutions que nous donnerons dans la suite. Toute la difficulté ne tombera plus que sur l'intégration des équations en M & en s ; équations qui se rapportent aux méthodes ordinaires du calcul intégral. En second lieu le succès de notre méthode demande, qu'on puisse faire disparoître des équations la quantité k, qui a toujours une infinité de valeurs; cette operation renferme des difficultés plus considérables, & je ne suis point encore parvenu jusqu'à présent à trouver pour cela une méthode directe & générale ; cependant nous ferons voir dans la suite, que cet objet pourra toujours être rempli si non exactement, au moins en se servant des approximations & des séries.

Pour ce qui est de la prémiére condition qui est absolument indispensable dans notre méthode, il est aisé de démontrer qu'elle aura toujours lieu dans les mouvemens d'un sistème quelconque d'un nombre infini de points mobiles, lorsque ces mouvemens seront supposés infiniment petits, comme le sont tous les mouvemens réciproques qu'on observe dans la nature ; d'où il suit qu'on pourra toujours les calculer soit exactement, soit seulement par approximation.

CHAPITRE III.

De la propagation du Son.

10. LA masse de l'air étant naturellement de trois dimensions, il est clair que, pour calculer la propagation du Son en toute rigueur, il faudroit résoudre les formules générales que M. Euler a donné dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique* ; (*Voïés pag. 1. ci-dessus*) Mais ces formules n'étant point du nombre

bre

bre de celles, ſur leſquelles notre méthode peut avoir priſe, il faut renoncer pour le préſent, c'eſt-à-dire juſqu'à ce qu'on ſoit aidé par de nouveaux ſecours, à toute Théorie de la propagation du Son enviſagée ſous ce point de vûë. Cependant comme il eſt très-probable que les ébranlemens des particules de l'air pour produire le Son, doivent être infiniment petits, ainſi que nous tacherons de le prouver dans la ſuite; on pourra s'en tenir aux formules que M. Euler a auſſi donné pour ce cas; formules qui ſont ſans comparaiſon beaucoup plus ſimples, que les prémiéres, & qui, par la raiſon qu'on a dit plus haut (*Art.* 9.), rentrent néceſſairement dans la claſſe de celles qu'on peut ſoumettre à notre Analiſe.

Quoique la manière, dont M. Euler a trouvé ces formules, ſoit ſans contredit la plus directe & la plus rigoureuſe qui ſe puiſſe immaginer, cependant, puiſque la ſuppoſition des ébranlemens infiniment petits rend le calcul incomparablement plus ſimple, j'ai crû qu'on ne ſaroit point faché de le trouver ici.

Soient X, Y, Z les coordonnées rectangles qui déterminent la poſition d'une particule quelconque de fluide dans l'état d'équilibre; ſuppoſons que ces coordonnées, dans le tems t, deviennent $X + x$, $Y + y$, $Z + z$; il ne ſera pas difficile de voir que, ſi les quantités x, y, z ſont ſuppoſées infiniment petites, le parallélepipéde $dXdYdZ$ qui repréſente une particule dans l'état d'équilibre, pourra être cenſé ſe changer en un autre $= (dX + dx)(dY + dy)(dZ + dz) = dXdYdZ + dXdYdz + dXdZdy + dYdZdx$, en négligeant les puiſſances plus hautes de dx, dy, dz. Delà il ſuit, qu'en nommant E l'élaſticité naturelle de la portion infiniment petite de fluide renfermée dans le prémier parallélepipéde, l'élaſticité de la même portion, lorſque elle remplira le ſecond, ſe trouvera =

 EdXdYdZ

$$\frac{E\,d\,X\,d\,Y\,d\,Z}{d\,X\,d\,Y\,d\,Z + d\,X\,d\,Y\,d\,z + d\,X\,d\,Z\,d\,y + d\,Y\,d\,Z\,d\,x} = E -$$

$E\left(\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right)$ en négligeant ce qui ſe doit négliger. Soit priſe maintenant la différence de cette quantité, en ne faiſant varier que l'X, & l'on aura, E étant conſtant, $-E\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dX\,dY} + \frac{d^2z}{dXdZ}\right)dX$ pour la différence d'élaſticité de deux particules infinimens voiſines & placées dans la direction de la ligne X; donc ſi l'on conſidére une autre particule intermédiaire à celles-ci, & qui leur ſoit contigue par tous les points des deux faces oppoſées $dYdZ$, il eſt clair que cette particule ſera repouſſée par l'excès de l'élaſticité de la particule antérieure ſur celle de la particule poſtérieure avec une force qui ſera exprimée par

$-E\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ}\right)dX\,dY\,dZ$. Cette force diviſée par la maſſe à mouvoir, qui eſt ici (en poſant D pour la denſité naturelle du fluide) $D\,d\,X\,d\,Y\,d\,Z$, ſera donc $= -\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, h étant l'eſpace qu'un corps peſant parcourt dans le tems T; d'où l'on aura l'équation

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2x}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dXdY}\right) + \left(\frac{d^2z}{dXdZ}\right)\right).$$

On trouvera de même par un ſemblable raiſonnement les deux autres équations

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2y}{dY^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dYdX}\right) + \left(\frac{d^2z}{dYdZ}\right)\right),$$

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dZdX}\right) + \left(\frac{d^2y}{dZdY}\right)\right).$$

Il eſt viſible que ces trois équations s'accordent avec celles de M. Euler, en poſant ſelon les hipotéſes de cet Auteur $h = g$, $\frac{E}{D} = h$, $T = 1$, & ſubſtituant p, q & r pour x, y & z.

11. Po-

11. Au reste ces formules sont fondées sur l'hipothèse que l'élasticité de l'air soit proportionelle à sa densité; mais il n'est pas difficile de les étendre à telle autre hipothèse qu'on voudra.

Pour embrasser la question dans toute la généralité possible, supposons que l'élasticité de l'air soit comme une fonction quelconque de la densité, de sorte que nommant s la densité dans un instant quelconque, l'élasticité correspondante soit exprimée par $E\varphi s$; il est clair par les calculs de *l'Art. préc.* que $s = \frac{D\,dX\,dY\,dZ}{(dX+dx)(dY+dy)(dZ+dz)}$ $= D - D\left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right]$; donc, à cause de dx, dy, dz infiniment petites par rapport à dX, dY, dZ, on aura $E\varphi s = E\varphi D - \left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right] ED\varphi' D$, φ' marquant une telle fonction de φ que $\varphi' s = \frac{d\cdot\varphi s}{ds}$.

Maintenant, comme D est une quantité constante, les différences de $E\varphi s$ seront exprimées simplement par $ED\varphi' D d\cdot\left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right]$ d'où l'on voit que, pour avoir les équations du mouvement du fluide, il ne faudra qu'écrire au lieu de E dans les calculs de *l'Art. précéd.* $ED\varphi' D$, ou $E\varphi' D$ simplement, en posant $D = 1$.

Si le fluide étoit composé de parties de différentes densités, il faudroit regarder alors la quantité D non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de X, Y, Z. Ainsi l'on parviendroit aux trois équations suivantes;

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2x}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dXdY}\right) + \left(\frac{d^2z}{dXdZ}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dX}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dX}\right),$$

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2y}{dY^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dY dX}\right) + \left(\frac{d^2z}{dY dZ}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dY}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot \varphi D}{dY}\right);$$
$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dZ dX}\right) + \left(\frac{d^2y}{dZ dY}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dZ}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot \varphi D}{dZ}\right).$$

Suppoſons par exemple que la différente denſité des parties du fluide vienne du poid du fluide ſupérieur; dans ce cas, quelle que ſoit la fonction φ, on aura toujours $\frac{E\,d\cdot\varphi D}{dZ} = -D$ (en ſuppoſant que la direction de Z ſoit verticale), d'où l'on trouvera la valeur de D qui ſera une fonction de Z ſeulement. Delà on pourroit tirer les équations néceſſaires pour trouver les loix de la propagation du Son, en aïant égard à la denſité variable des couches de l'atmoſphère; mais, pour ne pas trop nous engager dans des difficultés de calcul, nous nous contenterons dans tout le cours des Recherches ſuivantes de regarder la denſité de l'air comme conſtante; ce qui ne nous éloignera pas ſenſiblement de la vérité, pourvu qu'on ne conſidére la propagation du Son, que près de la ſurface de la terre. C'eſt donc ſur les équations de *l'Art. précéd.* que nous fonderons principalement nos recherches ſur la propagation du Son; mais comme ces équations ſont encore trop compliquées à cauſe des trois variables qu'elles renferment, il ſera bon de commencer par les ſimplifier au moïen de quelques hipothèſes, qui limitent le mouvement de chaque particule de l'air. Or de toutes les hipothèſes qu'on peut emploïer pour cela, les plus

com-

commodes, & les plus conformes à la nature, sont les deux suivantes. La premiére consiste imaginer la masse de l'air réduite à une simple ligne phisique, dans lequel cas on fait disparoître à volonté deux variables quelconques x & y, avec leurs correspondantes X & Y. La seconde hipothèse est de supposer que les ébranlemens se propagent dans toute la masse de l'air par des ondulations sphériques autour du corps sonore; dans ce cas chaque couche concentrique d'air est supposée subir le même ébranlement dans toutes ses parties, d'où il suit que la détermination de l'ébranlement de chaque couche ne peut dépendre que du tems t, & du rayon de la couche, c'est-à-dire de la distance du corps sonore.

§ I.

De la propagation du Son dans une ligne phisique d'air.

12. SI l'on fait, selon la premiére hipothèse, x & y, & X & $Y = 0$, & qu'on pose pour abreger c au lieu de $\frac{2\,h\,E}{T^2 D}$ on trouve l'équation $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dZ^2}\right)$ qui est la même que celle que nous avons appris à construire dans le *Probl. I.*, Z dénotant ici la même chose que x; d'où il suit, que pour avoir les loix de la propagation du Son dans cette hipothèse, il ne faudra qu'appliquer la construction donnée, suivant les différens ébranlemens excités par les corps sonores, & la nature du milieu élastique qui les environne. Quoique cette matière ait déja été traitée dans la seconde *sect. de mes Rech. sur le Son*, elle peut néanmoins l'être encor d'une manière beaucoup plus générale. Je la reprendrai donc ici avec d'autant plus de plaisir qu'elle me donnera occasion de faire plusieurs remarques nouvelles & importantes.

Que

Que la droite *PQ* (*fig.* 9.) repréſente une ligne phiſique d'air étendue d'un côté & de l'autre à l'infini, & qu'au lieu de ſuppoſer (comme je l'ai fait dans la *ſection citée*) que la ſeule particule *P* reçoive du corps ſonore une impulſion quelconque, on imagine, que toutes les particules contenues dans l'eſpace *PQ* ſoient ébranlées en même tems; *PQ* repréſentant, ſuivant M. Newton, la *pulſion* primitive de la fibre ſonore; il s'agit de déterminer les lois de la propagation de cette pulſion. Aïant tracé pour cela, ſelon ce qui a été enſeigné plus haut, les deux courbes *fondamentales*, qui repréſentent les déplacemens primitifs des particules, avec les viteſſes qui leur ont été imprimées; & aïant conſtruit de mêmes les deux autres courbes qui réſultent de la quadrature & des tangeantes de celles-ci, & que nous appellerons dorénavant courbes *dérivées*, on remarquera

1.° Que les courbes *fondamentales* ſe termineront néceſſairement aux deux points *P* & *Q* qui ſont les limites de l'agitation primitive, par ſuppoſition.

2.° Que puiſque la fibre aérienne eſt ſuppoſée s'étendre à l'infini de part & d'autre, aucune de ſes particules ne pourra être abſolument fixe; d'où il ſuit que les extrémités *A* & *B* des courbes *fondamentales*, qui ſont cenſées fixes, devront dans ce cas être reculées à l'infini, ce qui fera diſparoître toutes les branches de continuation, en ſorte que les courbes *génératrices* ne renfermeront aucune ordonnée réelle au delà des points *P* & *Q*.

3.° Qu'il en ſera de même pour les courbes *dérivées*, exceptée celle qui dépand des quadratures laquelle dégenerera du côté de *Q* en une droite paralléle à l'axe, comme il eſt facile de le voir, en examinant la génération de cette courbe.

Ces choſes poſées & bien entendues, voici comme je raiſonne. Je ſuppoſe que l'on demande l'état de la particule qui répond à l'abſciſſe x pour un tems quelconque t, écoulé depuis le premier inſtant du mouvement. Je n'aurai qu'à prendre la demiſomme des ordonnées, dont les abſciſ-

ses sont $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$ dans les deux courbes *fondamentales*, & la demidifférence des ordonnées pour les mêmes abscisses dans les courbes *dérivées*, & joignant ensemble la prémiére des demisommes, & la seconde des demidifférences, comme aussi la seconde demisomme, & la prémiére demidifférence, j'aurai l'espace parcouru par la particule pendant le tems donné t, & sa vitesse à la fin de ce tems. Je vois donc que cet espace & cette vitesse seront toujours nulles, lorsque l' abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ restera en deça du point P; ensuite que l' espace sera constant, & la vitesse nulle, lorsque l' abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ tombera au delà de Q. D' où je conclus que, pour un tems quelconque t, il n' y aura, & il ne pourra y avoir d' autres particules en mouvement, que celles, pour lesquelles la valeur de $x \pm t\sqrt{c}$ sera plus grande que la distance du point P au point A, & moindre que la distance du point Q au même point A qui est toujours l'origine des abscisses, quoique placée à une distance infinie. Examinons séparément les deux cas de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$.

Soit p la distance entre le point A & le point P, & soit $x = p + z$, z sera une nouvelle abscisse qui aura son origine en P. Posons maintenant en prémier lieu $p + z - t\sqrt{c} = p$, on aura $z = t\sqrt{c}$; posons ensuite $p + z - t\sqrt{c} = p + PQ$, on aura $z = PQ + t\sqrt{c}$. Par là on peut avoir les limites de l'agitation des particules dans le tems t, en tant qu'elle résulte des termes dépendans de l'expression $x - t\sqrt{c}$; car il ne faut que prendre sur la ligne PQ, les points P' & Q' tels que $PP' = t\sqrt{c}$, & $P'Q' = PQ$; & la portion $P'Q'$ de la fibre sera la seule, où cette agitation aura lieu. On trouvera de la même maniére les limites de l' agitation des particules, qui dépand de la valeur de $x + t\sqrt{c}$; car en faisant $p + z + t\sqrt{c} = p$ & $= p + PQ$, on a deux valeurs de z, savoir $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$. On prendra donc de nouveau, sur

la même ligne prolongée du côté opposé, deux autres points $`P$ & $`Q$, tels que $P`P = t\surd c$, & $P`Q = P`P - PQ$ c'est-à-dire, que $`P`Q = PQ$; & tous les mouvemens, dont la détermination dépendra de la valeur de $x + t\surd c$ seront renfermés dans ce dernier espace $`P`Q$.

De ce qu'on vient de démontrer il s' ensuit que la *pulsion* primitive, c' est-à-dire l' onde excitée par le corps sonores dans l' espace PQ de la fibre aérienne indéfinie, s' est comme divisée en deux autres, qui dans le tems t ont été transportées, l' une à droite en $P'Q'$, & l' autre à gauche en $`P`Q$, conservant toujours la même étendue PQ. Pour connoître la vitesse de la propagation de ces *pulsions* secondaires, on n'a qu'à chercher celle des points P' & $`P$, dont la position par rapport à P est déterminée généralement par les équations $z = t\surd c$, & $z = - t\surd c$; puisque donc z représente ici les espaces parcourus par ces points dans le tems t, il est évident que leur mouvement sera uniforme, & leur vitesse $= \surd c$, & que cela aura lieu quelle qu'ait été la nature de la *pulsion* primitive. Il est inutile de nous arrêter à examiner la valeur de $\surd c$ qui est $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$, puisque cette expression en substituant pour $\frac{E}{D}$, la quantité A, ou nk qui est sa valeur, devient la même que celle qu'on a trouvé ailleurs (*Art.* LVI.), & que M. Newton a déduit de sa Théorie, comme on l' a déja remarqué ci-dessus (*Art.* 1.).

13. Ce seroit ici le lieu de faire voir l' appliquation de la formule générale que nous avons trouvé d'après les Principes de M. Newton dans *l' Art. cité*; mais cette formule étant entiérement semblable à celle que M. D' Alembert a donné sur les vibrations des cordes, il est clair qu'en admettant les fonctions discontinues, qui sont indispensables dans la matière, dont il s'agit ici (*Art.* 4.), on aura la

même

même conſtruction que nous avons donné dans *l'Art.* 7., & que par conſéquent la Théorie de la propagation du Son, qui en réſultera, ne ſera point autre que celle qui vient d'être d'expliquée. Par-là on prouvera aiſément ce que l'on a avancé plus haut (*Art.* 1.), que la viteſſe de la propagation, ſelon cette Théorie eſt déterminée par la quantité $\frac{\sqrt{2hA}}{T}$ qui diviſe l'x dans les fonctions φ & ψ.

14. La manière dont nous venons de conſidérer la propagation du Son eſt beaucoup plus générale & plus conforme à la nature que celle, qu'on a emploïé dans le *Chap.* I. de la II. *Sect.* des *Rech. préc.* En effet l'hipotéſe que j'avois adoptée dans cet Ouvrage, ſavoir qu'une ſeule particule d'air fût ébranlée par le corps ſonore à chacune de ſes vibrations, ne paroit pas pouvoir ſubſiſter avec l'équilibre mutuel de toutes les particules de la fibre; il me ſemble beaucoup plus naturel d'imaginer, que la prémiére particule pouſſée par le corps ſonore, condenſe juſqu'à une certaine diſtance les particules ſuivantes, pourvû que cette diſtance ne ſoit pas telle que les *pulſions* ou ondes ſonores, qui ſe ſuccéderont les unes aux autres, puiſſent ſe troubler & s'entredétruire; comme il arriveroit néceſſairement, ſi le tems, qu'elles mettent à parcourir leur largeur, étoit moindre que l'intervalle du tems entre deux vibrations ſucceſſives du corps ſonore. On pourra déterminer les limites de la plus grande largeur des ondes, en prenant le nombre des vibrations que fait dans une ſeconde le ſon le plus aigu que nous puiſſions entendre, & diviſant par ce nombre l'eſpace que les ondes ſonores parcourent dans le même tems. Ce nombre peut ſe déduire rigoureuſement de la formule connue des vibrations des cordes, que nous avons démontré être exacte pour quelque figure que la corde prenne; ſi donc on s'en tient à ce que dit

 M. Euler

M. Euler dans *l'Art.* XIII. de sa *Théorie de Musique*, on aura le nombre 7520., par lequel divisant le nombre 1240. qui exprime en piés l'espace parcouru par le Son dans une seconde, selon les expériences moïennes, il viendra pour quotient 1. pouce & 2. lignes environ, qui sera par conséquent la mesure de la plus grande étendue que puissent avoir les ondes sonores, pour former des sons distincts & perceptibles à l'oreille.

15. Jusqu'ici nous n'avons encor considéré que le mouvement progressif des ondes sonores; si on vouloit aussi connoître les mouvemens particuliers qui les composent, on les trouveroit aisément par les principes établis ci-dessus.

Supposons que x ou bien z soit donné, au lieu de t, dans les équations $z = t\sqrt{c}$, & $z = PQ + t\sqrt{c}$, la différence des deux valeurs de t nous donnera la durée du mouvement de chaque particule de l'onde $P'Q'$; laquelle sera $= \frac{PQ}{\sqrt{c}}$. Or puisque $\sqrt{c}$ est la vitesse constante, avec laquelle les ondes avancent continuellement, il est clair que l'agitation de chaque particule ne durera précisément que le tems que l'onde met à parcourir toute sa largeur PQ. Il en sera de même pour les ondes propagées du côté opposé, ce qu'il est aisé de reconnoître par le moïen des deux équations $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$ qui leur appartiennent.

Pour ce qui est de la nature de chaque mouvement particulier, il faudra la déterminer par la construction générale des espaces & de vitesses. On trouvera pour cela, 1.° Que toutes les particules subissent successivement la même agitation dépendante de la nature de toute la *pulsion* primitive. 2.° Que, si on suppose que la *pulsion* primitive consiste dans le seul déplacement des particules, sans aucune vitesse imprimée, l'agitation de chaque particule ne sera

com-

composée que d'une seule allée, & d'un retour à son lieu d'équilibre, après lequel elle demeurera immobile. 3.° Que, si l'on suppose au contraire que la *pulsion* primitive ne consiste que dans l'impression d'une certaine vitesse, les particules, pendant tout le tems de leur agitation, s'écarteront continuellement de leurs propres points d'équilibre, & elles n'y reviendront plus comme auparavant. 4.° Qu'enfin, si la *pulsion* primitive dépand de l'une & de l'autre cause, l'agitation des particules sera composée de celles dont nous venons de parler; ce qui paroit être le cas de la nature.

16. M. Euler dans une lettre du 23. Octob. 1759. m'a fait l'honneur de me mander, que la lecture de *mes Rech. sur le Son* lui avoit suggéré le dénouvement d'une difficulté qui s'étoit présentée a lui depuis long-tems. Cette difficulté consistoit à savoir pourquoi, les ébranlemens primitifs se repandant d'abord naturellement de deux côtés opposés, les ébranlemens dérivatifs ne se propagent plus que d'un seul côté, & toujours suivant la même direction. La raison de cette différence dépand de la nature particuliére des ébranlemens dérivatifs, qui est telle que leur propagation ne peut avoir lieu que d'un seul côté.

Pour s'en convaincre qu'on examine les formules des valeurs de z & de u trouvées à la fin de *l'Art.* 6., & supposant que z & u soient les excursions & les vitesses données, qu'on cherche celles qui en résultent pour un tems quelconque t' & pour une particule quelconque déterminée par l'abscisse x'. Il est visible qu'il n'y a pour cela que à substituer z à la place de Z & u à la place de V; & désignant par z' & u' les valeurs cherchées, on aura

$$z' = \frac{z^{(x'+t'\sqrt{c})} + z^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2}$$
$$+ \frac{\int u\,dx^{(x'+t'\sqrt{c})} - \int u\,dx^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$u' =$

$$u' = \frac{u^{(x'+t'\sqrt{c})} + u^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2}$$
$$+ \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\frac{dz}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c})} - \frac{dz}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c})}\right).$$

Maintenant on ſait, par ce qu'on a démontré (*Art.* 12.), que les termes, dont les expoſans ſont $x - t\sqrt{c}$, ſont les ſeuls qui déterminent la propagation ſuivant la direction PP', & que l'autre la propagation ſuivant $P'P$ dépend ſimplement des termes qui renferment la quantité $x + t\sqrt{c}$; donc pour connoître la propagation des ébranlemens de l'onde $P'Q'$, il ne faudra ſubſtituer, au lieu de z & de u, que les ſeuls termes

$$\frac{Z}{2}^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}}^{(x-t\sqrt{c})} \quad \&$$
$$\frac{V}{2}^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx}^{(x-t\sqrt{c})}$$ ce qui donnera en poſant $x' \pm t'\sqrt{c}$ au lieu de x dans les expoſans

$$z' = \frac{Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$
$$- \frac{\int V dx^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \int V dx^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4\sqrt{c}}$$
$$+ \frac{\int V dx^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - \int V dx^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4\sqrt{c}}$$
$$- \frac{Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$u' = \frac{V^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + V^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$
$$- \sqrt{c}\cdot\frac{\frac{dZ}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \frac{dZ}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$
$$+ \sqrt{c}\cdot\frac{\frac{dZ}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - \frac{dZ}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$-\frac{V(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})-V(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}{4}.$$

Dans ces formules il eſt viſible que les termes, dont les expoſans renferment la quantité $+t'\sqrt{c}$ s'évanoüiſſent tous d'eux mêmes, & qu'il ne reſte que ceux où la même quantité ſe trouve avec le ſigne négatif; d'où il s'enſuit que la propagation des ébranlemens z' & u' ne peut ſe faire que dans le ſeul ſens PP'.

On prouveroit la même choſe pour les ébranlemens propagés d'abord ſuivant la direction oppoſée $P'P$; car en ſubſtituant, pour z & u, les ſeuls termes dont les expoſans contiennent $+t\sqrt{c}$; on verra que les formules réſultantes ne feront compoſées que de termes, où la quantité $t'\sqrt{c}$ ſe trouvera avec le ſigne $+$.

17. Nous avons ſuppoſé ci-deſſus que la fibre aérienne étoit infinie de l'un & de l'autre côté; & cette hipotéſe nous a donné des courbes *génératrices*, compoſées d'une ſeule branche terminée de part & d'autre, & pour ainſi dire iſolée. Mais il n'en feroit pas de même ſi la fibre étoit elle même terminée des deux côtés, ou d'un ſimplement; car puiſque la manière de continuer les courbes *fondamentales*, & *dérivées* eſt générale, & que les extrémités fixes de la fibre ſont les points, autour deſquels on doit, pour ainſi dire, faire tourner chaque branche, pour en avoir la continuation, ainſi qu'on l'a enſeigné (*Art.* 7.), il eſt évident que, dans le cas d'une ſeule extrémité fixe les courbes *génératrices* feront compoſées de deux branches égales, & ſemblablement ſituées de part & d'autre du point qui conſtitue cette extrémité; & que dans le cas de deux extrémités fixes, les courbes *génératrices* auront un nombre infini de branches égales & ſemblablement ſituées autour des deux points qui conſtituent les extrémités données. Delà ſi on cherche la propagation des ondes ſonores par la méthode de *l'Art.* 12.; on trouvera ſans beaucoup de peine

que

que chaque onde, venant rencontrer une des extrémités fixes, devra ſe réfléchir, pour ainſi dire, & retourner en arrière avec la même viteſſe, & conſervant la même nature qu'elle avoit avant la réflexion, d'où il réſultera des *échos* ſimples ou compoſés, ainſi qu'on l'a expliqué (*Chap.* II. de la *Sect.* II. *des Rech. préc.*).

Je ne m'arreterai pas ici à démontrer plus en détail cette Théorie des *échos*, non plus que les autres propriétés du Son, qui dépendent des principes que nous venons d'établir. Il ne faut que relire attentivement la *Section citée* pour voir que les propoſitions qu'on a démontré, en ne conſidérant que des mouvemens inſtantanés dans les particules de l'air, ſont auſſi vraies dans l'hipotéſe préſente des ondulations.

Mais il eſt un point eſſentiel de la Théorie du Son, dont on n'a pas encore parlé juſqu'à préſent; c'eſt ſon intenſité. Or de ce que les ondes ſonores ne ſouffrent aucune altération en parcourant un eſpace quelconque, comme on l'a fait voir (*Art.* 12.), il eſt ſimple de conclure que l'intenſité du Son ſera conſtante & indépendante de la diſtance du corps ſonore. Mais cette concluſion ne peut avoir lieu que dans l'hipotéſe que le Son ſoit obligé de ſuivre une ſeule & même direction, commé ſi l'on ſuppoſoit l'air renfermé dans des tuïaux, ou des conduits aſsès étroits, par rapport à leur longueur; ainſi, dans les acqueducs de Rome, le P. Kircher rapporte que les Sons ne reçoivent point de diminution ſenſible par l'eſpace de 600. piés environ. Il n'en eſt pas de même pour l'air libre, dans lequel le Son ſe propageant de tous côtés à la ronde, doit s'affaiblir à méſure qu'il s'éloigne du corps ſonore; & c'eſt ce que l'expérience journaliére apprend, & que nous allons auſſi démontrer par la Théorie, en adoptant la ſeconde hipotéſe de *l'Art.* 11., qui reſte encore à examiner.

§. II.

§ I I.

De la propagation du Son dans l' hipotése des ondes ſphériques.

18. DANS cette hipotéſe on conſerve à la maſſe de l'air ſes trois dimenſions; mais on ſuppoſe que, aïant pris un point fixe pour centre, toutes les particules qui ſe trouvent dans la direction de chaque rayon ſe meuvent ſans ſortir de cette direction, & que leurs mouvemens ne dépandent que du tems t, & de la diſtance de chacune d'elles au centre. Delà il eſt clair qu'il doit ſe former dans l'air des ondulations ſphériques & concentriques, dont la détermination ſoit contenue dans une ſeule équation, de même que dans le cas de l' hipotéſe précédente. Cette équation peut ſe trouver ſoit par l' appliquation des formules générales, ainſi que l' a fait M. Euler dans ſon *Mémoire pag.* 1. ci-deſſus, ou plus ſimplement encore, quoique avec moins de rigueur, en conſidérant le mouvement d'un fluide élaſtique, renfermé dans un tuïau conique; comme on le verra plus bas. Nous nous contenterons pour le préſent d' emprunter l' équation de M. Euler, & d' y appliquer notre méthode, afin d'avoir une conſtruction qui ne ſoit point aſſujetie à la loi de continuité, comme l'exige la Théorie de la propagation du Son. Cette équation, en ſubſtituant z pour u, & x pour V ſe réduit à celle-ci $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2c\left(\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right)$, qui peut être traitée de la même manière que celle du Problême I.

P R O B L E M E II.

Conſervant les mêmes noms & les mêmes ſuppoſitions du Problême I., avec cette ſeule différence que les mouvemens des

des particules soient contenus dans l'équation $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ $+ 2c\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right)$ *construire cette même équation.*

Je commence par multiplier l'un & l'autre membre par Mdx (M étant une fonction quelconque de x); ensuite j'intégre en ne faisant varier que x; j'ai, $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c \int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx + 2c\int\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right) Mdx$. Je transforme d'abord l'intégrale $\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx$ en $\left(\frac{dz}{dx}\right) M - \int\left(\frac{dz}{dx}\right) \times \left(\frac{dM}{dx}\right) dx$, ensuite en $\left(\frac{dz}{dx}\right) M - z\left(\frac{dM}{dx}\right) + \int z\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$. Je change de même l'autre intégrale $\int\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right) Mdx$ en $\frac{zM}{x} - \int\frac{z}{x} \left(\frac{dM}{dx}\right) dx$, & je tire par la substitution la nouvelle équation $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c\left(M\left(\frac{dz}{dx}\right) - z\left(\frac{dM}{dx}\right) + \frac{2zM}{x}\right)$ $+ c\int z\left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx}\right) dx$.

Je dois maintenant supposer M tel, que $\frac{Mdz}{dx} - \frac{zdM}{dx}$ $+ \frac{2zM}{x}$ soit $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$; or puisque l'on a déja dans ces deux cas $z = 0$, par hipotése, il suffit que M le soit aussi, ce qui donnera les mêmes conditions à remplir par les constantes de M, que l'on a eu dans le *Probl.* I.

L'équation restante sera donc $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c\int z\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right.$ $\left.- \frac{2dM}{xdx}\right) dx$, où il faudra supposer $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx} = kM$.

Cette

Cette équation en M eſt intégrable par les méthodes connues ; mais en voici une qui eſt, ſi je ne me trompe ; la plus ſimple qu'on puiſſe emploïer dans ce cas.

Soit ſuppoſé $M = e^{\int \frac{dx}{p}}$, on aura par la ſubſtitution $-\frac{dp}{p^2dx} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{px} = k$, ſavoir $kp^2 + \frac{2p}{x} + \frac{dp}{dx} = 1$. Je vois que cette équation peut s'écrire ainſi $k(p + \frac{1}{kx})^2 dx + d \cdot (p + \frac{1}{kx}) = dx$, donc ſi on fait $p + \frac{1}{kx} = q$, on aura $kq^2dx + dq = dx$; d'où l'on tire $dx = \frac{dq}{1 - kq^2}$ & intégrant par les logarithmes $x = \frac{1}{2\sqrt{k}} l. (\frac{1 + q\sqrt{k}}{1 - q\sqrt{k}})$ ou bien en paſſant aux exponentielles, avec l'addition d'une conſtante C, $q\sqrt{k} = \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}$, donc $p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}} \times \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}$. Il faut maintenant pour avoir la valeur de M, intégrer la quantité $\frac{dx}{p}$. Or il eſt viſible que ſi l'on ſubſtitue pour p ſon expreſſion telle qu'on vient de la trouver, on a une différentielle qu'il feroit aſsès difficile, peut être impoſſible de ramener à l'intégration ; mais on peut ſemplifier beaucoup le calcul, en ſuppoſant l'arbitraire C nulle ou infinie ; dans le prémier cas on a $p = -\frac{1}{kx} - \frac{1}{\sqrt{k}}$, & dans le ſecond $p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}}$, & combinant l'une & l'autre valeur, $p = -\frac{1}{kx} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$. On aura donc $\int \frac{dx}{p} = \int \frac{kx\,dx}{-1 \pm x\sqrt{k}} = -1 \pm x\sqrt{k} + l.(-1 \pm x\sqrt{k})$,

& par conséquent, en ajoutant une constante A, $M = A(-1 \pm x\sqrt{k})\, e^{-1 \pm x\sqrt{k}}$; ou bien à cause de l'ambiguité des signes $M = A(-1 + x\sqrt{k})\, e^{-1+x\sqrt{k}} + B(-1 - x\sqrt{k})\, e^{-1-x\sqrt{k}}$. Or il faut que M soit $= o$, lorsque $x = o$, d'où il suit que $A + B = o$, & par conséquent $B = -A$, donc en changeant la valeur de la constante A, $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}) - Ax\sqrt{k}(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}})$, ou bien encore $M = A(\text{fin. } x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k} \text{ cof. } x\sqrt{-k})$.

Telle est la valeur de M qu'il falloit trouver; si l'on en prend la différence, on a $\frac{dM}{dx} = -Akx \text{ fin. } x\sqrt{-k}$, d'où l'on voit qu'au commencement, où $x = o$, on a aussi $\frac{dM}{dx} = o$, de sorte que le terme $-z\frac{dM}{dx}$ s'évanoüit de lui même, sans qu'il soit besoin de supposer $z = o$ dans ce point; ce qui nous montre que la valeur de z pourra être ici tout ce que l'on voudra.

Il faut maintenant déterminer k par la condition que M devienne nul, lorsque $x = a$; on aura donc pour cela $A(\text{fin. } a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k} \text{ cof. } a\sqrt{-k})$, ce qui donne $a\sqrt{-k} = \frac{\text{fin. } a\sqrt{-k}}{\text{cof. } a\sqrt{-k}} = \text{tang. } a\sqrt{-k}$, c'est-à-dire que l'angle $a\sqrt{-k}$ devra être égal à sa tangente. Cherchant donc un tel angle, & le nommant φ on aura $\sqrt{-k} = \frac{\varphi}{a}$. Quoique il soit impossible d'exprimer cet angle algébriquement, on peut néanmoins, par la seule considération du cercle, se convaincre, qu'il n'est pas unique & déterminé, mais qu'il y en a une infinité qui ont tous la même propriété, de sorte que $\sqrt{-k}$ aura aussi une infinité de valeurs différentes, qui satisferont toutes également. On peut voir dans le *Tome* II. de *l'Introd. à l'Analise des infinimens petits de* M. Euler *le dernier Prob. du Chap.* XXII., où l'on trouvera une manière assès simple de déterminer tous ces angles par approximation. Au reste

nous

nous n'aurons pas besoin dans la suite de connoître leurs valeurs, il nous suffira de savoir que leur nombre est infini.

Après avoir ainsi déterminé la variable M, si on suppose, comme dans le *Problême* I. $\int z M dx = s$, & qu'on pratique les mêmes différentiations à l'égard de t notre dernière équation intégrale, deviendra $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks$, qui est la même que nous avons déja intégré dans le *Problême cité*. On aura donc ici de même

$$s = S \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} - R\sqrt{-ck} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck},$$

& mettant à la place des quantités s, r, S, & R leurs valeurs en z, u, Z, & V,

$$\int z M dx = \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck} \int Z M dx.$$

Il faut maintenant substituer la valeur de M, & faire les autres opérations que demande notre méthode; mais comme cette valeur de M est différente de celle du Problême I., il est clair que les mêmes procédés que nous avons suivi alors ne suffiront pas à présent; on pourra cependant s'en servir de nouveau avec succès, en préparant par une simple transformation les expressions $\int z M dx$, $\int u M dx$ avec les deux autres $\int Z M dx$ & $\int V M dx$ de la manière que voici. Substituant la valeur de M j'ai d'abord $\int z \operatorname{fin.} x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-k} \int z x \operatorname{cof.} x\sqrt{-k}\, dx$; or il est clair que si l'on n'avoit que le prémier membre de cette expression, on seroit exactement dans le cas du Problême I.; il ne s'agira donc que de ramener aussi le second membre à la même forme; pour cela je change d'abord la formule $\int z x \operatorname{cof.} x\sqrt{-k}\, dx$ en $\frac{z x \operatorname{fin.} x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} - \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{d.zx}{dx}\right) \operatorname{fin.} x\sqrt{-k}\, dx$, ensuite je remarque que, puisque on suppose que les intégrales ne

 s'éten-

s'étendent que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, le terme algébrique qui est de lui même $= 0$ dans le cas de $x = 0$, & qui le devient aussi dans le cas de $x = a$, à cause que z s'évanoüit par hipotése, ce terme, dis-je, devra être entiérement effacé, de sorte que l'on aura simplement

$$\int z x \operatorname{cos.} x\sqrt{-k}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{-k}}\int\left(\frac{d.zx}{dx}\right) \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx.$$

Substituant donc cette transformée dans l'expression de $\int zMdx$, elle deviendra $\int\left(z + \frac{d.zx}{dx}\right) \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx$. Faisant des opérations semblables sur les autres expressions intégrales, & supposant pour plus de simplicité

$$z + \frac{d.zx}{dx} = z', \quad u + \frac{d.ux}{dx} = u'$$

$$Z + \frac{d.Zx}{dx} = Z', \quad V + \frac{d.Vx}{dx} = V'$$

nos deux équations intégrales deviendront

$$\int z' \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx = \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} \int Z' \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx + \frac{\operatorname{sin.} t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u' \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx = \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} \int V' \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck}\operatorname{sin.} t\sqrt{-ck} \int Z' \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx.$$

Ces équations sont réduites à l'état de celles que nous avons appris à construire dans le *Prob. précédent*. Il sera donc facile de leur appliquer la même méthode; or puisque tout se réduit à faire disparoître la quantité $\sqrt{-k}$ à cause du nombre infini de valeurs, dont elle est susceptible, il est clair que quoique ces valeurs ne soient pas les mêmes ici que dans le *Prob. cité*; néanmoins les résultats des opérations seront parfaitement semblables, ensorte qu'il ne faudra que substituer z', u', Z' & V' à la place de z, u, Z & V pour avoir tout d'un coup

$$z' = \frac{Z'^{(x+t\sqrt{c})} + Z'^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

+

$$+\frac{\int V'\,dx^{(x+t\sqrt{c})}-\int V'\,dx^{(x-t\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$$u'=\frac{V'^{(x+t\sqrt{c})}+V'^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

$$+\sqrt{c}\;\frac{\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})}-\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

Remettant à préſent au lieu de z', u', Z', V' leurs valeurs en z, u, Z & V, on aura deux équations qui détermineront les deux variables inconnues z & u par les données Z & V pour un tems quelconque t.

20. Les deux formules que nous venons de trouver étant parfaitement analogues à celles du *Prob.* I. admettront auſſi une conſtruction ſemblable à celle qu'on a déduit des courbes *fondamentales* & *dérivées* dans *l'Art.* 7. Suppoſons donc ici que les courbes ANB, AQB (*fig.* 1. & 2.) ſoient les lieux des valeurs de Z' & de V', ſavoir de $Z+\frac{d.Zx}{dx}$ & de $V+\frac{d.Vx}{dx}$ pour chaque abſciſſe x, & que les autres courbes anb, AqB (*fig.* 3. & 4.) en dépendent de la manière qu'on a dit dans *l'Art. cité*; on aura pour une abſciſſe quelconque $x=AM$, & pour un tems quelconque $t=\frac{MM'}{\sqrt{c}}=\frac{`MM}{\sqrt{c}}$

$$z'=z+\frac{d.zx}{dx}=\frac{M'N'+`M`N}{2}+\frac{M'q-`M`q}{2}$$

$$u'=u+\frac{d.ux}{dx}=\frac{M'Q'+`M`Q}{2}+\frac{M'n'-`M`n}{2}$$

Si on déſigne par P & Q ces valeurs de z' & u', de ſorte que

$$z+\frac{d.zx}{dx}=2z+\frac{x\,dz}{dx}=P \;\&$$

$$u+\frac{d.ux}{dx}=2u+\frac{x\,du}{dx}=Q$$

on aura en intégrant, après avoir multiplié par $x\,dx$

zx^2

$$z x^2 = \int P x dx; \text{ \& } z = \frac{\int P x dx}{x^2} \text{ \& de même}$$

$$u x^2 = \int Q x dx \text{ \& } u = \frac{\int Q x dx}{x^2}.$$

Que φ & ψ repréfentent deux fonctions quelconques réguliéres ou irréguliéres, telles que

$$MN = \varphi AM = \varphi x$$

$$MQ = \psi AM = \psi x, \text{ on aura}$$

$$M'N' = \varphi AM' = \varphi(x + t\sqrt{c})$$

$$`M`N = \varphi A`M = \varphi(x - t\sqrt{c})$$

$$M'Q' = \psi AM' = \psi(x + t\sqrt{c})$$

$$`M`Q = \psi A`M = \psi(x - t\sqrt{c}) \text{ \&}$$

$$Mn = \sqrt{c}\,\frac{d.\varphi AM}{d.AM} = \sqrt{c}\,\frac{d.\varphi x}{dx}$$

$$Mq = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi AM d.AM = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi x dx,$$

& par conféquent

$$M'n' = \sqrt{c}\left(\frac{d.\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx}\right)$$

$$`M`n = \sqrt{c}\left(\frac{d.\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right)$$

$$M'q' = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi(x + t\sqrt{c})\,dx$$

$$`M`q = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \psi(x - t\sqrt{c})\,dx; \text{ donc}$$

$$P = \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\int \psi(x + t\sqrt{c})\,dx - \int \psi(x - t\sqrt{c})\,dx}{2\sqrt{c}}$$

$$Q = \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2} + \sqrt{c}\,\frac{\left(\frac{d.\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx}\right) - \left(\frac{d.\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right)}{2}$$

Soit

Soit supposé $\frac{d.\varphi x}{dx} = \varphi' x$, $\frac{d.\varphi' x}{dx} = \varphi'' x$ &c. & $\int \varphi x\, dx = {}^{\prime}\varphi x$, $\int \varphi x\, dx = {}^{\prime\prime}\varphi x$ &c., & ainsi pour la fonction ψ on aura $\int x.\varphi\,(x \pm t\sqrt{c})\,dx = x \int \varphi\,(x \pm t\sqrt{c})\,dx - \int dx \int \varphi\,(x \pm t\sqrt{c})\,dx = x\,{}^{\prime}\varphi\,(x \pm t\sqrt{c}) - {}^{\prime\prime}\varphi\,(x \pm t\sqrt{c})$; traitant de la même manière les autres formules intégrales qui composent les valeurs de $\int P\,x\,dx$, & de $\int Q\,x\,dx$ on aura après toutes les substitutions,

$$z = \frac{{}^{\prime}\varphi\,(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\varphi\,(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{{}^{\prime\prime}\psi\,(x + t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} - \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi\,(x + t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}}$$
$$+ \frac{{}^{\prime}\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \frac{{}^{\prime\prime}\psi\,(x - t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} + \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi\,(x - t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{{}^{\prime}\psi\,(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\psi\,(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi\,(x + t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{{}^{\prime}\varphi\,(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{{}^{\prime}\psi\,(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\psi\,(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \sqrt{c}\,\frac{\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{{}^{\prime}\varphi\,(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$

21. On peut semplifier ces expressions de la manière suivante. Au lieu de ${}^{\prime\prime}\varphi\,(x + t\sqrt{c}) + \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi\,(x + t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je pose simplement $\Delta\,(x + t\sqrt{c})$, & au lieu de ${}^{\prime\prime}\varphi\,(x - t\sqrt{c}) - \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi\,(x - t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je substitue de même la seule expression $\Gamma\,(x - t\sqrt{c})$ (Δ & Γ étant de nouvelles fonctions variables différentes de φ & ψ), & prenant les différences de la manière indiquée ci-dessus, on obtiendra les formules:

$z =$

$$z = \frac{\Delta'(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Delta(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{\Gamma'(x-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Gamma(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$u = \sqrt{c}\,\frac{\Delta''(x+t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{\Delta'(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \sqrt{c}\,\frac{\Gamma''(x-t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{\Gamma'(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$

lesquelles s'accordent pour le fond avec celles que M. Euler a donné dans son *Mémoire* à la *pag.* 9. ci-dessus, où il nomme u, ce que nous avons appellé z & V, ce que nous avons nommé x.

22. La construction trouvée, au commencement de *l'Art.* 20., n'est bonne que pour les cas, où $x \pm t\sqrt{c}$ n'est pas plus grande que a, ni moindre que *zero*, puisque les valeurs de Z & de V ne sont données que pour la simple étendue de l'axe $AB = a$. Il faut donc chercher ici, comme on l'a fait dans le *Prob.* I., une manière de continuer les courbes ANB, AQB, &c. au delà des points A & B. Pour cela aïant conservé la construction de l' *Art.* 7. avec la même équation des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, on examinera leur cours au delà des points B' & A'', en supposant la quantité $\sqrt{-k}$ déterminée par l' équation $a\sqrt{-k} = \frac{\text{sin. } a\sqrt{-k}}{\text{cos. } a\sqrt{-k}}$ (*Art.* 19.).

Pour ce qui regarde la branche $A''S$ qui est du côté des abscisses négatives rien n' est d' abord plus facile que de la trouver; car faisant x négatif, sin. $x\sqrt{-k}$ devient simplement négatif sans changer de valeur; d'où il s'ensuit que cette branche ne doit être que la branche même $A''S''$ renversée de la manière qu'on l' a déja fait dans la *fig.* 6. Ainsi on prouvera de nouveau par le même raisonnement de *l'Art.* 7. que la partie des aires qui répond à l'abscisse

AA''.

AA'' ſera la même que celle qu'on pourroit former ſur l'abſciſſe AA', en emploïant la courbe $A'S'$ & la courbe AN continuée deſſous de l'axe de la même manière que la $A''S''$; d'où l'on voit que la continuation de la courbe ANB au delà de A, ſera auſſi la même que celle qu'on a pratiqué dans la *fig.* 7.

Mais il n'en ſera pas ainſi pour la continuation au delà de B; car ſin. $x\surd -k$ n'aïant plus dans le cas préſent des valeurs égales & contraires autour du point B' qui répond à $x = a$, la branche $B'`S$ ne ſauroit non plus être la même que la $B'S'$ renverſée. Il ne ſeroit pas difficile de connoître la nature de cette branche $B'`S$, mais cela ne ſerviroit de rien pour l'objet préſent, puiſque la méthode de *l'Art.* 7. demande que la branche $B'`S$ puiſſe être ſubſtituée à la place de la $B''S''$, afin qu'on ait la courbe entière $A''S''B''$ qui ſoit la même que la $A'S'B'$, & que la ASB. Pour remplir cette condition il n'y a pas d'autre moïen que de transformer chaque la portion d'aire qui répond à $B'B$ en une autre égale, & dans laquelle la branche $B'`S$ ſoit ſemblable & diamétralement oppoſée à la $B'S'$, comme dans la *fig.* 6. Examinons pour cela cette expreſſion intégrale $\int Z'$ ſin. $(a+z)\surd -k\, dz$, laquelle étant priſe depuis le point B', ou $z = 0$, juſqu'au point B, exprime l'aire formée par les produits des ordonnées des deux courbes ANB, $A'S'B'$ rélativement à l'eſpace $B'B$; & voïons ſi on peut la changer en une autre de la forme de $-\int(Z)$ ſin. $(a-z)\surd -k\, dz$, (Z) déſignant une quantité quelconque donnée en Z'.

Je prens cette autre expreſſion $\int R$ ſin. $(a+z)\surd -k\, dz$, & je la change dans ſon égale $\int R$ ſin. $a\surd -k \times$ coſ. $z\surd -k\, dz$ $+ \int R$ coſ. $a\surd -k \times$ ſin. $z\surd -k\, dx$. Je ſubſtitue enſuite à la place de ſin. $a\surd -k$, la quantité $a\surd -k$ coſ. $a\surd -k$ tirée de l'équation qui détermine la valeur de $\surd -k$; & je fais évanoüir à l'aide d'une intégration par parties le coéficient

$\sqrt{-k}$ introduit par cette ſubſtitution ; j'ai ainſi
$\int R$ ſin. $a\sqrt{-k} \times$ coſ. $z\sqrt{-k}\, dz$
$= a\sqrt{-k} \int R$ coſ. $a\sqrt{-k} \times$ coſ. $z\sqrt{-k}\, dz$
$= aR$ coſ. $a\sqrt{-k} \times$ ſin. $z\sqrt{-k}$
$- a \int$ coſ. $a\sqrt{-k} \times$ ſin. $z\sqrt{-k}\, dR$.
Le terme algébrique de cette transformée s'évanoüit de lui même, lorſque $z = 0$, donc ſi on ſuppoſe $R = 0$, lorſque $z = B'B$ (nous verrons ci-après que cette ſuppoſition eſt poſſible) on pourra l'effacer entiérement; & la prémiére transformée deviendra par la ſubſtitution $\int R$ coſ. $a\sqrt{-k} \times$ ſin. $z\sqrt{-k}\, dz - a \int$ coſ. $a\sqrt{-k} \times$ ſin. $z\sqrt{-k}\, dR = \int R$ ſin. $(a+z)\sqrt{-k}\, dz$. Développons à préſent les produits des *ſinus* & *coſinus*; on aura l'équation

$$\frac{1}{2} \int R \text{ ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz - \frac{1}{2} \int R \text{ ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dz$$
$$- \frac{1}{2} a \int \text{ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dR + \frac{1}{2} a \int \text{ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dR$$
$$= \int R \text{ ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz ;$$ & réduiſant
$$\int \left(R + \frac{a\,dR}{dz}\right) \text{ſin. } (a+z)\sqrt{-k}\, dz$$
$$= -\int \left(R - \frac{a\,dR}{dz}\right) \text{ſin. } (a-z)\sqrt{-k}\, dz.$$

Comparant donc les deux membres de cette équation avec les formules propoſées $\int Z'$ ſin. $(a+z)\sqrt{-k}\, dz$, & $-\int (Z)$ ſin. $(a-z)\sqrt{-k}\, dz$, on aura $Z' = R + \frac{a\,dR}{dz}$ & $(Z) = R - \frac{a\,dR}{dz}$, d'où l'on déduira le rapport entre (Z) & Z'. Multipliant la prémiére équation par $e^{\frac{z}{a}}\, dz$, & intégrant il vient $\int Z' e^{\frac{z}{a}}\, dz = a R e^{\frac{z}{a}}$, & $R = \frac{e^{-\frac{z}{a}} \int Z' e^{\frac{z}{a}}\, dz}{a}$; d'où l'on tire en ſubſtituant $(Z) =$

$\frac{2e^{-\frac{z}{a}}\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz}{a} - Z'$. Or nous avons ſuppoſé que R étoit $= 0$, lorſque $z = B'B$; on ſatisfera donc à cette condition, en prenant l'intégrale $\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz$, tel qu'il s'évanoüiſſe dans ce cas; il ne faudra pour cela que poſer $B'B - y$ au lieu de z & de dy au lieu de dz, & commencer l'intégration avec les abſciſſes y du point B en allant vers B'; on aura par ce moïen $(Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}}\int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$.

Telle eſt la valeur de (Z) qui étant priſe au lieu de Z' pour multiplier chaque ordonnée correſpondante de la branche $B'`S$ produira une aire égale à celle qui ſe formeroit en multipliant la valeur de $Z'$ par l'ordonnée correſpondante non pas de la branche $B'`S$, mais de celle qui ſeroit la vraie continuation de la courbe $A'S'B'$ dans notre cas. Delà, & du raiſonnement de *l' Art.* 7. il n'eſt pas difficile de conclure que la portion d'äire qui répond naturellement à $B'B$ dans la formule $\int Z'$ ſin. $(X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$ peut être changée en une autre, formée ſur BB'' par les ordonnées de la branche $S''B''$, & par celles d'un autre branche, comme la BN'' (*fig.* 10.) qui ſerve, pour ainſi dire, de continuation à la courbe fondamentale ANB, & qui ſoit telle qu'en prenant de part & d'autre de B les abſciſſes égales BP', $B`P = y$, on ait toujours $P'N'' = (Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}}\int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$

$$= \frac{2e^{\frac{y}{a}}\int P``N e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - `P``N.$$

Voila donc commant il faudra continuer la courbe *fondamentale* ANB au delà de B pour pouvoir faire uſage de la conſtruction donnée ci-deſſus, lorſque X a des valeurs plus grandes que a.

Tout

Tout ce que nous avons jusqu'ici enseigné sur la manière de continuer cette courbe d'un côté & de l'autre, s'appliquera aussi à l'autre courbe *fondamentale* AQB, & encore aux courbes *dérivées* anb, Aqb, pourvu que dans ces dernières on ait soin de placer les deux branches de continuation au dessus de l'axe par la raison qu'on a dit à la fin de *l'Art. 7*.

La construction qu'on vient de trouver n'est encore suffisante que pour les cas, où X est contenu entre les limites $-a$ & $+2a$. Pour lui donner toute la généralité qu'il est possible, reprenons la formule $\int Z'$ sin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$ qui a été changée en $-\int(Z)$ sin. $(a-z)\sqrt{-k}\,dz$; posant $a+z=x$, on aura $\int Z'$ sin. $x\sqrt{-k}\,dx = \int(Z)$ sin. $(x-2a)\sqrt{-k}\,dx$, d'où l'on voit que l'abscisse x peut être diminuée de $2a$, pourvu qu'on change l'ordonnée Z' en (Z); de même si $((Z))$ est une fonction de (Z), telle que (Z) l'est de Z', on pourra diminuer de $2a$ l'abscisse qui se rapporte à (Z), en changeant (Z) en $((Z))$; donc on pourra aussi diminuer l'abscisse de Z' de $4a$ en changeant immédiatement Z' en $((Z))$; & ainsi de suite. Delà il résulte que le reste de la continuation des courbes, soit *fondamentales*, soit *dérivées* au delà du point B, pourra se déduire aisément de la branche qui répond à l'abscisse $=2a$; car on n'aura qu'à transformer successivement cette branche en d'autres, dont les ordonnées aux mêmes abscisses se répondent entr'elles, comme les expressions Z', (Z), $((Z))$ &c. & appliquer ensuite par ordre, & suivant la direction AB toutes ces branches l'une à côté de l'autre le long de l'axe AB prolongé à l'infini.

Par un raisonnement tout opposé, on prouvera que la continuation des mêmes courbes au delà de A se fera par un assemblage semblable de branches dérivées l'une après l'autre de la seule branche qui répond à l'abscisse $2a$, mais avec des opérations contraires aux précédentes, savoir de manière que les ordonnées qui répondent à une même ab-

ſciſſe x dans chaque branche à commencer du point A ſoient entr'elles, comme les quantités (Z) & Z'.

Par-là on trouvera ſans difficulté que les courbes, dont il s'agit, auront autour du point A une figure ſemblable, avec cette ſeule différence que pour les courbes *fondamentales* les deux branches infinies de part & d'autre de A ſeront diamétralement oppoſées, ſavoir, l'une au deſſus, l'autre au deſſous de l'axe; & que pour les courbes *dérivées*, les branches ſeront l'une & l'autre du même côté de l'axe; d'où il s'enſuit qu'aïant exécuté la continuation du côté des abſciſſes poſitives à l'infini, ſuivant ce qu'on a dit ci-deſſus, on n'aura plus qu'à renverſer la même courbe au delà de A, & au deſſous, ou au deſſus de l'axe, ſelon qu'elle appartiendra aux *fondamentales*, ou aux *dérivées*.

23. Par la méthode qui vient d'être expliquée, nous avons la manière de continuer de part & d'autre à l'infini les courbes qui dépendent des valeurs de Z & de V, données à volonté dans le prémier inſtant du mouvement, ſans s'embaraſſer que les différentes branches de ces courbes ſoient liées entr'elles par la loi de continuité. Mais ſi on vouloit ſi borner à admettre cette loi, on pourroit obtenir les mêmes réſultats avec beaucoup moins de peine par la ſimple conſidération des formules données à la fin de *l'Art.* 20. Toute la difficulté ſe réduiroit à chercher la nature des fonctions φ & ψ au delà des points A & B, par la condition que z & u ſoient $=$ o dans ces points quelque valeur qu'on ſuppoſe à t.

Poſons d'abord dans ces formules $x =$ o, & z & u de même $=$ o, on aura les équations

$$o = \frac{{}'\varphi\, t\sqrt{c} + {}'\varphi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{{}''\varphi\, t\sqrt{c} + {}''\varphi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$
$$+ \frac{{}''\psi\, t\sqrt{c} - {}''\psi - t\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}} - \frac{{}'''\psi\, t\sqrt{c} - {}'''\psi - t\sqrt{c}}{2x^2\sqrt{c}}$$

o =

$$o = \frac{{}^{\prime}\psi\, t\sqrt{c} + {}^{\prime}\psi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{{}^{\prime\prime}\psi\, t\sqrt{c} + {}^{\prime\prime}\psi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$

$$+ \sqrt{c}\, \frac{\varphi\, t\sqrt{c} - \varphi - t\sqrt{c}}{2x} - \sqrt{c}\, \frac{{}^{\prime}\varphi\, t\sqrt{c} - {}^{\prime}\varphi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$

De ces deux équations il ſuffira de vérifier la prémiére, puiſque la ſeconde n' en eſt que la différentielle diviſée par dt; mais il ſe préſente dans cette opération une difficulté; car les termes étant diviſés les uns par x, les autres par x^2, on peut être en doute ſi en faiſant à part $= o$ les numérateurs de x & de x^2 toute la formule diſparoîtra, à cauſe que x eſt déja lui même $= o$. Pour lever cette difficulté, ſuppoſons que x, au lieu d'être tout-à-fait nul, ſoit ſeulement infiniment petit & $= \alpha$; & développons chaque fonction ${}^{\prime\prime}\varphi\,(\alpha \pm t\sqrt{c})$, ${}^{\prime\prime}\psi\,(\alpha \pm t\sqrt{c})$ &c. ſuivant la formule connue $\varphi\,(\zeta + \alpha) = \varphi\zeta + \alpha\varphi'\zeta + \frac{\alpha^2\varphi''\zeta}{2} + \frac{\alpha^3\varphi'''\zeta}{2\,.\,3}$ + &c.; en effaçant ce qui ſe détruit, & en négligeant les termes qui ſe trouvent multipliés par des puiſſances de α, on aura l'équation

$$o = -\frac{{}^{\prime\prime}\varphi\, t\sqrt{c} + {}^{\prime\prime}\varphi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{\varphi\, t\sqrt{c} + \varphi - t\sqrt{c}}{4}$$

$$- \frac{{}^{\prime\prime\prime}\psi\, t\sqrt{c} - {}^{\prime\prime\prime}\psi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{{}^{\prime}\psi\, t\sqrt{c} - {}^{\prime}\psi - t\sqrt{c}}{4}$$

qui doit être vraie indépendanment de la quantité α; donc on aura

$${}^{\prime\prime}\varphi\, t\sqrt{c} + {}^{\prime\prime}\varphi - t\sqrt{c} + {}^{\prime\prime\prime}\psi\, t\sqrt{c} - {}^{\prime\prime\prime}\psi - t\sqrt{c} = o,$$

$$\varphi\, t\sqrt{c} + \varphi - t\sqrt{c} + {}^{\prime}\psi\, t\sqrt{c} - {}^{\prime}\psi - t\sqrt{c} = o$$

équations auſquelles on ſatisfera en poſant ${}^{\prime\prime}\varphi - t\sqrt{c} = - {}^{\prime\prime}\varphi\, t\sqrt{c}$, & ${}^{\prime\prime\prime}\psi - t\sqrt{c} = {}^{\prime\prime\prime}\psi\, t\sqrt{c}$, ou bien en différentiant ${}^{\prime\prime}\psi - t\sqrt{c} = - {}^{\prime\prime}\psi\, t\sqrt{c}$. Or, t étant une variable qui peut croître à l' infini, en commençant du zero, $t\sqrt{c}$ pourra repréſenter une abſciſſe quelconque poſitive; donc la nature des fonctions ${}^{\prime\prime}\varphi$ & ${}^{\prime\prime}\psi$ devra être telle, que faiſant les abſciſſes négatives, ces fonctions deviennent ſimplement néga-

négatives ſans changer de valeur. Il en ſera de même des fonctions φ & ψ, puiſque en différentiant deux fois les équations précédentes, elles deviennent $\varphi - t\sqrt{c} = -\varphi t\sqrt{c}$, & $\psi - t\sqrt{c} = -\psi t\sqrt{c}$; d'où l'on voit que les deux courbes *ANB*, *AQB* qui repréſentent ces fonctions, devront avoir de part & d'autre du point *A* des branches égales & diamétralement oppoſées, ainſi qu'on l'a trouvé dans *l'Art.* 22. Il n'en ſera pas tout-à-fait ainſi pour les courbes *anb* & *Aqb* qui contiennent les fonctions φ' & $`\psi$. Car l'on a pour ces fonctions $\varphi' - t\sqrt{c} = \varphi' t\sqrt{c}$, & $`\psi - \sqrt{c} = `\psi t\sqrt{c}$; ce qui montre que les ordonnées doivent être exactement les mêmes à des abſciſſes égales, poſitives & négatives; & que par conſéquent les branches autour de *A* ſeront ſemblablement ſituées ſur l'axe; ce qui s'accorde avec ce qui a été enſeigné dans *l'Art. cité*.

Examinons maintenant les valeurs des mêmes fonctions pour les abſciſſes qui ſurpaſſent l'axe donné a. Poſant $x = a$, & z & $u = 0$, on aura de nouveau deux équations; la prémiére ſera

$$0 = \frac{`\varphi(a + t\sqrt{c}) + `\varphi(a - t\sqrt{c})}{2a} - \frac{``\varphi(a + t\sqrt{c}) + ``\varphi(a - t\sqrt{c})}{2a^2} + \frac{``\psi(a + t\sqrt{c}) - ``\psi(a - t\sqrt{c})}{2a\sqrt{c}} - \frac{```\psi(a + t\sqrt{c}) - ```\psi(a - t\sqrt{c})}{2a^2\sqrt{c}}$$

la ſeconde ne ſera que la différentielle de celle-ci, diviſée par dt, & par conſéquent nous pourrons nous diſpenſer d'y avoir égard. Or afin que les fonctions φ & ψ ne dépendent pas l'une de l'autre, on ſera ſéparément

$$a`\varphi(a + t\sqrt{c}) - ``\varphi(a + t\sqrt{c}) = -a`\varphi(a - t\sqrt{c}) + ``\varphi(a - t\sqrt{c}) \quad \&$$

$$a``\psi(a - t\sqrt{c}) - ```\psi(a + t\sqrt{c}) = a``\psi(a - t\sqrt{c}) - ```\psi(a - t\sqrt{c}).$$

Dif-

Différentions deux fois la prémière, & trois fois la seconde; on aura en changeant les signes

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) - a\varphi'(a+t\sqrt{c}) = -\varphi(a-t\sqrt{c}) + a\varphi'(a-t\sqrt{c}) \quad \&$$

$$\psi(a+t\sqrt{c}) - a\psi'(a+t\sqrt{c}) = -\psi(a-t\sqrt{c}) + a\psi'(a-t\sqrt{c}),$$

équations qui sont tout-à-fait semblables entr'elles.

Je multiplie par $e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt$, & j'intégre; j'ai

$$-a\varphi(a+t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} = -a\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} - 2\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt,$$

où l'on voit que la valeur de l'intégrale du dernier terme doit $= 0$, lorsque $t = 0$, puisque dans ce cas les deux autres termes se détruisent d'eux mêmes. On aura donc $\varphi(a+t\sqrt{c}) = \varphi(a-t\sqrt{c}) + \frac{2e^{\frac{t\sqrt{c}}{a}}}{a}\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt$. Or si l'on fait $t\sqrt{c} = y$, & que l'intégration soit supposée commencer du point, où $y = 0$, on aura

$$\varphi(a+y) = \varphi(a-y) - \frac{2e^{\frac{y}{a}}}{a}\int\varphi(a-y)\,e^{-\frac{y}{a}}\,dy.$$

Ce qui nous fait connoître la manière, dont les valeurs de la fonction φ qui sont de part & d'autre à distances égales de l'extrémité *B* de l'axe doivent être liées entr'elles. Or il est aisé de voir en relisant les *Art.* 20. & 22. que $\varphi(a-y)$ dénote ici la même chose que Z' & $\varphi(a+z)$ la même chose que $-(Z)$, donc l'équation précédente donne le même rapport entre Z' & (Z) qu'on a trouvé dans le dernier des *Art. cités*; & par conséquent aussi la même continuation de la courbe *ANB* au delà de *B*. Il est vrai que l'équation entre (Z) & Z' donnée dans l'endroit mentionné n'étoit d'abord censée appartenir qu'à la seule por-

tion

tion de l'axe comprise depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse $2a$; & que pour toutes les autres abscisses plus grandes à l'infini, on a donné une manière générale de continuer la courbe au moïen des branches déja connues; mais il ne faudra que considérer toutes les branches de continuation au delà de B, pour s'appercevoir qu'elles auront constamment avec celles qui sont en deçà de B, le même rapport que la quantité $-(Z)$ a avec la quantité Z'.

Ce qu'on vient de démontré sur la fonction φ doit se dire de même de l'autre fonction ψ, qui appartient à la courbe AQB, & il ne sera pas difficile de l'appliquer aussi aux autres fonctions φ' & $'\psi$ pour les courbes aqb, ANB, & de faire voir le parfait accord qu'il y a entre les résultats de ces procédés, & ceux qu'on a trouvé plus haut par une voie différente.

Cette matière auroit peut être besoin d'être traitée, avec un plus long détail, que nous ne l'avons fait ici; mais ceux, qui auront bien saisi l'esprit de nos méthodes, n'auront pas de peine à suppléer d'eux mêmes à ce, qui peut manquer pour l'entière exactitude des démonstrations, sans qu'il soit nécessaire de nous étendre davantage la-dessus.

24. Il est à remarquer, au reste, que l'on abregeroit beaucoup la solution précédente, si par le moïen de quelque substitution convenable on parvenoit à ramener tout d'un coup l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right)$ à la forme $\frac{d^2 z'}{dt^2} = c\frac{d^2 z'}{dx^2}$.

Or, pour cela, il n'y auroit qu'à supposer $z = \frac{\int z' x\, dx}{x^2}$, ce qui donne en différentiant, $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\int\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right) x\, dx}{x^2}$, $\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx} = \frac{z'}{x^2}$

$- \frac{3\int z' x dx}{x^4}$, $\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{(\frac{dz'}{dx})}{x} - \frac{3 z'}{x^2} + \frac{6\int z' x dx}{x^4}$, & ſubſtituant $\frac{\int(\frac{d^2 z'}{dt^2})\, x dx}{x^2} = c\, [\frac{(\frac{dz'}{dx})}{x} - \frac{z'}{x^2}]$; multipliant par x^2, & différentiant de nouveau $(\frac{d^2 z'}{dt^2})\, x\, dx = c\, (\frac{d^2 z'}{dx^2})$ $x dx$, ou bien $(\frac{d^2 z'}{dt^2}) = c\, (\frac{d^2 z'}{dx^2})$. Equation réduite au cas du *Prob.* 1. Or puiſque la valeur de z' eſt ici $= \frac{d.\, z x^2}{x dx}$ $= 2 z + \frac{x dz}{dx}$, telle qu'on l' a ſuppoſé dans l' Analiſe du *Prob. préc.* il eſt facile de voir que la ſolution, qu'on aura de façon, reviendra entiérement à celle qu' on a déja trouvé. Il eſt vrai qu' il faudra pour cela que la quantité k ait auſſi les mêmes valeurs; & c' eſt ce qu'il ſera aiſé de prouver; car on ſait, que la détermination de k dépend de la condition que les termes algébriques $\frac{M dz'}{dx} - \frac{z' dM}{dx}$ diſparoiſſent, lorſque $x = a$ (*Voïés Prob.* 1.). Or z' étant ici $= 2 z + \frac{x dz}{dx}$, dz' ſera $= 3\, dz + \frac{x\, d^2 z}{dx}$; d' où l'on aura en poſant $x = a$, & $z = 0$, l' équation

$$\frac{3\, M dz}{dx} + \frac{a M d^2 z}{dx} - \frac{a\, dM dz}{dx^2} = 0.$$

Maintenant, puiſque z doit toujours diſparoître, lorſque $x = a$ quel que ſoit le tems t, on aura auſſi $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, & par conſéquent, par l'équation fondamentale, $0 = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2 dz}{a dx} - \frac{2 z}{a^2}$ d'où l'on tire $\frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{2 dz}{a dx}$, laquelle valeur ſubſtituée, on

aura

aura $(M - \frac{adM}{dx})\frac{dz}{dx} = 0$, ou bien $M - \frac{adM}{dx} = 0$. Or, M étant $=$ ſin. $x\sqrt{-k}$ (*Art.* 6.), on aura en ſubſtituant, & poſant enſuite $x = a$, ſin. $a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k}$ coſ. $a\sqrt{-k} = 0$, d'où l'on tire, comme dans *l'Art.* 18. $a\sqrt{-k} = \frac{\text{ſin. } a\sqrt{-k}}{\text{coſ. } a\sqrt{-k}} = \text{tang. } a\sqrt{-k}$.

Il y a encore un autre ſubſtitution qu'on pourroit emploïer au lieu de la précédente. Cette ſubſtitution conſiſte à faire $z = y - \frac{xdy}{dx}$; ce qui réduira l'équation en z à une équation en y de la forme de $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c(\frac{d^2z}{dx^2})$, & cette équation étant conſtruite par la méthode du *Prob.* 1. on aura pour la valeur de z des formules analogues à celles qu'on a trouvé à la fin de *l'Art.* 20. ci-deſſus.

Application de la ſolution précédente à la recherche des loix de la propagation du Son.

25. L'Application du Problême précédent à la théorie de la propagation du Son, ſe préſente d'elle même. Imaginons un corps ſonore quelconque mis en vibration au milieu d'un air tranquille, homogène, & libre de tous cotés; il eſt viſible que ce corps peut être regardé comme placé ſenſiblement au centre d'une ſphère aérienne d'une étendue indéfinie; donc on ne s'écartera, que très-peu, de la vérité, en calculant les mouvemens comuniqués à toute la maſſe de l'air, dans l'hipothéſe des ondulations ſphériques, de *l'Art.* 18., & d'aprés la conſtruction donnée dans *l'Art.* 20. & *ſuiv.*

Pour cela, aïant méné la ligne indéfinie PR, qui repréſente le rayon de la ſphère totale d'air qui environne le corps ſonore, ſoit pris PQ pour le rayon de la petite

 ſphère

ſphère, dans laquelle ſont contenues les particules qui ont reçu leur mouvement primitif du corps ſonore placé en P; & ſoient tracées ſur la ligne PQ les courbes qui repréſentent les valeurs données de Z & V, & que nous avons appellées courbes *fondamentales*; il ſuit de *l'Art.* 22., que chacune de ces deux courbes devra être continuée du coté opposé Pq, avec une branche ſemblable, égale, & diamétralement opposée à la prémière. Il eſt vrai que cette propoſition n'a été démontrée que pour les courbes qui repréſentent les variables Z' & V'; mais il eſt facile de voir qu'elle a également lieu ici, où à cauſe de $x = 0$ au point P, les valeurs de Z', & V' deviennent $2Z$, & $2V$. On prouvera de même que les autres branches de continuation qui ſuivant la Théorie de *l'Art. cité*, devroient être ajoutées, du coté PR, diſparoîtront entiérement à cauſe du rayon a infini; de ſorte que les courbes *génératrices* ſeront toutes renfermées dans le ſeul eſpace qQ. Or, cela posé, qu'on demande pour un tems quelconque t les mouvemens des particules qui compoſent la fibre rectiligne PR, mouvemens qui, ſelon l'hipothèſe, doivent être ſenſiblement les mêmes pour toutes les autres fibres partant du centre P.

Soit pour faciliter cette recherche $t > \frac{PQ}{\sqrt{c}}$; il eſt évident qu'il faudra rejetter dans la conſtruction de *l'Art.* 20. les termes qui répondent aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, ces termes ne pouvant ici produire aucune valeur réelle; il n'y aura donc que les termes rélatifs aux abſciſſes $x - t\sqrt{c}$, qui entrent dans la détermination des quantités z & u, d'où dépend la connoiſſance des mouvemens en queſtion. Aïant pris (*fig.* 11.) ſur la ligne PR le point P' tel que $PP' = t\sqrt{c}$, & coupé de part & d'autre les parties $P'Q'$, $P'q'$ égales à PQ, & Pq; je tranſporte en $q'P'Q'$ les deux courbes qui renferment les valeurs des Z & V, telles qu'elles ont été décrites ſur le diamêtre qPQ; & prenant le point P' pour l'ori-

l'origine des abſciſſes x, je trouve pour une particule quelconque M;

$$z' = \frac{Z + \frac{d\cdot Zx}{dx} - \frac{1}{\sqrt{c}}\int (V + \frac{d\cdot Vx}{dx})\,dx}{2}$$

$$u' = \frac{V + \frac{d\cdot Vx}{dx} - d\cdot(Z + \frac{d\cdot Zx}{dx})\,\frac{\sqrt{c}}{dx}}{2};$$

Or par les ſuppoſitions faites à la fin de *l'Art.* 19., on a généralement $z' = z + \frac{d\cdot zx}{dx}$, & $u' = u + \frac{d\cdot ux}{dx}$; l'origine des x étant au point P. Mettant donc ici pour tranſporter cette origine en P', $x + t\sqrt{c}$ au lieu de x, & intégrant après avoir multiplié par $(x + t\sqrt{c})\,dx$, il viendra les deux équations ſuivantes

$$z\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\,Zx^2 + \frac{1}{2}t\sqrt{c}\,(\int Z\,dx + Zx)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}}\int (x + t\sqrt{c})\,dx \int (V + \frac{d\cdot Vx}{dx})\,dx$$

$$u\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\,Vx^2 + \frac{1}{2}\,t\sqrt{c}\,(\int V\,dx + Vx)$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2}\int (x + t\sqrt{c}) \times d\cdot(Z + \frac{d\cdot Zx}{dx}).$$

Si on ſimplifie les expreſſions intégrales par la méthode des intégrations par parties; & qu'on ajoute les conſtantes néceſſaires, on aura

$$z\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\,(x^2 + xt\sqrt{c})\,Z + \frac{1}{2}\,t\sqrt{c}\int Z\,dx$$
$$- \frac{1}{2}\,t\sqrt{c}\,A - \frac{1}{2\sqrt{c}}\,(\frac{x^2}{2} + xt\sqrt{c})\int V\,dx - \frac{1}{4\sqrt{c}}$$
$$\int V x^2\,dx + \frac{D}{4\sqrt{c}}$$

$$u\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\,(x^2 + xt\sqrt{c})\,V + \frac{1}{2}\,t\sqrt{c}\int V\,dx$$

$- \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}t\sqrt{c}B - \frac{\sqrt{c}}{2}(x^2 + xt\sqrt{c})\frac{dZ}{dx} - \frac{\sqrt{c}}{2}(x + 2t\sqrt{c})$$
$$Z + \frac{\sqrt{c}}{2}\int Z\,dx - \frac{\sqrt{c}}{2}A.$$

L'addition des conſtantes ſert à rendre égal à zero le dernier membre de chacune des équations précédentes, lorſque $x + t\sqrt{c} = 0$, ou $x = -t\sqrt{c} = -PP'$; ce qui eſt néceſſaire, puiſque, alors les prémiers membres diſparoiſſent d' eux mêmes; ainſi en ſuppoſant que les intégrations commencent toutes au point P' où $x = 0$, les lettres A, B, D, repréſenteront les valeurs des intégrales $\int Z\,dx$, $\int V\,dx$, $\int V x^2\,dx$ priſes depuis P' juſqu'à q', lequelles ſont les mêmes que ſi on les prenoit de l'autre coté depuis P' juſqu'à Q'. Il faut néanſmoins remarquer que dans la prémière équation l'on ne trouve point de conſtante qui faſſe évanoüir le terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}(\frac{x^2}{2} + xt\sqrt{c})\int V\,dx$, dans le cas de $x = -t\sqrt{c}$; c' eſt une omiſſion que j' ai fait exprès à cauſe d' un nouveau terme qu' il faut encore ajouter à la même équation. Pour voir la raiſon de ceci on n'à qu'à ſe ſouvenir de ce, que dans l' expreſſion des valeurs de z' & de u', nous avons regardé, comme généralement nuls, tous les termes qui répondoient aux abſciſſes exprimées par $x + t\sqrt{c}$; il en eſt cependant un qu'on ne peut pas négliger; c' eſt celui qui eſt exprimé par la formule intégrale $\int(V + \frac{d.Vx}{dx})dx = \int V\,dx + Vx$; car il eſt évident que quoique les valeurs de V diſparoiſſent ſur la ligne QR depuis le point Q, l' intégrale $\int V\,dx$ conſerve toujours la même valeur conſtante, qu'on a déſigné ciDeſſus par B; delà il eſt facile de conclure, qu'il faut ajouter à la valeur de z' le terme $\frac{B}{2\sqrt{c}}$, & par conſéquent à

la

la valeur de $z(x+t\sqrt{c})^2$ le terme $(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\frac{B}{2\sqrt{c}}$, lequel fera juftement difparoître l' autre terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\int V\,dx$, lorfque $x=-t\sqrt{c}$, $\int V\,dx$ devenant alors $=B$.

Si l'on examine maintenant la forme des deux équations précédentes, on verra aifément que l' on peut fe paffer de l' addition des conftantes, en donnant un autre origine aux intégrales $\int Z\,dx$, $\int V\,dx$, $\int V x^2 dx$, & les faifant commencer du point q' en allant vers R, ainfi l' on aura plus fimplement

$$z=\frac{(x^2+xt\sqrt{c})Z+t\sqrt{c}\int Z\,dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}$$
$$-\frac{(x^2+2xt\sqrt{c})\int V\,dx+\int V x^2 dx}{4\sqrt{c}(x+t\sqrt{c})^2}$$

$$u=\frac{(x^2+xt\sqrt{c})V+t\sqrt{c}\int V\,dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}$$
$$-\sqrt{c}\,\frac{(x^2+xt\sqrt{c})\frac{dZ}{dx}+(x+2t\sqrt{c})Z-\int Z\,dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}$$

26. Il eft vifible par ces formules que z & u font toujours $=0$, lorfque la valeur de x tombe au delà des points q', & Q'; d'où il fuit que pour le tems donné t, il n' y a que la feule partie $q'Q'$ de la fibre qui foit en mouvement; or comme le point du milieu P' a été pris tel que $PP'=t\sqrt{c}$; il eft évident que l' onde aérienne $q'Q'$ avancera toujours avec une viteffe conftante & $=\sqrt{c}$ qui eft la même que nous avons trouvé plus haut dans la prémière hipothèfe (*Art.* 12.). On pourroit ici développer les loix particulières que chaque particule d' air obfervera dans fes mouvemens, dépendamment des prémières impreffions Z & V produites par le corps fonore; mais laiffant ces

ces discussions peu importantes en elles mêmes nous nous, contenterons de faire observer en général la variation des quantités z & u, à mesure que le tems t augmente.

Pour cela, comme l'espace PQ est toujours très-petit (*Art.* 14.), on peut, sans erreur sensible, lorsque le tems t a déja une valeur considérable, négliger x par rapport à $t\sqrt{c}$; ainsi il viendra

$$z = \frac{xZ + \int Z\,dx - \frac{1}{\sqrt{c}}\int V\,dx}{2t\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{xV + \int V\,dx - \left(\frac{x\,dZ}{dx} + 2Z\right)\sqrt{c}}{2t\sqrt{c}}$$

d'où l'on voit qu'en général les valeurs de z & de u diminuent dans la raison inverse de $t\sqrt{c}$; ou de PP'; ce qui montre que la force ou l'intensité du Son, doit décroître à très-peu près dans la raison inverse des distances simples, du centre de propagation.

Je ne pousserai pas plus loin l'examen de ces formules, & je ne chercherai pas, non plus à déduire de la théorie exposée dans *l' Art.* 22. les lois de la reflexion qui auroit lieu dans l'hipothèse présente si la masse de l'air étoit renfermée dans un vase sphérique de grandeur finie. Ces recherches étant de peu d'utilité je me contenterai d'en avoir posés tous les principes dans la solution générale du Problême précédent.

CHAPI-

CHAPITRE IV.

Application de nôtre méthode du Chapître II. à différentes hipothéſes.

27. LEs Problêmes, dont nous allons maintenant nous occuper, quoique peu néceſſaires pour la matière que nous traitons, ſerviront néanmoins à faire voir l' utilité, & l' extenſion de notre méthode du Chapit. II.; ils pourront auſſi être d' uſage dans pluſieurs autres points de la Théorie du Son.

PROBLEME III.

Conſtruire l' équation

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + m c \left(\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right).$$

Multipliant par Mdx, & pratiquant les mêmes réductions que dans le Prob. II. on aura l'équation en M, $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m\,dM}{x\,dx} = kM$; qu'il faudra intégrer. Or il eſt facile de s'aſſurer, au moïen de quelques transformations convenables, que cette équation tombe dans le cas général de Ricati, & que par conſéquent ſon intégrabilité dépend de certaines conditions, qui ſe réduiſent ici à ce, que m ſoit un nombre pair poſitif ou négatif; mais la méthode ordinaire d'intégration pour ces mêmes cas eſt ſi laborieuſe, que je ne ſaurois me réſoudre à la pratiquer; d' ailleurs il ne ſuffit pas de trouver une expreſſion algébrique de M; il faut de plus, qu'elle ſoit telle, qu'on puiſſe dans la ſuite du calcul chaſſer aiſément la quantité k à l' aide de quelques réductions; comme on a fait dans les Problêmes précédens. Il m' a donc fallu imaginer une autre méthode, & voici comment je m'y ſuis pris.

Puiſque l'on a trouvé pour le cas de $m = 0$, qui eſt celui du Prob. I., $M = A$ ſin. $x \sqrt{-k}$; & pour le cas de $m = 2$ dans le Prob. II., $M = A$ (ſin. $x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}$ coſ. $x\sqrt{-k}$) ; ce qui s'exprime plus ſimplement par $M = A$ ſin. $x\sqrt{-k} - A x \frac{d \cdot \text{ſin.}\, x\sqrt{-k}}{dx}$, on eſt aſſés fondé à croire que, lorſque m aura une valeur quelconque 4, 6 &c. l'expreſſion de M ſera de la forme ſuivante

$$M = A \text{ ſin. } x\sqrt{-k} + B x \frac{d \cdot \text{ſin.}\, x\sqrt{-k}}{dx}$$
$$+ C x^2 \frac{d^2 \cdot \text{ſin.}\, x\sqrt{-k}}{dx^2} + \text{\&c.}$$

A, B, C &c. étant des coéficiens à déterminer par la ſubſtitution, & la comparaiſon des termes.

Mais pour embraſſer une plus grande généralité, je ſuppoſe ſin. $x\sqrt{-k} = u$; &

$$M = Au + B\frac{du}{dx} + C\frac{d^2u}{dx^2} + D\frac{d^3u}{dx^3} + \text{\&c.}$$

& je regarde les quantités A, B, C &c. comme des fonctions variables de x; dont il faut chercher la valeur convenable à l'équation donnée.

Je commence par prendre la différentielle de M, que je mets ſous la forme ſuivante

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dx} = \frac{dA}{dx}\cdot u &+ \frac{dB}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dC}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dD}{dx}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \text{\&c.}\\ &+ A \qquad\quad + B \qquad\quad + C \qquad\quad + \text{\&c.}\end{aligned}$$

Je trouve de même

$$\begin{aligned}\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2A}{dx^2}\cdot u &+ \frac{d^2B}{dx^2}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{d^2C}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2D}{dx^2}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \text{\&c.}\\ &+ \frac{2dA}{dx} \qquad + \frac{2dB}{dx} \qquad + \frac{2dC}{dx} \qquad + \text{\&c.}\\ &\qquad\quad + A \qquad\quad + B \qquad\quad + \text{\&c.}\end{aligned}$$

On

On trouvera de plus par la nature de la fonction u

$$k M = A \frac{d^2 u}{d x^2} + B \frac{d^3 u}{d x^3} + C \frac{d^4 u}{d x^4} + D \frac{d^5 u}{d x^5} + \&c.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d^2 M}{d x^2} - \frac{m d M}{x d x} - k M = 0$; & ordonnant les termes par rapport à la variable u on aura

$$\begin{aligned}
& u \left(\frac{d^2 A}{d x^2} - \frac{m d A}{x d x} \right) \\
& + \frac{d u}{d x} \left(\frac{d^2 B}{d x^2} - \frac{m d B}{x d x} + \frac{2 d A}{d x} - \frac{m A}{x} \right) \\
& + \frac{d^2 u}{d x^2} \left(\frac{d^2 C}{d x^2} - \frac{m d C}{x d x} + \frac{2 d B}{d x} - \frac{m B}{x} \right) \\
& + \frac{d^3 u}{d x^3} \left(\frac{d^2 D}{d x^2} - \frac{m d D}{x d x} + \frac{2 d C}{d x} - \frac{m C}{x} \right) \\
& + \&c. \qquad \&c. \qquad \&c. \qquad = 0;
\end{aligned}$$

d' où l' on tirera les équations particulières

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 A}{d x^2} - \frac{m d A}{x d x} = 0 \\
& \frac{d^2 B}{d x^2} - \frac{m d B}{x d x} + \frac{2 d A}{d x} - \frac{m A}{x} = 0 \\
& \frac{d^2 C}{d x^3} - \frac{m d C}{x d x} + \frac{2 d B}{d x} - \frac{m B.}{x} = 0 \\
& \qquad \&c. \qquad \&c. \qquad \&c.
\end{aligned}$$

qui sont très-aisées à résoudre; dans l'intégration de toutes ces équations, à l' exception de la prémière, on peut négliger les constantes, qui ne serviroient qu'à rendre les valeurs des quantités B, C, D &c. plus compliquées sans les rendre plus générales. Ainsi f & h étant les deux constantes de la prémière quantité A on aura

$$A = f + h x^{m+1}$$

$$B = - f x - h x^{m+2}$$

$$C = f \frac{(m-2)}{2 \cdot (m-1)} x^2 + h \frac{(m+4)}{2(m+3)} x^{m+3}$$

$D =$

$$D = -f\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3\cdot(m-1)(m-2)}x^3 - h\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3\,(m+3)(m+4)}x^{m+4}$$

$E =$ &c.

où la loi de la progreſſion eſt aſſés manifeſte.

28. Dans ces formules on voit clairement que ſi m eſt un nombre pair poſitif à commencer par 2, la ſerie des termes multipliés par f devient exacte & finie, tandis que l'autre ſerie qui eſt toute multipliée par h, va à l'infini; c'eſt tout le contraire, lorſque m eſt un nombre pair négatif à commencer de -4, car dans ce cas la ſeconde ſerie ſe termine après un nombre fini de termes, la prémière allant à l'infini; d'où il ſuit que, puiſque les quantités f & h ſont abſolument arbitraires, il n'y a qu'à faire $h = 0$ dans le prémier cas, & $f = 0$ dans le ſecond, & l'on aura algébriquement la valeur de M en x, en cherchant celle des coéficiens A, B, C &c. dont le nombre eſt alors limité.

On pourroit, au prémier aſpect, former des doutes ſur l'exactitude des formules précédentes, par la raiſon qu'elles ne paroiſſent pas ſatisfaire au cas de $m = 0$; & de $m = -2$, dans leſquels on ſait d'ailleurs que M a une valeur finie.

Pour lever cette difficulté, il ne faut que recournir à l'intégration immédiate des équations qui doivent donner les valeurs de A & de B, dans les deux cas propoſés; on trouvera pour le prémier, $A = f$, $B = 0$, $C = 0$ &c. & pour le ſecond $A = hx^{-1}$, $B = 0$, $C = 0$; c'eſt un inconvénient attaché à toutes ces ſortes de formules générales d'intégration, d'être en défaut dans certains cas, qui demandent un exament à part.

On pourroit encore être embaraſſé dans l'uſage des formules précédentes, lorſque $m = \pm 1$, ± 3, ± 5. &c. puiſque dans ces cas tous les termes de la ſerie f, ou h deviennent infinis, à l'exeption ſeulement de quelques uns

des

des prémiers. Mais il est aisé de se tirer de cet embarras, si on fait réflexion, que les constantes f & h étant absolument arbitraires, peuvent être supposées tout ce qu'on veut, ainsi il n'y a qu'à faire f ou $h = o$, ou $= o \times g$; car ce o détruisant celui du dénominateur, les termes qui étoient infinis, redeviendront finis, & se trouveront de nouveau multipliés par une constante arbitraire g; ceux au contraire qui étoient demeurés finis s'évanoüiront par cette supposition; d'où résulte la régle générale, savoir de ne conserver que les termes qui réçoivent une valeur infinie, en les dégageant cependant de l'infini qu'ils renferment.

Aïant ainsi trouvé la valeur de M il ne s'agit plus que de poursuivre le calcul de la même manière qu'on l'a fait dans le Prob. I.; on aura donc de nouveau les deux équations

$$\int z M dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\text{sin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck}\, \text{sin.}\, t\sqrt{-ck} \int Z M dx;$$

substituant la valeur de $M = A\,\text{sin.}\, x\sqrt{-k} + B\frac{d\cdot \text{sin.}\, x\sqrt{-k}}{dx}$ $+ C\frac{d^2\cdot \text{sin.}\, x\sqrt{-k}}{dx^2} +$ &c., & faisant disparoître le différences de sin. $x\sqrt{-k}$ par la méthode des intégrations par parties on obtiendra

$$\int z' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int Z' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-ck}\, dx + \frac{\text{sin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int V' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck}\,\text{sin.}\, t\sqrt{-ck} \int Z' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx,$$

où

$$z' = Az - \frac{d\cdot Bz}{dx} + \frac{d^2\cdot Cz}{dx^2} - \text{\&c.}$$

$$Z' = AZ - \frac{d\cdot BZ}{dx} + \frac{d^2\cdot CZ}{dx^2} - \text{\&c.}$$

$u' =$

$$u' = Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} - \&c.$$

$$V' = AV - \frac{d \cdot BV}{dx} + \frac{d^2 \cdot CV}{dx^2} - \&c.$$

Enfin l'on tirera les valeurs de z & de u par les mêmes procédés qu'on a ſuivi dans les Prob. I. & II.

Je ne m'arrêterai pas ici à examiner la nature des courbes *génératrices*, & la manière de les continuer, laquelle dépend de la valeur de M; il ſeroit cependant aiſé de le faire ſuivant les principes que nous avons établis; mais comme je ne donne ici cette ſolution générale, que comme une ſimple application de ma méthode, il vaut mieux de la ſimplier autant qu'il eſt poſſible, en y introduiſant les fonctions indéterminées φ & ψ comme on l'a pratiqué dans le Prob. II. On trouvera donc par ce moïen les deux équations ſuivantes

$$Az - \frac{d \cdot Bz}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} + \&c. = \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) - \psi(x - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}$$

$$Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} + \&c. = \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2} + \sqrt{c}\,\frac{\varphi'(x + t\sqrt{c}) - \varphi'(x - t\sqrt{c})}{2}$$

qu'il faudra enſuite intégrer pour avoir les valeurs de z & de u; ces intégrations, quoique toujours poſſibles, ne laiſſeroient pas que d'être ſouvent fort embaraſſantes; c'eſt pourquoi je vais réſoudre le même Problême par une autre méthode moins directe à la vérité, & moins lumineuſe que la précédente, mais telle qu'elle donnera les valeurs de z & de u en termes finis.

Autre

Autre construction de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dx^2} + mc\,\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}.$$

29. Au lieu de multiplier cette équation par $M\,dx$, en supposant M une fonction de x, & de l'intégrer ensuite, eu égard à la seule variabilité de x, je la multiplie au contraire par $M\,dt$, où M est supposée une fonction de t, & j'en prens la somme en considérant la seule t comme variable; je poursuis le calcul de la même façon qu'auparavant en faisant toujours varier t au lieu de x. Je trouve d'abord l'équation en M, $\frac{d^2 M}{dt^2} = kM$; d'où je tire $M = \text{fin. } t\sqrt{-k}$; puis en supposant $\int z\,M\,dt = s$, il me vient l'équation fondamentale

$$ks = c\,\frac{d^2 s}{dx^2} + mc\,\frac{d\cdot\frac{s}{x}}{dx}.$$

Pour intégrer cette nouvelle équation, je fais $\frac{s}{x} = y$, ce qui la réduit par la substitution à $ky = c\,\frac{d^2 y}{dx^2} + (2+m)\,c\,\frac{dy}{x\,dx}$; équation qui étant comparée à celle en M du Problême précedent donnera pour la valeur de y la suite

$$Au + B\,\frac{du}{dx} + C\,\frac{d^2 u}{dx^2} + D\,\frac{d^3 y}{dx^3} + \&c.$$

Les valeurs des A, B, C, étant les mêmes qu'auparavant, mais transformées par la substitution de $m+2$ au lieu de $-m$. A l'égard de la valeur de u elle sera ici $= \text{fin. } x\sqrt{\frac{-k}{c}}$; il faut observer, qu'elle peut-être également $\text{cos. } x\sqrt{-\frac{k}{c}}$; d'où il suit que prenant deux quantités P, Q constantes à l'égard de x, on aura généralement $u = P\ \text{fin.}$

$x\sqrt{}$

$x\surd-\frac{k}{c}+Q\,\text{cof.}\,x\surd-\frac{k}{c}$, donc fi on fait

$$s = P\left(A\,\text{fin.}\,x\surd-\frac{k}{c}+\frac{\surd-k}{\surd c}B\,\text{cof.}\,x\surd-\frac{k}{c}+\frac{k}{c}\,C\,\text{fin.}\,x\surd-\frac{k}{c}+\&c.\right)$$

$$+\,Q\left(A\,\text{cof.}\,x\surd-\frac{k}{c}-\frac{\surd-k}{\surd c}B\,\text{fin.}\,x\surd-\frac{k}{c}+\frac{k}{c}\,C\,\text{cof.}\,x\surd-\frac{k}{c}-\&c.\right)$$

on aura

$$A = fx + hx^{-m}$$
$$B = -fx^2 - hx^{1-m}$$
$$C = f\frac{(m+4)}{2\cdot(m+3)}x^3 + h\frac{m-2}{2(m-1)}x^{2-m}$$
$$D = -f\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3(m+)(m+4)}x^4 - h\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}x^{3-m}$$
$$E = \&c.$$

où l'on voit que les coéficiens des termes de la férie f font les mêmes que ceux de la férie h dans les formules du Prob. préc., & réciproquement; donc il fuffira d'appliquer aux formules préfentes les mêmes remarques qu'on a déja fait fur les différents cas de m pofitif ou négatif.

Soit divifée toute l'équation par A, il eft évident que, puifque l'on ne doit prendre à la fois qne l'une des deux feries, felon que m eft pofitif ou négatif, les fractions $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ &c. feront toujours $= 0$, lorfque $x = 0$; foit de plus, lorfque $x = 0$, Z la valeur de $\frac{z}{A}$, & V la valeur de $\frac{d\cdot\frac{z}{A}}{dx}$, valeurs qui pourront très-bien être l'une & l'autre des fonctions de t; on aura, en faifant d'abord $x = 0$ dans l'équation ainfi préparée, $\int Z\,M\,dt = Q$; enfuite

suite différentiant la même équation, & y faisant de nouveau $x = 0$ il viendra $\int VMdt = P \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} (1 + \mu)$; μ est une constante qui désigne la valeur de $\frac{d \cdot \frac{B}{A}}{dx}$; posant pour abréger V au lieu de $\frac{V}{1 + \mu}$, on substituera $\int Z\, Mdt$ au lieu de Q, & $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-k}} \int VMdt$ au lieu de P. Maintenant, pour chasser la lettre k de l'équation, on se servira de la méthode des intégrations par parties, qui a déja été tant de fois mise en usage; car, puisque $M = \text{sin.}\, t\sqrt{-k}$, on peut au lieu de $\int Z\, Mdt$ substituer indifféremment $\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \frac{dZ}{dt} \text{cos.}\, t\sqrt{-k}\, dt$, ou $-\frac{1}{k} \int \frac{d^2Z}{dt^2} \text{sin.}\, t\sqrt{-k}\, dt$; en négligeant les termes algébriques qui doivent être supposés d'eux mêmes $= 0$; il en est de même de l'expression $\int VMdt$. Ces opérations achevées, on mettra sous les signes d'intégration les *sinus* & *cosinus* de $x\sqrt{-\frac{k}{c}}$; & on développera à l'ordinaire les produits de ces *sinus* & *cosinus* par les *sinus* & *cosinus* correspondens de $t\sqrt{-k}$, on obtiendra ainsi l'équation

$$\int z\, \text{sin.}\, t\sqrt{-k}\, dt$$
$$= \frac{1}{2} \int (AZ + \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2Z}{dt^2} \text{ \&c.})\, \text{sin.}\, (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt$$
$$+ \frac{1}{2} \int (AZ - \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2Z}{dt^2} \text{ \&c.})\, \text{sin.}\, (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A\int V dt + \frac{B}{\sqrt{c}} V + \frac{C}{c} \frac{dV}{dt} \text{ \&c.})\, \text{sin.}\, (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A\int V dt - \frac{B}{\sqrt{c}} V + \frac{C}{c} \frac{dV}{dt} \text{ \&c.})\, \text{sin.}\, (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt.$$

Or suivant les principes de notre méthode, on égalera

le t du prémier membre aux quantités $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$, & $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ du ſecond; d'où l'on aura $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les termes multipliés par ſin. $(t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ & $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les autres termes qui ſe trouvent multipliés par ſin. $(t + \frac{x}{\sqrt{c}})$; or Z & V étant des fonctions de t, on peut les exprimer généralement par Δt, & Γt; ou ſi pour abréger davantage, on poſe $Z + \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Delta t$ & $Z - \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Gamma t$, on tirera de l'équation précédente

$$z = A \frac{\Delta(t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma(t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2}$$
$$+ \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{\Delta'(t + \frac{x}{\sqrt{c}}) - \Gamma'(t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2}$$
$$+ \frac{C}{c} \frac{\Delta''(t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma''(t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2}$$
$$+ \&c.$$

Si l'on aimoit mieux que l'expreſſion de Z fut compoſée de fonctions de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$, il n'y auroit qu'à faire quelques légères transformations à l'équation finale qui donne immédiatement la valeur de z; mais ſans avoir recours à cet expédient qui eſt ſans doute le plus direct, il ſuffit de remarquer, que l'équation différentielle de z ne contenant que le dt^2, il faut que l'expreſſion de z ſoit telle qu'elle demeure la même en changeant t en $-t$. Soit donc mis dans la formule précédente $-t$ au lieu de t; $\Delta(t + \frac{x}{\sqrt{c}})$, & $\Gamma(t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ deviendront

$\Delta\,(-t+\frac{x}{\sqrt{c}}) = \Delta\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$, & $\Gamma\,(-t-\frac{x}{\sqrt{c}})$ $=\Gamma\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})$. Changeant les valeurs des fonctions Δ & Γ on pourra mettre ſimplement $\Delta\,(x-t\sqrt{c})$ au lieu de $\Delta\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$, & $\Gamma\cdot(x+t\sqrt{c})$ au lieu de $\Gamma\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$; mais il faudra mettre puis $\sqrt{c}\;\Delta'(x-t\sqrt{c})$, $c\,\Delta''\,(x-t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Delta'\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$, $\Delta''\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$ &c, & $-\sqrt{c}$ $\Gamma'\,(x+t\sqrt{c})$, $c\,\Gamma''\,(x+t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Gamma'\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}$ $(x+t\sqrt{c})$, $\Gamma''\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x+t\sqrt{c})$, &c. comme il eſt aiſé de s' en aſſurer avec un peu de réflexion; on aura de cette manière

$$\begin{aligned} z = {} & A\,\frac{\Gamma\,(x+t\sqrt{c}) + \Delta\,(x-t\sqrt{c})}{2} \\ & + B\,\frac{\Gamma'\,(x+t\sqrt{c}) + \Delta'\,(x-t\sqrt{c})}{2} \\ & + C\,\frac{\Gamma''\,(x+t\sqrt{c}) + \Delta''\,(x-t\sqrt{c})}{2} \\ & + \&c. \qquad \&c. \end{aligned}$$

En rapprochant cette formule de celle qu'on a trouvé dans *l'Art. préc.* il ſera facile de déterminer le rapport des fonctions $\Gamma\,(x+t\sqrt{c})$, & $\Delta\,(x-t\sqrt{c})$ aux fonctions $\varphi\,(x+t\sqrt{c}) + \frac{1}{\sqrt{c}}\,\psi\,(x+t\sqrt{c})$, & $\varphi\,(x-t\sqrt{c})$ $-\frac{1}{\sqrt{c}}\,\psi\,(x-t\sqrt{c})$.

La méthode de cet Article conduit, comme on le voit, à des résultats beaucoup plus simples, que la prémière; mais elle est aussi moins générale, & ne peut, à la rigueur être emploïée que dans l' hipothèse, que toutes les valeurs de z qui répondent à différentes abscisses x dans un même instant soient liées entr' elles par la loi de continuité. Ce n' est que d'après la prémière solution qu'il sera permis de prendre pour Γ & Δ des fonctions quelconques, soit régulières ou non.

Des oscillations d' un fluide élastique renfermé dans un tuïau de figure conoidale quelconque.

30. Soit imaginé tout le fluide partagé en une infinité de tranches perpendiculaires à l'axe, dont la largeur variable soit exprimée par X, qui désigne une fonction de la partie correspondante x de l'axe; il est clair que, si on suppose, que les tranches conservent toujours leur parallélisme, & que z soit l' espace infiniment petit parcouru par une tranche quelconque Xdx dans le tems t, cette quantité Xdx deviendra $(X + \frac{dX}{dx} z)(dx + dz)$ $= Xdx + \frac{dX}{dx} z\,dx + X\,dz$, en supprimant les infinimens petits du second ordre; donc, si c désigne l' élasticité du fluide dans son état naturel; l'élasticité du fluide contenu dans la tranche Xdx sera après le tems t

$$c \cdot \frac{Xdx}{Xdx + \frac{dX}{dx} z dx + Xdz} = c\,(1 - \frac{dz}{dx} - \frac{dX}{Xdx} z)$$

en négligeant ce qui se doit négliger. La différence de cette expression prise négativement donne l'excès de l'élasticité d'une tranche quelconque sur celle qui la suit immédiatement, donc si on

on multiplie cet excès par la largeur $X + \frac{dX}{dx} z$ de la tranche, & qu'on divise ensuite par la masse $X dx$, on aura la force accélératrice qui tend à faire parcourir l'espace z; donc l'équation du mouvement du fluide sera $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 z}{d} + d \cdot \frac{dX}{X dx} z \right) \left(\frac{X + \frac{dX}{dx} z}{X dx} \right)$ qui se réduit par la supposition de z infiniment petit à

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d \cdot \frac{dX}{X dx} z}{dx} \right).$$

Telle est l'équation générale; mais jusqu'a présent je ne connois encore que quelques cas où elle soit constructible; ce sont ceux qui peuvent être compris dans la solution du Prob. III.; c'est-à-dire où l'on a $\frac{dX}{X dx} = \frac{m}{x}$; ou bien $X = h x^m$; ce qui donne une conoide formé par la révolution d'une parabole, ou d'une hiperbole quelconque. On aura donc dans cette hipothèse $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + m \frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx} \right)$, équation intégrable exactement toutes les fois que m sera un nombre pair positif, ou négatif (*Art.* 28.); dans tous les autres cas la valeur de z sera exprimée par une suite infinie.

Soit $m = 2$, on aura le cas du Prob. II., & la formule de *l'Art.* 28. donnera

$$z + \frac{d \cdot x z}{dx} = \frac{\varphi (x + t \sqrt{c}) + \varphi (x - t \sqrt{c})}{2} + \frac{\psi (x + t \sqrt{c}) - \psi (x - t \sqrt{c})}{2 \sqrt{c}},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans *l'Art.* 20.; de plus la formule de *l'Art.* 29. donne

$$z = \frac{\Gamma (x + t \sqrt{c}) + \Delta (x - t \sqrt{c})}{x^2}$$

$$-\frac{\Gamma'(x+t\sqrt{c})+\Delta'(x-t\sqrt{c})}{x}$$

ce qui s'accorde encore avec *l'Art.* 21.

Si on fait $m = 1$ le conoide ſera formé par la révolution d'une parabole Apollonienne autour de ſon axe, & la valeur de z ne pourra être donnée que par des ſeries.

Scolie.

31. Si le tuïau avoit une figure plane, l'équation précédente auroit encore lieu ; & le cas de $m = 1$, appartiendroit à un tuïau triangulaire ; ainſi l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right)$ pourroit ſervir à trouver les loix de la propagation du Son dans un plan ; & c'eſt dans cette vue que M. Euler me fit l'honneur de me la propoſer dans la même lettre, dont j'ai fait mention (*Art.* 16.). En faiſant uſage de ma nouvelle méthode, je reconnus bientôt que cette équation n'étoit pas intégrable exactement, mais qu'on pouvoit la rendre telle en donnant au terme $\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}$ le coéficient 2. Voila ce qui m'a conduit à l'hipothèſe des ondulations ſphériques que nous avons examiné au long dans le *Chap. précéd.*; hipothèſe qui eſt d'allieurs beaucoup plus conforme à la nature, que celle des ondulations ſimplement circulaires. Je fis part à M. Euler des changemens que j'avois fait à ſon hipothèſe, & des réſultats qui m'en étoient venus, dans une lettre de la fin de Décembre 1759.; mais j'ai vu depuis avec beaucoup de plaiſir que ce ſavant Auteur en avoit déja fait de méme, & étoit parvenu aux mêmes concluſions, que moi, ſur les loix de la propagation des ébranlemens de l'air dans une ſphère. (*Voïés ſon Mémoire imprimé à la tête de ces Recherches*).

32. Suppo-

32. Supposons maintenant le tuïau d'une longeur donnée a, & bouché à ses deux extrémités; il faudra que la nature des fonctions Γ & Δ (*Art.* 29.) soit telle que z s' évanoüisse aux points, où $x = o$, & $x = a$ quel que soit d' ailleurs le tems t. Par un raisonnement semblable à celui de *l' Art.* 23., on trouvera pour la prémière de ces conditions $\Gamma\, t\sqrt{c} + \Delta - t\sqrt{c} = o$; ce qui apprend comment la fonction Δ doit être continuée du coté des abscisses négatives; pour satisfaire ensuite à l'autre condition, faisons $\Gamma\,(a + t\sqrt{c}) = T$, $\Delta\,(a - t\sqrt{c}) = \theta$; & soient α, β, γ &c. les valeurs des quantités $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, lorsque $x = a$; on aura $o = \alpha\,(T + \theta) + \beta\,(\frac{dT - d\theta}{dt\sqrt{c}}) + \gamma\,(\frac{d^2T + d^2\theta}{dt^2 c}) +$ &c. $= o$; soit maintenant $T = -\theta + y$, on aura $\alpha y + \beta\frac{dy}{dt\sqrt{c}} + \gamma\frac{d^2y}{dt^2c} +$ &c. $= 2\beta\frac{d\theta}{dt\sqrt{c}} +$ &c. L' intégration de cette équation sera toujours possible. Soient a', a'', a''' &c. les racines de l' équation

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{\&c.} = o$$

la valeur de y sera de la forme suivante

$$\begin{aligned} y = {} & F e^{a' t\sqrt{c}} \textstyle\int - a'\beta e^{-a' t\sqrt{c}} d\theta - \text{\&c.} \\ & + G e^{a'' t\sqrt{c}} \textstyle\int - a''\beta e^{-a'' t\sqrt{c}} d\theta - \text{\&c.} \\ & + H e^{a''' t\sqrt{c}} \textstyle\int - a''\beta e^{-a''' t\sqrt{c}} d\theta - \text{\&c.} \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

F, G, H désignant des constantes à déterminer par la substitution, & la comparaison des termes.

Si la quantité y étoit $= o$, il est évident que les courbes géuératrices, qui représentent les fonctions Γ & Δ ne seroient qu'un assemblage de branches toutes égales, & semblables à celles qui répondent à la portion

a de l'axe; ainsi il ne seroit pas difficile de comprendre que le sistème des particules reprendroit toujours sa prémière position après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{\sqrt{c}}$; or, pour que ce cas puisse avoir lieu, il suffira que le coéficient β, & tous ceux qui multiplient les différences impaires de y soient nuls; c'est-à-dire que la valeur de z soient telle, qu'elle ne renferme que des différences paires des fonctions Γ & Δ, ou au moins que leurs coéficiens s'évanoüissent en posant $x = a$. Ces conditions ne pouvant avoir lieu dans notre cas, on en doit conclure que les oscillations des particules de l'air contenu dans les tüiaux donnés changeront continuellement, & ne reviendront jamais les mêmes, si ce n'est par une espèce de hazard dépendant de la nature des prémiers ébranlemens. Je dis par une espèce de hazard, puisque je suppose que ces ébranlemens soient quelconques; car, on pourroit d'ailleurs les supposer tels que le sistème fût toujours soumis aux lois de l'isochronisme; c'est ce qui est connu de tous les Géomètres; mais nous aurons dans la suite occasion d'examiner cette matière plus à fond qu'on ne l'a encor fait.

Des vibrations des cordes inégalement épaisses.

33. Il est facile de voir que l'équation pour le mouvement des cordes tendues, qui sont d'une épaisseur variable sera de la même forme que celle, qu'on a donné (*Art. XII. Rech. préc.*), avec cette seule différence que la quantité c devra être regardé non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x. Conservant donc les mêmes noms, & supposant X une fonction donné de x, on aura $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = X\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ Soit dans un cas particulier, $X = hx^m$, je fais x

$= s$

$= s^{\frac{2}{2-n}}$, & $y = \frac{z}{s}$; & prenant ds pour conſtante je trouve après les ſubſtitutions, & les réductions convenables $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \frac{(2-n)^2 h}{4}\left[\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right) - \frac{n-4}{n-2}\left(\frac{d\cdot\frac{z}{s}}{ds}\right)\right]$, équation qui eſt dans le cas du Prob. III. Donc ſi on ſuppoſe $m = -\frac{n-4}{n-2}$, $c = \frac{(2-n)^2 h}{4}$, & qu'on ſubſtitue s au lieu de x dans les formules de *l'Art.* 28. ou 29., on aura la valeur de z, laquelle étant enſuite multipliée par s donnera celle de y en s & en t; où il n'y aura plus qu'à remettre, au lieu de s, ſa valeur en x tirée de l'équation de ſuppoſition $x = s^{\frac{2}{2-n}}$.

Delà il eſt évident que y aura une valeur finie & exacte toutes les fois que $\frac{n-4}{n-2}$ ſera un nombre pair poſitif, ou négatif; c'eſt ce qui arrivera lorſque $n = \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$, μ étant pris pour exprimer un nombre quelconque entier; dans tous les autres cas la ſerie ira à l'infini. Au reſte ſoit qu'on trouve pour y une valeur exacte, ou non, les vibrations de la corde ne feront jamais iſochrones, excepté dans le ſeul cas de $n = 0$, qui eſt celui d'une épaiſſeur uniforme; car il eſt viſible, que la corde étant ſuppoſée fixe à ſes deux bouts, on aura les mêmes conditions à remplir que dans *l'Art.* 32. ci-deſſus; donc les conſéquences en feront auſſi les mêmes.

Le défaut d'iſochroniſme dans les cordes inégalement épaiſſes les rend incapables de produire un ſon fixe, & appréciable à l'oreille; auſſi les Artiſtes les rejettent-ils toujours, & les nomment comunement cordes *fauſſes*, par la raiſon qu'elles ne peuvent jamais s'accorder parfaitement avec les autres. Cette obſervation peut ſervir, ce me ſem-

 ble,

ble, à démontrer l' insuffisance de la Théorie de M. Tailor sur les vibrations des cordes; car il est visible, que quelque inégale, que puisse être une corde sonore, elle devroit cependant faire toujours des vibrations de même durée, si la figure qu'elle prend d' elle même ne pouvoit être autre que celle qui convient à l' isochronisme, tel que cet Auteur le suppose.

Au reste on pourra toujours résoudre l' équation générale $(\frac{d^2y}{dt^2}) = X(\frac{d^2y}{dx^2})$ directement par ma méthode; toute la difficulté se réduisant à l'intégration de l'équation en M, $kM = X\frac{d^2M}{dx^2}$. Les cas les plus connus, de l' intégrabilité de cette équation, sont ceux de $X = hx^n$ (n étant $= \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$) que nous avons examiné ci-dessus; il peut y en avoir d' autres; mais il seroit trop long de les examiner ici.

Des oscillations d' une chaine pésante.

34. CE Problême étant célèbre parmi les Géomètres, je crois pouvoir me dispenser de donner l'Analise, par laquelle on trouve que la force accélératrice de chaque point de la chaine est comme la somme des angles de contingence depuis le sommet, moins l' angle de contingence multiplié par le rapport du poid total de la portion inférieure de la chaine au petit poids dont ce point est chargé. Soit donc x la longueur d' une partie quelconque de la chaine à commencer par le bout inférieur, Xdx la pesanteur, où la masse de la portion infiniment dx, & y l' espace parcouru horizontalement dans le tems t, on aura l' équation

$(\frac{d^2y}{dt^2})$

$$-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\int X dx}{X} \times \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Or ſoit $X = f x^n$, on aura $\frac{\int X dx}{X} = \frac{x}{n+1}$, & faiſant $x = \frac{s^2}{h}$, $y = \frac{z}{s}$ il viendra

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \frac{h}{4(1+n)} \left[\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right) + \frac{\quad}{2n-1} \times \left(\frac{d \cdot \frac{z}{s}}{ds}\right) \right].$$

Equation réduite à notre formule générale, & qui aura une ſolution exacte toutes les fois que $2n-1$ ſera un nombre pair quelconque, c'eſt-à-dire, que $n = \frac{2\mu + 1}{2}$. Dans le cas où la chaine eſt d'une péſanteur uniforme, on a $n = 0$; ainſi m ſera $= -1$ dans les formules des *Art.* 27. & l'on trouvera que les deux ſeries, dont l'une eſt toute multipliée par f, & l'autre par h, reviendront préciſément à la même.

Soit l la longueur de la chaine, on aura dans le point de ſuſpenſion $y = \frac{z}{\sqrt{hl}}$; donc, ce point étant ſuppoſé fixe, il faudra que z y ſoit $= 0$; d'où l'on retrouvera les mêmes conditions entre les fonctions $\Gamma\,(a + t\sqrt{c})$, & $\Delta\,(a - t\sqrt{c})$ que dans *l'Art.* 32. Maintenant, puiſque la chaine eſt libre dans tous ſes autres points, il eſt viſible que ce feroit mal à propos, qu'on ſuppoſeroit $y = 0$, lorſque $x = 0$; mais il faudra remplacer cette condition par celle-ci $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; car il eſt naturel de penſer, que la courbure de la chaine doive s'évanoüir à ſon extrémité inférieure, par la raiſon qu'il n'y a ici aucun appui à l'action des parties ſupérieures. Or $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2}{s^5}\left(s^2 \frac{d^2 z}{ds^2} - 3s\frac{dz}{ds} + 3z\right)$; donc lorſque s eſt zero, ou ſimplement

infiniment petit, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ſe réduit à $\frac{3z}{s^2}$, & par conſéquent on aura de même ici $z = 0$, lorſque $s = 0$, & $\Gamma t\sqrt{c} + \Delta - t\sqrt{c} = 0$, comme dans *l'Art. cité*. Au reſte ce Problême, étant abſolument analogue aux précédens, eſt ſuſceptible de remarques ſemblables. Je me contenterai ſimplement de faire obſerver, que ſi on vouloit le réſoudre directement par notre méthode générale, on parviendroit après les opérations ordinaires à cette équation en M, $kM = \frac{d \cdot \frac{M\int X dx}{X}}{dx} - \frac{dM}{dx}$, qui eſt conſtructible par les méthodes connues dans le cas, où $X = hx^{\frac{2\mu+1}{2}}$; il faudroit enſuite déterminer la quantité k, avec les autres conſtantes de M, par la condition que $\frac{M\int X dx}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{d \cdot \frac{M\int X dx}{X}}{dx} \times y + My$, ou bien $\frac{M\int X dx}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dM}{dx} \times \frac{\int X dx}{X} \times y + M\int X dx \times \frac{dX}{X^2 dx} \times y$ ſoit $= 0$, lorſque $x = a$, & $x = 0$. Or dans le premier cas y étant lui même $= 0$, il ſuffira que M le ſoit auſſi; dans le ſecond il eſt clair que toute la quantité s'évanoüira d'elle même à cauſe du facteur $\int X dx$ qui multiplie tous ſes termes; cependant on ſuppoſera toujours $M = 0$, afin de terminer la ſuite des points mobiles au bout inférieur de la chaine.

SCOLIE I.

35. Par les formules données dans ce Chapître, on peut réſoudre le Problême de *l'Art.* 61. de l'excellent Traité de la réſiſtence des fluides de M. D'Alembert, d'une manière, peut être plus analitique que ne l'a fait cet Auteur. Voici en quoi conſiſte ee Problême; il s'agit de trouver deux quan-

tités A, & B, telles que $A\,dx + B\,dz$, & $zB\,dx - zA\,dz$ ſoient l'une & l'autre des différentielles exactes. Pour rendre la queſtion plus générale, je me propoſe de rendre exactes les deux différentielles $\alpha\,dt + \beta\,dx$, $x^m\beta\,dt + b\,x^n\alpha\,dx$; ſoit la première $= dp$, & la ſeconde $= dq$; on aura $\alpha = \frac{dp}{dt}$, $\beta = \frac{dp}{dx}$, $x\ \beta = \frac{dq}{dt}$, $b\,x^n\alpha = \frac{dq}{dx}$; donc $x^m\ \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt}$, $b\,x^n\ \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$. Je différentie ces équations en faiſant varier x ſeul dans la première, & t ſeul dans la ſeconde; & je compare enſuite les deux valeurs de $\frac{d^2q}{dx\,dt}$; j'ai $\frac{d\cdot x^m\,(\frac{dp}{dx})}{dx} = b\,x^n\ (\frac{d^2p}{dt^2})$; ſavoir $b\,x^{n-m}$ $(\frac{d^2p}{dt^2}) = (\frac{d^2p}{dx^2}) + \frac{m}{x}\,(\frac{dp}{dx})$. Equation qui eſt, comme on le voit ſuſceptible de notre méthode; en ſuivant cette méthode, on trouvera d'abord l'équation en M

$$k\,M\,x^{n-m} = \frac{d^2M}{dx^2} - m\ \frac{d\cdot\frac{M}{x}}{dx}$$

qu'il faut intégrer avant d'aller plus avant. Pour cela je fais $x = s^u$; $M = N\,s^v$; & ſuppoſant $u = \frac{2}{n-m+2}$ & $v^2 - (u + m\,u)\,v + m\,u^2 = 0$, je trouve après les ſubſtitutions & les réductions $k\,N\,u^2 = \frac{d^2N}{ds^2} + (2\,v - u - m\,u + 1)$ $\frac{dN}{s\,ds}$, équation qui ſe rapporte à celle de *l'Art.* 27. On voit donc par là, que l'équation en M ſera conſtructible exactement par nos formules, toutes les fois que $2\,v - u - m\,u + 1$ ſera un nombre pair quelconque; le reſte du calcul n'aïant plus de difficulté, on trouvera pour la valeur de p une expreſſion exacte & finie, compoſée de fonctions très-générales de x & de t. Si $n = m$, alors on a $u = 1$, & l'équation qui donne la valeur de v, devient $v^2 - (1 + m)\,v$

$+ m$

$+ m = 0$; d'où l'on tire $v = 1$, ou $= m$; dans le premier cas, le coéficient $2v - m - mu + 1$ devient $= 1 - 2m$; & dans le second, $= 1$; or dans le Problême de M. D'Alembert on a $m = 1$, d'où l'on voit que ce Problême n'admet point de solution exacte au moins suivant ma méthode; cependant si l'on veut se contenter d'une solution seulement approchée, on pourra y parvenir immédiatement par les formules du Prob. III. Car si dans l'équation $bx^{n-m} \left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ on fait $x = s^u$, & $p = qs^v$; & qu'on suppose les valeurs u & v déterminés par ces équations $u = \frac{2}{n - m + 2}$, & $v^2 + (2 - u + mu)v + mu - u + 1 = 0$ il vient

$$bu^2 \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2q}{ds^2}\right) + (2v - u + 1 + mu)\left(\frac{d \cdot \frac{q}{s}}{ds}\right)$$

Equation qui a la même forme, que celle du Prob. cit é, & qui par conséquent est susceptible des mêmes solutions. Lorsque $m = n$, on a $u = 1$, & $v = -1$, ou $-m$; la première racine rend le coéficient de $d \cdot \frac{q}{s}$, $= m - 2$, & la seconde le rend $= -m$; ce qui conduit aux mêmes conclusions que plus haut. Au reste il est visible que le Problême présent renferme dans sa généralité tout ceux, dont nous avons traité dans ce Chapître.

SCOLIE II.

36. L'équation $kM = \frac{d^2M}{dx^2} - m\frac{dM}{xdx}$ étant transformée par la substitution de $fs^{\frac{-1}{m+1}}$ au lieu de x devient $\frac{f^2k}{(1+m)^2}$

Ms

$M s^{\frac{-2m}{1+m}} = \frac{d^2 M}{d s^2}$, & faisant ensuite $M = e^{\int y\, ds}$, $dy + y^2 ds = \frac{f^2 k}{(1+m)}; s^{\frac{-2m}{1+m}}$; qui est l'équation même de Ricati. Les formules trouvées dans la solution du Prob. III. donnent, comme on le voit, une construction générale de cette équation; mais il faut remarquer, que ces formules ne sont encore que des cas particuliers des intégrales completes, qui résultent de la supposition de quelques constantes $= 0$; pour les completer on joindra à la valeur déja trouvée de y, la quantité $\frac{e^{-2\int y\, ds}}{\int e^{-2\int y\, ds}\, ds}$; ce qui est facile à démontrer.

CHAPITRE V.

Continuation des Recherches sur la propagation du Son.

§. I.

De la propagation du Son, en supposant que les ébranlemens des particules de l'air ne soient pas infiniment petits.

37. Quelque naturelles, que paroissent les hipothèses que nous avons examiné dans le Chap. III.; elles donnent cependant la vitesse du Son moindre que la véritable, d'environ 163. pieds par seconde; comme on le peut conclure des *Art.* 12. & 26. cidessus. Cette différence est sans doute assès considérable, pour ne pas être attribuée aux erreurs des expériences, qui servent d'élémens à notre Théorie, comme j'étois porté à le penser quand je donnai mes premières Recherches sur le

le Son (*Voïés Art. LVII.*). Mais quelle pourroit donc en être la cause ? M. Euler a crû la trouver dans la supposition des ébranlemens infiniment petits, sur laquelle on a jusqu'ici fondé les calculs de la propagation du Son (*Voïés son Mémoire, pag.* 10. *ci-dessus*). Cette conjecture est plausible, mais je doute, qu'en l'examinant à fond on la trouve aussi satisfaisante, qu'elle le paroit d'abord. Pour en apprécier la valeur, voici la méthode que j'ai imaginé.

Problêmes préliminaires.

PROBLEME IV.

Construire l'équation $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y$, y *étant une fonction quelconque de* x *&* *de* t.

38. Je la multiplie par Mdx, je l'intègre, & j'opère à l'égard des termes $\int\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) Mdx$, & $c\int\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) Mdx$, comme dans le Prob. I.; je parviens ainsi à cette équation en s, $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks + \int Mydx$ par les mêmes procédés je trouve l'intégrale $s + \mu v = Ae^{t:\mu} + \mu e^{t:\mu} \int e^{-t:\mu} dt \int Mydx$, d'où résultent les deux équations

$$\int z Mdx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck}\int ZMdx + \frac{\text{sin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}\int VMdx$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{-t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

$$\int uMdx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck}\int VMdx - \sqrt{-ck}\,\text{sin.}\, t\sqrt{-ck}\int ZMdx$$
$$+ \frac{1}{2} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx$$
$$+ \frac{1}{2} e^{-t\sqrt{ck}} \int e^{t\sqrt{ck}} dt \int Mydx \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

Or

Or, puifque $M = \text{fin.}\, x\sqrt{-k}$, il faut, pour pouvoir chaffer la quantité k des équations précédentes, réduire tous leurs termes en forte, que cette quantité k ne fe rencontre que dans des fonctions de la forme de fin. $(x)\sqrt{-k}$, (x) marquant une fonction quelconque de x & t. Les termes qui renferment $\int ZMdx$ étant les mêmes ici que dans le Prob. I., ils fe rameneront à cette forme par les réductions enfeignées; ainfi toute la difficulté fe réduira aux termes affectés de deux fignes d'intégration, & provenant de la quantité y.

Prenons d'abord le terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\, dt \int Mydx$; & commençons par faire difparoître la quantité k du coéficient $\frac{1}{2\sqrt{ck}}$. Pour cela foit changée l'intégrale $\int Mydx = \int \text{fin.}\, x\sqrt{-k}\, ydx$ en fon équivalente fin. $x\sqrt{-k}\int ydx - \sqrt{-k}\int \text{cof.}\, x\sqrt{-k}\, dx \int ydx$; ce qui donnera par la fubftitution, & en effaçant le terme fin. $x\sqrt{-k}\int y.dx$, à caufe de fin. $x\sqrt{-k} = 0$ au premier & au dernier point de l'intégrale $\int Mydx$, la transformée $\frac{1}{2\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\, dt \int \text{cof.}\, x\sqrt{-k}\, dx \int ydx$. Pofons pour abréger $\int ydx = Y$, & mettons aux lieu de cof. $x\sqrt{-k}$ fa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}}}{2}$; tranfportant le figne d'intégration qui regarde l'x au devant de celui qui regarde le t, (ce qui eft permis à caufe que la quantité $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui eft entre les deux fignes, eft une quantité conftante à l'égard de x) on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}$ $e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Ydt + \frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int dx$ $\int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Ydt$. Soit fait $x - t\sqrt{c} = p$, $x + t\sqrt{c} = q$, & foit nommée P, la fonction de t & de p qui vient de

 la

la substitution de $p + t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la quantité Y; & Q la fonction de t & de q, qui vient de la substitution de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la même quantité Y; en prenant au lieu des variables t & x, les nouvelles variables t & p, & t & q, on changera les deux expressions intégrales $\int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, $\int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, en celles-ci $\int dp \int e^{p\sqrt{k}} P dt$, $\int dq \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$, qui ont les mêmes valeurs, quoique sous des formes différentes. Dans ces dernières expressions, les intégrations $\int e^{p\sqrt{k}} P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$ devront se faire en variant seulement t; donc, si on suppose que les intégrales $\int P dt$, & $\int Q dt$ soient prises avec cette condition, on aura $e^{p\sqrt{k}} \int P dt$, $e^{-q\sqrt{k}} \int Q dt$; ce qui donnera les transformées $\int e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, dans lesquelles il faudra faire maintenant p & q variables, & t constante; or, à cause que les quantités $\int P dt$, & $\int Q dt$ ne contiennent point de x, il est visible qu'il reviendra au même d' intégrer $e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, & $e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, en supposant p & q seules variables, & de remettre après l' intégration au lieu de p & q leurs valeurs $x - t\sqrt{c}$, & $x + t\sqrt{c}$, que de restituer d' abord ces valeurs à la place de p & de q, & d'intégrer ensuite en faisant varier x; d' où il s' ensuit qu'on aura $\int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dp \int e^{p\sqrt{k}} P dt = \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt$, & $\int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dq \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt = \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$. Par conséquent la transformée cherchée du terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}}$ $\int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int My dx$ deviendra après toutes les substitutions $\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt +$ $\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$, laquelle, en mettant hors des signes d' intégration la quantité exponentielle $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui est constante à l' égard de x, se réduit

duit plus ſimplément à $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}$ $(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int Pdt +$ $\int e^{-x\sqrt{k}}dx\int Qdt)$.

Par des opérations, & des réductions ſemblables on changera encore l'autre terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}dt\int My\,dx$ en $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}$ $(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int Qdt + \int e^{-x\sqrt{k}}dx\int Pdt)$; donc en retranchant la transformée du ſecond terme de celle du premier, on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}\int(e^{x\sqrt{k}}-e^{-x\sqrt{k}})$ $(\int Pdt-\int Qdt)\,dx = \int\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\int Qdt-\int Pdt)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$. Subſtituant cette expreſſion dans l'équation (A) ci-deſſus, & égalant entr'eux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$, ſuivant les règles de notre méthode, on trouvera pour la valeur de z les formules qu'on a déja trouvé dans le Prob. I., jointes avec la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\int Qdt - \int Pdt)$.

Après avoir ainſi trouvé la valeur de z il ne ſera pas difficile de déduire celle de u de l'équation (B). Pour cela, comme dans cette équation les termes qui renferment y, ſont exempts du coéficient $\frac{1}{\sqrt{ck}}$, on y mettra d'abord, & ſans aucune préparation, à place de M ſa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}}-e^{-x\sqrt{k}}}{2\sqrt{-1}}$; enſuite faiſant des obſervations & des réductions analogues à celles que nous avons faites plus haut, on trouvera que, ſi P' & Q' ſont pris pour exprimer les valeurs de y après les ſubſtitutions de $p + t\sqrt{c}$ & de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x, les termes dont il s'agit deviendront $\frac{1}{2}\int(\int P'dt + \int Q'dt)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$; par conſéquent l'expreſſion de u renfermera outre les formules

trouvées à la fin de *l'Art.* 6., encore celle-ci $\frac{\int P' dt + \int Q' dt}{2}$.

COROLLAIRE.

38. Donc le terme y ajouté à l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dx^2}$ produit dans les valeurs de z & de u une augmentation qu'on determinera ainsi. Soit intégré $y\,dx$, en ne faisant varier que x; & l'intégrale trouvée $\int y\,dx$ étant multiplié par dt soit intégrée de nouveau en supposant d'abord $x + t\sqrt{c}$ constant, & t seul variable; puis en supposant $x - t\sqrt{c}$ constant, & t seul variable; retranchant cette seconde intégrale de la première, & divisant la différence par $2\sqrt{c}$, on aura ce qu'il faut ajouter à la valeur de z. Ensuite soit intégré simplement $y\,dt$ d'abord en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme constante, & t comme variable, puis en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme constante, & t de même comme variable; la somme de ces deux intégrales divisée par 2 sera l'augmentation de la valeur de u.

SCOLIE I.

39. Dans l'excellent Traité de la cause des vents de M. D'Alembert on trouve à *l'Art.* 87. une méthode fort simple, & fort ingénieuse pour rendre completes ces deux différentielles $\alpha\,ds + \beta\,du$, & $\rho\,\alpha\,du + \nu\beta\,ds + du\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s$. Le Problême se réduit à celui que nous venons de résoudre; car en supposant la premiere de ces différentielles $= dp$, on trouve $\alpha = \frac{dp}{ds}$ & $\beta = \frac{dp}{du}$; mais pour que la seconde différentielle soit exacte, il faut que

$$\frac{d\cdot(\rho\alpha + \Delta u, s)}{ds} = \frac{d\cdot(\nu\beta + \Gamma u, s)}{du}$$

ce qui donne en substituant & différentiant

$\rho\, d^2 p$

$$\rho \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{d \cdot \Delta u, s}{ds} = \nu \frac{d^2 p}{du^2} + \frac{d \cdot \Gamma u, s}{du},$$

Equation qui reviendra au même, que celle du Problême précédent, ſi on poſe z au lieu de p, t au lieu de s, x au lieu de u, c au lieu de $\frac{\nu}{\rho}$, & y au lieu de $\frac{d \cdot \Gamma u, s}{\rho du} - \frac{d \cdot \Delta u, s}{\rho ds}$.

Si d'un coté la ſolution de M. D'Alembert eſt plus ſimple que la notre, de l'autre elle paroit inſuffiſante pour les cas, où les valeurs de p feroient priſes à volonté lorſque $s = 0$; & c'eſt préciſément dans ces cas que rentre la queſtion qui eſt l'objet du Problême précédent. Au reſte ſi on introduit dans notre ſolution au lieu de Z & de V des fonctions indéterminées, on en tirera des formules analogues à celles que M. D'Alembert à trouvé par ſa méthode. Il eſt vrai, que nos formules ſe préſenteront ſous une autre forme, que celles de cet Auteur; mais la comparaiſon n'en fera pas difficile, & ne demandera d'ailleurs que un peu d'adreſſe de calcul; c'eſt pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

SCOLIE II.

40. Ce Savant Géomètre a encore rendu l'uſage de ſa méthode plus général en l'appliquant à déterminer les quantités α & β par les conditions que $\alpha ds + \beta du$, & $\rho\alpha du + p\beta du + \gamma\beta ds + m\alpha ds + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s$, ſoient l'une & l'autre des différentielles completes. Faiſant $\alpha ds + \beta du = dq$, & ſubſtituant dans la ſeconde différentielle les valeurs de α & β en q, on trouvera par les conditions de l'intégrabilité l'équation ſuivante,

$$\rho \left(\frac{d^2 q}{ds^2}\right) + p \left(\frac{d^2 q}{ds du}\right) + \left(\frac{d \cdot \Delta u, s}{ds}\right) = \gamma \left(\frac{d^2 q}{du^2}\right) + m \left(\frac{d^2 q}{du ds}\right) + \left(\frac{d \cdot \Gamma u, s}{du}\right)$$

qui

qui peut ſe rapporter à cette forme

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dt\,dx}\right) + c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y$$

Quoique cette équation ſoit étrangère à la matière que nous traitons, je crois qu'on ne ſera point faché de voir comment notre méthode s' y applique. Je commence ici par ſuppoſer $\frac{dz}{dt} = u$; & je décompoſe par ce moïen l' équation propoſée dans les deux ſuivantes

$$\frac{dz}{dt} = u; \ \& \ \frac{du}{dt} = b\,\frac{du}{dx} + c\,\frac{d^2 z}{dx^2} + y;$$

Je multiplie la première de ces équations par $N dx$, & la ſeconde par $M dx$, je les ajoute enſemble, & j' en prens l'intégrale, en faiſant évanoüir par des intégrations par parties les différences de z qui naiſſent de la variabilité de x; j' ai

$$\int\left(N\,\frac{dz}{dt} + M\,\frac{du}{dt}\right) dx =$$

$$\int\left(c\,\frac{d^2 M}{dx^2}\,z + \left[N - b\,\frac{dM}{dx}\right] u\right) dx + \int My\,dx$$

$$+ bMu + cM\frac{dz}{dx} - c\,\frac{dM}{dx}\,z.$$

Négligeant ces derniers termes algébriques qui diſparoiſſent d' eux mêmes, dans la ſuppoſition que M ſoit $= 0$ au premier, & au dernier point de l' intégrale, & comparant terme à terme, on aura $kN = c\,\frac{d^2 M}{dx^2}$; & $kM = N - b\,\frac{dM}{dx}$ d' où l' on tire $k^2 M + bk\,\frac{dM}{dx} - c\,\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$, & $M = Ae^{mkx} + Be^{nkx}$, m & n étant les racines de l'équation $1 + by - cy^2 = 0$. Or M devant être $= 0$, lorſque $x = 0$, & $x = a$, on aura $B = -A$; & $e^{mka} - e^{nka} = 0$; ce qui fournira une infinité de valeurs de k; on aura donc $M = e^{mkx} - e^{nkx}$; & par conſéquent $N = ck\,(m^2 e^{mkx} - n^2 e^{nkx})$. Soit maintenant $\int(Nz + Mu)\,dx = s$,

notre

notre equation deviendra $\frac{ds}{dt} = ks + \int M dy x$; d'où l'on tire en intégrant & conſervant les noms, que nous avons employé dans tout le cours des Recherches précédentes, $\int (Nz + Mu) dx = e^{kt} \int (NZ + MV) dx + e^{kt} \int e^{-kt} dt \int My dx$. Or la quantité N étant multipliée par un coéficient k, pour le faire diſparoître on changera les intégrales $\int Nz dx$, & $\int NZ dx$ en $- \int (\frac{dz}{dx}) dx \int N dx$ & $- \int (\frac{dZ}{dx}) dx \int N dx$, en négligeant les autres termes qui deviennent nuls, à cauſe que z & Z diſparoiſſent quand $x = 0$, & $= a$; ſubſtituant donc les valeurs de M, & de $\int N dx$, on aura

$$\int (u - cm \frac{dz}{dx}) e^{mkx} dx - \int (u - cn \frac{dz}{dx}) e^{nkx} dx =$$
$$\int (V - cm \frac{dZ}{dx}) e^{(mx+t)k} dx - \int (V - cn \frac{dZ}{dx}) e^{(nx+t)k} dx$$
$$+ e^{kt} \int e^{-kt} dt \int e^{mkx} y dx - e^{kt} \int e^{-kt} dt \int e^{nkx} y dx.$$

Soit P la fonction de p & de t qui vient de la ſubſtitution de p au lieu de $mx - t$ dans y, & Q la fonction de q & de t qui vient de la ſubſtitution de q à la place de $nx - t$ dans la même quantité y; les deux derniers termes de la formule précédente ſe changeront, ſelon ce qui a été enſeigné plus haut, en ceux-ci

$$\int (\int P dt) e^{mkx} dx - \int (\int Q dt) e^{nkx} dx.$$

Maintenant, puiſque m eſt ſuppoſé différent de n, il eſt clair, que les quantités exponentielles e^{mkx}, e^{nkx}, & $e^{(mx+t)k}$, $e^{(nx+t)k}$ ne ſauroient jamais devenir égales; donc il faudra néceſſairement décompoſer l'équation en deux, afin d'en chaſſer la quantité k; par ce moïen on trouvera, en retenant les expreſſions emploïées dans le Problême I.

$$u - cm\,\frac{dz}{dx} = (V - cm\,\frac{dZ}{dx})^{(x - \frac{t}{m})} + \int P\,dt$$

$$u - cn\,\frac{dz}{dx} = (V - cn\,\frac{dZ}{dx})^{(x - \frac{t}{n})} + \int Q\,dt.$$

S'il arrivoit que n fût $= m$, alors, la première de ces équations demeurant la même, on ne feroit qu'augmenter n d'une quantité infiniment petite α ; c'eſt-à-dire on ſuppoſeroit $n = m + \alpha$; & ôtant la première équation de la ſeconde, il viendroit après avoir diviſé par α

$$\frac{dz}{dx} = (\frac{dZ}{dx} - \frac{d\cdot(V - cm\,\frac{dZ}{dx})}{dx} \times \frac{t}{cm^2})^{(x - \frac{t}{m})}$$
$$+ \int(\frac{dP}{dp}) \times (\frac{p + t}{cm^2})\,dt.$$

Si n étoit infini, ce qui arrivera lorſque $c = 0$, alors on auroit auſſi $cn = 0$, & la ſeconde équation deviendroit $u = (V)^{(x)} + \int Q\,dt$.

Si on veut maintenant comparer les réſultats de cette ſolution avec ceux de M. D'Alembert, on prendra pour $(V - cm\,\frac{dZ}{dx})^{(x - \frac{t}{m})}$, & $(V - cn\,\frac{dZ}{dx})^{(x - \frac{t}{n})}$ des fonctions indéterminées de $x - \frac{t}{m}$, & de $x - \frac{t}{n}$, & faiſant les ſubſtitutions & les réductions néceſſaires, on trouvera pour α & β des formules analogues à celles que cet Auteur a donné; quoique j'aïe fait tous les calculs que cette comparaiſon demande, je ne les inſérerai point ici pour ne pas paſſer les bornes que je me ſuis préſcrites dans cette Diſſertation.

PROBLEME V.

Conſtruire l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c(\frac{d^2z}{dx^2}) + c(\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}) + y.$

41. En ſuivant notre méthode, on parviendra aux mêmes équations (A) & (B) du Prob. précéd., avec cette ſeule

ſeule différence, que la quantité M ſera maintenant égale à ſin. $x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}$ coſ. $x\sqrt{-k}$ comme dans le Prob. II.; ce qui rendra l'expreſſion $\int My\,dx$ compoſée des deux termes $\int$ ſin. $x\sqrt{-k}\,y\,dx - \sqrt{-k}\int$ coſ. $x\sqrt{-k}\,y\,x\,dx$; on aura donc dans l'équation (A) $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\int My\,dx =$ $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\int$ ſin. $x\sqrt{-k}\,y\,dx + \frac{1}{2\sqrt{c}\times\sqrt{-1}}\int$ coſ. $x\sqrt{-k}$ $y\,x\,dx =$ (en réduiſant le premier terme, comme on a fait dans le Prob. préc.) $\frac{1}{2\sqrt{c}\times\sqrt{-1}}\int$ coſ. $x\sqrt{-k}\,(\int y\,dx + xy)\,dx$; où il faudra pourtant obſerver que l'intégrale $\int y\,dx$ ſoit priſe de manière qu'elle s'évanoüiſſe lorſque $x = a$, afin que le terme $\frac{\text{ſin. } x\sqrt{-k}\int y\,dx}{\sqrt{ck}}$ que nous négligeons s'évanoüiſſe de même. Suppoſant donc maintenant $\int y\,dx + xy = Y$, & faiſant les autres obſervations, & réductions ſuivant les principes établis dans les Prob. II. & IV., on trouvera que la valeur de z' ſavoir de $z + \frac{d\cdot zx}{dx}$, de l'*Art.* 20., devra être ici augmentée de la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\int Q\,dt - \int P\,dt)$.

On tirera de même de l'équation (B) la valeur de u'; mais on pourra s'épargner la peine de ce calcul, en cherchant d'après la valeur trouvée de z' celle de $\frac{dz'}{dt} = u'$.

Uſage des Problêmes précédens.

42. Examinons d'abord le cas d'une ligne phiſique d'air; il eſt facile de trouver que l'équation rigoureuſe du mouvement des particules ſera $\frac{d^2 z}{dt^2} = -c\,\frac{d.\frac{dx}{dx+dz}}{dx^2}\times(dx+dz)$

 = c

$= c \frac{d^2 z}{dx(dx + dz)}$; car la portion de fluide qui dans l'état d' équilibre occupe l'eſpace dx, après le tems t remplira l' eſpace $dx + dz$, & ſon élaſticité ſera par conſéquent diminuée dans le rapport $\frac{dx}{dx + dz}$; donc la différence d'élaſticité des deux particules adjacentes, s' exprimera par $\frac{d \cdot \frac{dx}{dx + dz}}{dx} \times (dx + dz)$; donc diviſant par la maſſe dx de la particule intermédiaire, on aura la force qui tend la mouvoir, donc &c.

Je réduit la fraction $\frac{1}{dx + dz}$ en ſuite par une diviſion infinie; il me vient $\frac{1}{dx} - \frac{dz}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^3} -$ &c.; j' aurai donc en ſubſtituant $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2} - c \frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + c \frac{dz^2 d^2 z}{dx^4} -$ &c. Or ſi on ſuppoſe dz infiniment petite par rapport à dx, il eſt clair que le ſecond membre de cette équation ſe réduit au ſeul terme $c \frac{d^2 z}{dx^2}$, & qu'ainſi l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}$ donnera une valeur de z qui pourra être regardée comme exacte; c' eſt le cas que nous avons déja traité. Mais ſi on ſuppoſe ſeulement z fort petite, & cependant finie l' équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}$ ne donnera plus qu'une valeur approchée de z; on ſubſtituera donc cette valeur dans les termes $- c \frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + c \frac{dz^2 d^2 z}{dx^4} -$ &c. qu'on avoit négligées, & intégrant l' équation par la méthode du Prob. IV., on aura une valeur de z plus exacte; on ſubſtituera de nouveau la valeur de z ainſi corrigée, & l'on en tirera une autre encore plus exacte que la précédente; en opérant ainſi de ſuite, on approchera toujours de plus en plus de la vraie valeur de z.

Or

Or si, pour faciliter le calcul, on introduit les fonctions indéterminées dans notre solution du Problême I., on a pour la première valeur de z, $z = \varphi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})$; maintenant il faut supposer $y = -c\,\frac{dz\,d^2z}{dx^3} + c\,\frac{dz^2 d^2 z}{dx^4} -$ &c. ce qui donne $\int y\,dx = Y = -c\,\frac{dz^2}{2dx^2} + c\,\frac{dz^3}{3dx^3} -$ &c. $= -\frac{1}{2}c\varphi'^2(x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\psi'^2(x - t\sqrt{c}) - c\varphi'(x + t\sqrt{c}) \times \psi'(x - t\sqrt{c})$; en négligeant les termes suivants qui doivent être regardés comme infiniment petits d'un ordre plus élevé; on aura donc

$$P = -\frac{1}{2}c\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c}) - c\varphi'(p + 2t\sqrt{c}) \times \psi' p$$
$$-\frac{1}{2}c\psi'^2 p \quad \&$$

$$Q = -\frac{1}{2}c\varphi'^2 q - c\varphi' q \times \psi'(q - 2t\sqrt{c})$$
$$-\frac{1}{2}c\psi'^2(q - 2t\sqrt{c}),$$ & par conséquent

$$\int P\,dt = -\frac{1}{2}c\int\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c})\,dt - \frac{\sqrt{c}}{2}\varphi(p + 2t\sqrt{c})$$
$$\times \psi' p - \frac{1}{2}ct\psi'^2 p$$

$$\int Q\,dt = -\frac{1}{2}ct\varphi'^2 q + \frac{\sqrt{c}}{2}\varphi' q \times \psi(q - 2t\sqrt{c})$$
$$-\frac{1}{2}c\int\psi'^2(q - 2t\sqrt{c})\,dt.$$

Que (φ) dénote la valeur de l'intégrale $\int\varphi'^2(p + 2t\sqrt{c})\,dt\sqrt{c}$, & (ψ) celle de l'intégrale $\int\psi'^2(q - 2t\sqrt{c})\,dt\sqrt{c}$, on trouvera après avoir restitué au lieu de p & de q leurs valeurs, $\frac{\int Q\,dt - \int P\,dt}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4}t\sqrt{c}\,[\psi'^2(x - t\sqrt{c})$

 $-\varphi'^2$

$-\varphi'^2 [(x + t\sqrt{c}] + \frac{1}{4} \psi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x + t\sqrt{c}) +$

$\psi'(x - t\sqrt{c}) \times \varphi(x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{4}(\psi) + \frac{1}{4}(\varphi)$ quantité qui devra être ajoutée à la première valeur de z.

Pour voir maintenant combien cette correction peut influer sur la vitesse de la propagation des ébranlemens, on observera que les fonctions φx & ψx doivent être telles qu'elles soient toujours $= 0$, lorsque les abscisses x ne sont pas très-petites (*Voïés Art.* 4.); d'où il suit que pour la propagation du côté des abscisses positives x, il ne faudra retenir que les fonctions de $x - t\sqrt{c}$, ou de $q - 2t\sqrt{c}$; on aura donc $z = \psi(x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}\,\psi'^2(x - t\sqrt{c})$ $- \frac{1}{4}(\psi)$. Or, en supposant la valeur de $\psi(x - t\sqrt{c})$ très-petite, $\psi'^2(x - t\sqrt{c})$ sera infiniment petite du second ordre; & (ψ) sera aussi du même ordre à très-peu-près, à cause que la fonction $\psi(x - t\sqrt{c})$ n'a de valeur que dans une fort petite étenduë de l'axe; mais $t\sqrt{c}$, devant être à peu-près $= x$, recevra une valeur considérable; donc le terme (ψ) s'évanoüira auprès du terme $t\sqrt{c}\,\psi'^2(x - t\sqrt{c})$; & la valeur de z se réduira à $\psi(x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}$ $\psi'^2(x - t\sqrt{c})$

Le premier terme $\psi(x - t\sqrt{c})$ donne, comme il est facile de voir, & comme on l'a démontré ailleurs, la vitesse de la propagation $= \sqrt{c}$; & il est clair que cette vitesse ne peut varier à moins que la quantité $\sqrt{c}$ ne varie de même; supposons donc $\sqrt{c} + \alpha$ au lieu de $\sqrt{c}$, α étant une quantité assès petite; on aura pour le premier terme de la valeur de z, $\psi(x - t\sqrt{c} - t\alpha)$, qui se réduit à $\psi(x - t\sqrt{c}) - t\alpha\,\psi'(x - t\sqrt{c})$; comparant cette expression avec celle qu'on a trouvé par notre approxima-

tion

tion, on a $\alpha = -\frac{\sqrt{c}}{4}\ \psi'(x - t\sqrt{c})$; mais $-\sqrt{c}\ \psi'(x-t\sqrt{c})$ $= \frac{d \cdot \psi(x - t\sqrt{c})}{dt}$ = à la viteſſe propre de la particule qui répond à l' abſciſſe x; donc ſi on nomme u cette viteſſe on aura $\alpha = \frac{u}{4}$, & par conſéquent la viteſſe de la propagation deviendra $= \sqrt{c} + \frac{u}{4}$ à très-peu-près. Cette concluſion paroit donc en quelque ſorte favorable à l' hipothèſe des ébranlemens finis; mais elles perdera toute ſa force pour peu qu'on s' arrête à l' examiner.

Par ce qu'on vient de trouver, on a $z = \psi\left(x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4}\right)$; ſoit a la longueur de l'onde aérienne excitée immédiatement par le corps ſonore, il eſt clair que z ne commencera à avoir une valeur, que quand $x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4}$ ſera $= a$; d' où il s' enſuit qu'au bout du tems t le Son ſera parvenu juſqu'à la particule qui répond à l' abſciſſe $x = a + t\left(\sqrt{c} + \frac{u}{4}\right)$, u étant la viteſſe que cette particule reçoit en même tems. Or en premier lieu cette viteſſe ne peut être qu'infiniment petite, puiſque il ſeroit abſurde qu'une particule d' un fluide élaſtique reçût tout d' un coup une viteſſe finie par l' action des autres parties adjacentes; en ſecond lieu il eſt viſible que la formule trouvée détruiroit l' uniformité de la viteſſe du Son, & la feroit dépendre en quelque ſorte de la nature des ébranlemens primitifs; ce qui eſt contraire à toutes les expériences.

Il ſeroit, après cela, inutile de pouſſer plus loin l' approximation de la valeur de z; car, outre qu'il n'en réſulteroit que des termes moindres que celui que nous venons d'examiner, l'expreſſion de la viteſſe du Son deviendroit toujours plus

plus compliquée, & par conséquent moins conforme à la véritable.

43. Passons maintenant à l' hipothèse des ondulations sphériques; & cherchons par le moïen du Prob. V. si le changement, que la supposition des ébranlemens finis cause dans leur propagation, peut s' accorder avec les phénomènes.

Par les principes posés dans *l' Art.* 30., on trouvera pour l' équation rigoureuse du mouvement du fluide

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -c\,\frac{d\cdot\frac{x^2 dx}{(x+z)^2(dx+dz)}}{dx} \times \frac{(x+z)^2(dx+dz)}{x^2 dx}$$

$$= \frac{d^2 z}{dx\,(dx+dz)} + \frac{2\,dz}{dx\,(x+z)} - \frac{2z}{x\,(x+z)},$$

d' où l' on tire par la voie des series

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2\,d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right) - c\left(\frac{dz\,d^2 z}{dx^3} + 2\,\frac{z}{x} \times \frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right)$$

$$+ c\left(\frac{dz^2\,d^2 z}{dx^4} + 2\,\frac{z^2}{x^2} \times \frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right) - \text{\&c.}$$

On aura donc selon le Prob. V. $y = -c\left(\frac{dz\,d^2 z}{dx^3} + 2\,\frac{z}{x} \times \frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right)$ en négligeant les autres termes qui renferment plus de deux dimensions de z; donc $\int y\,dx = -\frac{c}{2}\,\frac{dz^2}{dx^2} - c\,\frac{z^2}{x^2}$; & $\int y\,dx + xy = Y = \frac{d\cdot x\int y\,dx}{dx} = -\frac{c}{2}\,\frac{d\cdot\frac{x\,dz^2}{dx^2}}{dx} - c\,\frac{d\cdot\frac{z^2}{x}}{dx}$. Maintenant il faut substituer au lieu de z, sa valeur tirée des formules du Prob. II.; pour abréger ces substitutions je remarque d'abord, comme il est évident, qu'il ne faudra emploïer que les seules fonctions de $x - t\sqrt{c}$; d' où il suit que si on pose

$$z + \frac{d\cdot zx}{dx} = \varphi\,(x - t\sqrt{c}),$$ on aura

$z =$

$$z = \frac{\grave{\varphi}(x - t\sqrt{c})}{x} - \frac{\grave{\grave{\varphi}}(x - t\sqrt{c})}{x^2};$$

Je remarque enſuite que, lorſque x a une valeur conſidérable, on peut négliger, auprès des termes qui contiennent x ſeul au dénominateur, tous ceux qui ſont diviſés par des puiſſances d'x plus hautes que l'unité; par ce moïen on aura ſimplement $z = \frac{\grave{\varphi}(x - t\sqrt{c})}{x}$, &

$Y = -c\,\frac{\grave{\varphi}(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})}{x}$, donc

$P = -\frac{c\varphi p \times \varphi' p}{p + t\sqrt{c}}$; $\int P\,dt = -\sqrt{c}\,l\,(p + t\sqrt{c}) \times \varphi p \times \varphi' p$
$= -\sqrt{c}\,l\,x \times \varphi\,(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})$;
$Q = -\frac{c\,\varphi\,(q - 2t\sqrt{c}) \times \varphi'(q - 2t\sqrt{c})}{q - t\sqrt{c}}$;

d'où l'on tirera par les quadratures la valeur de $\int Q\,dt$; mais il eſt facile de voir que cette valeur ſera infiniment petite par rapport à celle de $\int P\,dt$, à cauſe que la fonction φ, & ſes différences ſont toujours infiniment petites, & qu'elles n'ont outre cela des valeurs réelles, que dans une très-petite portion de l'axe; ne prenant donc que la formule $\frac{1}{2\sqrt{c}}\int P\,dt$, & l'ôtant de $z + \frac{d \cdot xz}{dx}$, ſavoir de $\varphi\,(x - t\sqrt{c})$ on aura pour l'augmentation de cette fonction $\frac{1}{2}\,l\,x \times \varphi\,(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})$; or ſi on ſuppoſe comme on a fait plus haut, que la quantité $\sqrt{c}$ croiſſe d'une très-petite quantité α, on trouvera ici $\alpha = -\frac{l\,x \times \varphi\,(x - t\sqrt{c})}{2t}$, ce qui changera la fonction $\varphi\,(x - t\sqrt{c})$ en $\varphi\,[x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2}\,l\,x \times \varphi\,(x - t\sqrt{c})]$. Prenant a pour le rayon de la première onde aérienne excitée par le corps ſonore, les loix de la propagation du Son ſeront donc contenues dans la for-

mule $x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2} lx \times \varphi(x - t\sqrt{c}) = a$.

Je crois ſuperflu de m'arrêter ici à examiner les conſéquences de cette formule, car il eſt facile de voir qu'elles ne feront pas plus favorables à la ſuppoſition dont il s'agit, que ne l' ont été celles qu'on a trouvé dans *l' Article précédent*.

COROLLAIRE.

44. Après ce qu' on vient de démontrer je crois qu' on peut regarder comme une vérité aſsès conſtante, que l' hipothèſe des ébranlemens infiniment petits, eſt la ſeule récévable dans la théorie de la propagation du Son, comme nous avions promis de le prouver dans *l' Art.* 10. Je vais donc rentrer dans cette hipothèſe, & chercher à déterminer les lois de la propagation du Son, d'une manière plus générale & plus exacte, que je ne l' ai fait.

§. II.

Eſſai d' une conſtruction générale des trois équations de l' Art. 10.

45. JE multiplie la première de ces équations par L, la ſeconde par M, & la troiſiéme par N (L, M, N étant ſuppoſées des fonctions quelconques de X, Y, Z); j'en fais une ſomme, que je multiplie encore par $dXdYdZ$, & dont je prens l' intégrale, en faiſant varier l' une après l' autre les trois changeantes X, Y, & Z. De cette manière j' aurai l' équation

$$\int \left(\frac{d^2 x}{dt^2} L + \frac{d^2 y}{dt^2} M + \frac{d^2 z}{dt^2} N \right) dXdYdZ =$$

c ∫

$$c\int\left(\frac{d^2x}{dX^2}L+\frac{d^2y}{dXdY}L+\frac{d^2z}{dXdZ}L+\frac{d^2y}{dY^2}M+\frac{d^2x}{dYdX}M\right.$$
$$\left.+\frac{d^2z}{dYdZ}M+\frac{d^2z}{dZ^2}N+\frac{d^2x}{dZdX}N+\frac{d^2y}{dZdY}N\right)dXdYdZ$$

qui renferme le mouvement de chaque point mobile du ſiſtème donné. On remarquera que c eſt miſe ici pour $\frac{2Eh}{T^2D}$, ainſi que nous l'avons pratiqué par tout ailleurs.

En ſuivant notre méthode on prendra autant d'intégrales par parties qu'il en faudra pour faire diſparoître toutes les différences de x, y, z ſuivant X, Y, Z; on aura donc

$$\int\frac{d^2x}{dX^2}LdXdYdZ=\int x\frac{d^2L}{dX^2}dXdYdZ$$
$$+\int\left(\frac{dx}{dX}L-x\frac{dL}{dX}\right)dYdZ$$

$$\int\frac{d^2y}{dXdY}LdXdYdZ=\int y\frac{d^2L}{dXdY}dXdYdZ$$
$$+\int\frac{dy}{dY}LdYdZ-\int y\frac{dL}{dX}dXdZ$$

$$\int\frac{d^2z}{dXdZ}LdXdYdZ=\int z\frac{d^2L}{dXdZ}dXdYdZ$$
$$+\int\frac{dz}{dZ}LdYdZ-\int z\frac{dL}{dX}dXdY$$

$$\int\frac{d^2y}{dY^2}MdXdYdZ=\int y\frac{d^2M}{dY^2}dXdYdZ$$
$$+\int\left(\frac{dy}{dY}M-y\frac{dM}{dY}\right)dXdZ$$

$$\int\frac{d^2x}{dYdX}MdXdYdZ=\int x\frac{d^2M}{dYdX}dXdYdZ$$
$$+\int\frac{dx}{dX}MdXdZ-\int x\frac{dM}{dY}dYdZ$$

$$\int\frac{d^2z}{dYdZ}MdXdYdZ=\int z\frac{d^2M}{dYdZ}dXdYdZ$$

$$+\int \frac{dz}{dZ} M dX dZ - \int z \frac{dM}{dY} dX dY$$

$$\int \frac{d^2 z}{dZ^2} N dX dY dZ = \int z \frac{d^2 N}{dZ^2} dX dY dZ$$

$$+\int \left(\frac{dz}{dZ} N - z \frac{dN}{dZ}\right) dX dY$$

$$\int \frac{d^2 x}{dZ dX} N dX dY dZ = \int x \frac{d^2 N}{dZ dX} dX dY dZ$$

$$+\int \frac{dx}{dX} N dX dY - \int x \frac{dN}{dZ} dY dZ$$

$$\int \frac{d^2 y}{dZ dY} N dX dY dZ = \int y \frac{d^2 N}{dZ dY} dX dY dZ$$

$$+\int \frac{dy}{dY} N dX dY - \int y \frac{dN}{dZ} dX dZ.$$

Dans ces transformées il y a, comme on le voit, deux ſortes d'expreſſions intégrales; les unes plus générales renferment trois intégrations, ſuivant la variabilité des trois coordonnées X, Y, Z, & expriment par conſéquent la ſomme d'autant de valeurs particulières, qu'il y a de particules dans la maſſe totale du fluide; les autres, au contraire, moins générales ne renferment chacune que deux intégrations ſuivant la variabilité de deux des coordonnées X, Y, & Z; & ne dénotent, en conſéquente, que la ſomme d'autant de valeurs particulières qu'il y a de particules dans une ſeule tranche du fluide. Celles-ci pourront donc être regardées comme des conſtantes à l'égard de la troiſième variable manquante; & l'on ſera toujours le maître de les faire évanoüir, en donnant certaines limitations aux valeurs des quantités L, M, & N, ſelon la figure de l'eſpace, dans lequel on ſuppoſe que la maſſe de l'air eſt renfermée.

Ainſi, par exemple, ſi cette figure eſt celle d'un parallélépipède quelconque, on voit aiſément que x eſt nul dans les deux plans oppoſés qui ſont perpendiculaires à la

ligne

ligne X; d'où il suit que les intégrales, qui contiennent x, seront aussi nuls dans toute leur étendue, à cause que ces intégrales ne varient que suivant Y & Z; par une raison semblable on verra, que les intégrales contenant y & z s'évanoüiront aussi d'elles mêmes; donc pour achever de faire évanoüir les autres intégrales, on supposera L tel qu'il devienne $= 0$, lorsque $X = 0$, & lorsque $X = a$ quels que soient Y & Z; ensuite M devra devenir $= 0$, lorsque $Y = 0$, & $Y = b$, X & Z étant quelconques; enfin N devra disparoître de même, en posant $Z = 0$, & $Z = c$, pour toute l'étendue des X & Y; a, b, c étant les trois dimensions du parallélépipéde donné.

Si la masse du fluide avoit une autre figure quelconque, on trouveroit aussi, en aïant égard à cette figure, les conditions qui pourront faire disparoître toutes les expressions intégrales à deux seules changeantes; il est vrai, que le plus souvent ces opérations ne pourront s'exécuter, faute de connoître les valeurs exactes & générales des quantités L, M, & N; mais il suffira de les imaginer exécutées pour démontrer que l'on peut toujours omettre les expressions intégrales dont nous parlons. Ainsi l'on aura simplement après les substitutions . . . . (D)

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2} L + \frac{d^2y}{dt^2} M + \frac{d^2z}{dt^2} N\right) dX dY dZ =$$

$$c\int \Big[x\left(\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ}\right) + y\left(\frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dYdX}\right.$$

$$\left. + \frac{d^2N}{dYdZ}\right) + z\left(\frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZdX} + \frac{d^2M}{dZdY}\right)\Big] dXdYdZ.$$

On fera maintenant

$$\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ} = kL \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

$$\frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dYdX} + \frac{d^2N}{dYdZ} = kM \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

$$\frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZ\,dX} + \frac{d^2 M}{dZ\,dY} = kN \;\ldots\ldots\; (C)$$

Equations, par lesquelles on déterminera les valeurs des quantités L, M, & N. Il faudra de plus que ces valeurs satisfassent aux conditions énoncées ci-dessus; & c'est par là qu'on déterminera toutes les constantes que l'intégration aura entraîné, comme aussi la constante k qui ne pourra manquer d'avoir autant de valeurs différentes qu'il y a des particules mobiles.

Cela fait, notre équation principale pourra se mettre sous la forme ordinaire $\frac{d^2 s}{dt^2} = kcs$, s étant ici $= \int (xL + yM + zN)\, dXdYdZ$; d'où l'on tirera comme dans le Prob. I.

$$s = S \text{ cos. } t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \text{ sin. } t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \text{ cos. } t\sqrt{-ck} - S\sqrt{-ck} \text{ sin. } t\sqrt{-ck}.$$

Or soit, $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, & $\frac{dz}{dt} = z'$; & que (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') désignent les valeurs de x, y, z, x', y', & z', lorsque $t = 0$, on aura donc

$$(D) \;\ldots\ldots\; \int [xL + yM + zN]\, dXdYdZ =$$
$$\text{cos. } t\sqrt{-ck} \int [(x)L + (y)M + (z)N]\, dXdYdZ$$
$$+ \frac{\text{sin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int [(x')L + (y')M + (z')N]\, dXdYdZ$$

$$(E) \;\ldots\ldots\; \int [x'L + y'M + z'N]\, dXdYdZ =$$
$$\text{cos. } t\sqrt{-ck} \int [(x')L + (y')M + (z')N]\, dXdYdZ$$
$$- \sqrt{-ck} \text{ sin. } t\sqrt{-ck} \int [(x)L + (y)M + (z)N]\, dZdYdZ.$$

Voilà les équations, d'où l'on tireroit suivant notre méthode les valeurs exactes de x, y, & z, si l'on avoit celles de L, M, & N, & qu'on pût faire disparoître la quantité k, ainsi qu'on l'a fait dans les Prob. préc.

Mais le premier de ces objets, nous présente d'abord des difficultés insurmontables, soit qu'en effet les équations

(*A*),

(A), (B), (C) ne ſoient pas ſuſceptibles d' intégration, ſoit qu'elles demandent d' autres méthodes, que celles que nous connoiſſons. Si on vouloit ſe borner à des conſtructions particulières, il ſeroit aiſé d'en trouver; mais elles ne ſauroient être d' aucune utilité dans la recherche des loix de la propagation du Son.

46. Il eſt viſible, par exemple, qu'on peut ſuppoſer $L = A e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}$; $M = B e^{(pX + qX + rZ)\sqrt{k}}$; $N = C e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}$; A, B, C, p, q, r étant des conſtantes à déterminer par la ſubſtitution & la comparaiſon des termes; pour cela on trouvera les trois équations

$$A = c\,(Ap^2 + Bpq + Cpr)$$
$$B = c\,(Bq^2 + Apq + Crq)$$
$$C = c\,(Cp^2 + Apr + Bqr),$$

qui donnent, en poſant R pour $\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$, $p = \frac{A}{R\sqrt{c}}$, $q = \frac{B}{R\sqrt{c}}$, $r = \frac{C}{R\sqrt{c}}$; mais les valeurs de L, M, & N n' étant que particulières, on ne pourra s'en ſervir, ſuivant notre méthode, que dans l' hipothèſe que les valeurs de x, y, & z ſoient renfermées dans certaines conditions: car il eſt viſible, que L, M, & N étant exprimées par une même fonction de $pX + qY + qZ$, multipliée ſeulement par des conſtantes différentes, les valeurs de x, y, z devront être les mêmes pour tous les points, dont la poſition eſt renfermée dans la formule $pX + qY + rZ =$ conſt, & de plus ces valeurs devront garder entr'elles un rapport conſtant. Suppoſé que ces conditions aient lieu, on pourra pourſuivre le calcul, en ſubſtituant les valeurs trouvées de L, M, & N dans l' équation (D), & transformant enſuite le terme
$\int[A(x') + B(y') + C(z')]\, e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\, dX\,dY\,dZ$
en $-\sqrt{k}\int[pA\int(x')\,dX + qB\int(y')\,dY + rC\int(z')\,dZ]$
$e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\, dX\,dY\,dZ$, & réduiſant coſ. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ en exponentielles imaginaires, on aura

$\int[A$

$$\int [Ax + By + Cz]\, e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\, dX dY dZ =$$

$$\frac{1}{2}\int [A(x) + B(y) + C(z) - \frac{1}{\sqrt{c}} pA\int (x')\, dX - \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int (y')\, dY - \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int (z')\, dZ]\, e^{(pX+qY+rZ+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dX dY dZ + \frac{1}{2}\int [A(x) + B(y) + C(z) + \frac{1}{\sqrt{c}} pA \int (x')\, dX + \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int (y')\, dY + \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int (z')\, dZ]\, e^{(pX+qY+rZ-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dX dY dZ.$$

Equation, d' où l'on tirera suivant notre méthode,

$$Ax + By + Cz = \frac{1}{2}[A(x) + B(y) + C(z) + \frac{1}{\sqrt{c}} pA\int (x')\, dX + \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int (y')\, dY + \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int (z')\, dZ]^{(pX+qY+rZ+t\sqrt{c})} + \frac{1}{2}[A(x) + B(y) + C(z) - \frac{1}{\sqrt{c}} pA\int (x')\, dX - \frac{1}{\sqrt{c}} qB\int (y')\, dY - \frac{1}{\sqrt{c}} rC\int (z')\, dZ]^{(pX+qY+rZ-t\sqrt{c})}.$$

Les quantités mises en forme d'exposants denotent, comme dans le Problême I. les valeurs qu'il faut donner aux coordonnées; ainsi X, Y, Z étant les coordonnées qui répondent à x, y, z & (X), (Y), (Z) étant supposées celles qui répondent aux expressions qui ont l'exposant $pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$, les valeurs de ces dernières devront être telles, que $p(X) + q(Y) + r(Z) = pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$.

Au reste, si l' on introduit dans cette solution les fonctions indéterminées, elle reviendra au même, que celle que M. Euler a donné dans son Mémoire. Car on aura $Ax + By + Cz = \varphi(pX + qY + rZ + t\sqrt{c}) + \psi(pX + qY + rZ - t\sqrt{c})$; d' où l' on tirera les valeurs de

y &

y & de z en faisant, selon l'hipothèse, $y = fx$; $z = hx$; substituant ensuite ces valeurs dans les équations différentielles de *l'Art.* 10., on trouvera $f = \frac{B}{A}$, & $h = \frac{C}{A}$, conformément aux formules de la *pag.* 7. *ci-dessus*.

Voilà le Problême résolu analitiquement pour une infinité de cas; mais il faut avoüer qu'aucune de ces solutions ne sera applicable à la Théorie de la propagation du Son, dans laquelle les ébranlemens primitifs doivent être supposés quelconques. Il en sera de même de toute autre solution qui se trouvera en intégrant les équations (A), (B), (C) dans des cas particuliers. C'est pourquoi nous rénoncerons pour le présent à déterminer les valeurs exactes de x, y, & z, par les voies ordinaires de notre méthode, & nous nous bournerons à les trouver, s'il est possible, par approximation, en supposant que le tems t soit fort petit; nous verrons ensuite quelles conséquences on pourra tirer d'un tel calcul pour la connoissance de loix de la propagation du Son en général.

47. Je commence par développer l'expression cos. $t\sqrt{-k}$ en poussant la serie jusqu'aux quantités infiniment petites du quatrième ordre; j'ai cos. $t\sqrt{-ck} = 1 + \frac{1}{2} kt^2c + \frac{1}{2.3.4} k^2t^4c^2$; ce qui changera le terme cos. $t\sqrt{-ck}$ $\int [(x) L + (y) M + (z) N] \, dXdYdZ$ de l'équation (D) en

$$\int (x) \times [L + \tfrac{1}{2} t^2ckL + \tfrac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2L] \, dXdYdZ$$
$$+ \int (y) \times [M + \tfrac{1}{2} t^2ckM + \tfrac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2M] \, dXdYdZ$$
$$+ \int (z) \times [N + \tfrac{1}{2} t^2ckN + \tfrac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2N] \, dXdYdZ.$$

Or les équations (A), (B), (C) donnent d'abord

$kL = \frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dXdY} + \frac{d^2 N}{dXdZ}$; $kM = \frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dYdX} + \frac{d^2 N}{dYdZ}$; $kN = \frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZdX} + \frac{d^2 M}{dZdY}$;
multipliant ces équations par k, & subſtituant de nouveau au lieu de kL, kM, kN leurs valeurs, on aura enſuite

$$k^2 L = \frac{d^4 L}{dX^4} + \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + \frac{d^4 M}{dX^3 dY} + \frac{d^4 M}{dXdY^3} + \frac{d^4 M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4 N}{dX^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dXdZ^3} + \frac{d^4 N}{dXdZdY^2};$$

$$k^2 M = \frac{d^4 M}{dY^4} + \frac{d^4 M}{dY^2 dX^2} + \frac{d^4 M}{dY^2 dZ^2} + \frac{d^4 L}{dY^3 dX} + \frac{d^4 L}{dYdX^3} + \frac{d^4 L}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4 N}{dY^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dYdZ^3} + \frac{d^4 N}{dX^2 dYdZ};$$

$$k^2 N = \frac{d^4 N}{dZ^4} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dX^2} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dZ^3 dX} + \frac{d^4 L}{dZdX^3} + \frac{d^4 L}{dXdY^2 dZ} + \frac{d^4 M}{dZ^3 dY} + \frac{d^4 M}{dZdY^3} + \frac{d^4 M}{dX^2 dYdZ}.$$

Par là, on pourra faire évanouïr la lettre k de l'expreſſion précédente; car on aura

$$L + \frac{1}{2} t^2 c k L + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 L = L + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dXdY} + \frac{d^2 N}{dXdZ} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 L}{dX^4} + \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + \frac{d^4 M}{dX^3 dY} + \frac{d^4 M}{dXdY^3} + \frac{d^4 M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4 N}{dX^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dXdZ^3} + \frac{d^4 N}{dXdY^2 dZ} \right) \; .\;.\;.\;. \; (F)$$

$M +$

$$M + \frac{1}{2}\, t^2 c k M + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\, t^4 c^2 k^2 M = M + \frac{1}{2}\, t^2 c \left(\frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dY\,dX} + \frac{d^2 N}{dY\,dZ}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\, t^4 c^2 \left(\frac{d^4 M}{dY^4} + \frac{d^4 M}{dY^2\,dX^2} + \frac{d^4 M}{dY^2\,dZ^2} + \frac{d^4 L}{dY^3\,dX} + \frac{d^4 L}{dY\,dX^3} + \frac{d^4 L}{dX\,dY\,dZ^2} + \frac{d^4 N}{dY^3\,dZ} + \frac{d^4 N}{dY\,dZ^3} + \frac{d^4 N}{dX^2\,dY\,dZ}\right) \ldots\ldots (G)$$

$$N + \frac{1}{2}\, t^2 c k N + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\, t^4 c^2 k^2 N = N + \frac{1}{2}\, t^2 c \left(\frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZ\,dX} + \frac{d^2 M}{dZ\,dY}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\, t^4 c^2 \left(\frac{d^4 N}{dZ^4} + \frac{d^4 N}{dZ^2\,dX^2} + \frac{d^4 N}{dZ^2\,dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^3\,dX} + \frac{d^4 L}{dZ\,dX^3} + \frac{d^4 L}{dX\,dY^2\,dZ} + \frac{d^4 M}{dZ^3\,dY} + \frac{d^4 M}{dZ\,dY^3} + \frac{d^4 M}{dX^2\,dY\,dZ}\right) \ldots\ldots (H)$$

Or, quelles que ſoient les valeurs des quantités L, M, N, il eſt certain qu'elles ſeront des fonctions de X, Y, Z, ce que nous dénoterons ainſi $L^{(X,\,Y,\,Z)}$, $M^{(X,\,Y,\,Z)}$, $N^{(X,\,Y,\,Z)}$; de ſorte, que ſi l'on ſuppoſe que les variables X, Y, Z deviennent $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, les valeurs correſpondantes de L, M, N s'exprimeront à notre manière par $L^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)}$, $M^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)}$, $N^{(X + pt\, Y + qt,\, Z + rt)}$. Cela poſé, on ſait, que ſi L repréſente une fonction quelconque de la variable X, laquelle croiſſe d'une quantité très-petite pt, la valeur de L deviendra, en négligeant les quantités infiniment petites au deſſus du quatrième ordre, $L + pt\,\frac{dL}{dX} + \frac{1}{2}\,p^2 t^2\,\frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\,p^3 t^3\,\frac{d^3 L}{dX^3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\,p^4 t^4\,\frac{d^4 L}{dX^4}$; donc ſi on ſuppoſe que la fonction L renferme outre la variable X, les variables Y, & Z qui croiſſent en même tems des quantités très-petites qt, rt, on trouvera par un calcul aſsès ſimple

$$L^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)} = L + t\left(p\frac{dL}{dX} + q\frac{dL}{dY} + r\frac{dL}{dZ}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}t^2\left(p\frac{d^2L}{dX^2} + 2pq\frac{d^2L}{dXdY} + q^2\frac{d^2L}{dY^2} + 2pr\frac{d^2L}{dXdZ}\right.$$

$$\left. + 2qr\frac{d^2L}{dYdZ} + r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}t^3\left(p^3\frac{d^3L}{dX^3} + 3p^2q\right.$$

$$\frac{d^3L}{dX^2dY} + 3pq^2\frac{d^3L}{dXdY^2} + q^3\frac{d^3L}{dY^3} + 3p^2r\frac{d^3L}{dX^2dZ}$$

$$+ 3pr^2\frac{d^3L}{dXdZ^2} + 3q^2r\frac{d^3L}{dY^2dZ} + 3qr^2\frac{d^3L}{dYdZ^2} +$$

$$\left. 6pqr\frac{d^3L}{dXdYdZ} + r^3\frac{d^3L}{dZ^3}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}t^4\left(p^4\frac{d^4L}{dX^4}\right.$$

$$+ 4p^3q\frac{d^4L}{dX^3dY} + 6p^2q^2\frac{d^4L}{dX^2dY^2} + 4pq^3\frac{d^4L}{dXdY^3} +$$

$$q^4\frac{d^4L}{dY^4} + 4p^3r\frac{d^4L}{dX^3dZ} + 6p^2r^2\frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + 4pr^3$$

$$\frac{d^3L}{dXdZ^3} + 4q^3r\frac{d^4L}{dY^3dZ} + 6q^2r^3\frac{d^4L}{dY^2dZ^2} + 4qr^3$$

$$\frac{d^4L}{dYdZ^3} + 12p^2qr\frac{d^4L}{dX^2dYdZ} + 12pq^2r\frac{d^4L}{dXdY^2dZ}$$

$$\left. + 12pqr\frac{d^4L}{dXdYdZ_2} + r^4\frac{d^4L}{dZ^4}\right).$$

De cette formule je déduis les suivantes

$$\frac{1}{8}L^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)} + \frac{1}{8}L^{(X+pt,\ Y-qt,\ Z+rt)}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z-rt)} + \frac{1}{8}L^{(X+pt,\ Y-qt,\ Z-rt)}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X-pt,\ Y+qt,\ Z+rt)} + \frac{1}{8}L^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z+rt)}$$

$$+ \frac{1}{8}L^{(X-pt,\ Y+qt,\ Z-rt)} + \frac{1}{8}L^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)}$$

$$= L + \frac{1}{2}t^2\left(p^2\frac{d^2L}{dX^2} + q^2\frac{d^2L}{dY^2} + r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$$

$t^4\,(p^4$

$$t^4 \left(p^4 \frac{d^4 L}{dX^4} + 6 p^2 q^2 \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 6 p^2 r^2 \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + 6 q^2 r^2 \frac{d^4 L}{dY^2 dZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4}\right);$$

$$\frac{1}{4} L^{(X, Y + qt, Z + rt)} + \frac{1}{4} L^{(X, Y - qt, Z + rt)} + \frac{1}{4} L^{(X, Y + qt, Z - rt)} + \frac{1}{4} L^{(X, Y - qt, Z - rt)}$$

$$= L + \frac{1}{2} t^2 \left(q^2 \frac{d^2 L}{dY^2} + r^2 \frac{d^2 L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \left(q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 6 q^2 r^2 \frac{d^4 L}{dY^2 dZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4}\right);$$

$$\frac{1}{8} L^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)} + \frac{1}{8} L^{(X + pt, Y + qt, Z - rt)} + \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y - qt, Z + rt)} + \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)}$$
$$- \frac{1}{8} L^{(X + pt, Y - qt, Z + rt)} - \frac{1}{8} L^{(X + pt, Y - qt, Z - rt)} - \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y + qt, Z + rt)} - \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y + qt, Z - rt)}$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \times 2 p q \frac{d^2 L}{dX dY} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \left(4 p^3 q \frac{d^4 L}{dX^3 dY} + 4 p q^3 \frac{d^4 L}{dX dY^3} + 12 p q r^2 \frac{d^4 L}{dX dY dZ^2}\right);$$

$$\frac{1}{8} L^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)} + \frac{1}{8} L^{(X + pt, Y - qt, Z + rt)} + \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y + qt, Z - rt)} + \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)}$$
$$- \frac{1}{8} L^{(X + pt, Y + qt, Z - rt)} - \frac{1}{8} L^{(X + pt, Y - qt, Z - rt)} - \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y + qt, Z + rt)} - \frac{1}{8} L^{(X - pt, Y - qt, Z + rt)}$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \times 2 p r \frac{d^2 L}{dX dZ} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \left(4 p^3 r \frac{d^4 L}{dX^3 dZ} + \right.$$

$$4pr^3 \frac{d^4 L}{dX dZ^3} + 12 pq^2 r \frac{d^4 L}{dX dY^2 dZ}).$$

On formera de pareilles formules à l' égard des expreſſions $M^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, & $N^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, & en donnant des valeurs convenables aux conſtantes indéterminées p, q, r on changera, par les ſubſtitutions, l'équation (F) en celle-ci

$$(L) \ldots\ldots L + \frac{1}{2} t^2 ckL + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 L = L^{(X,\,Y,\,Z)}$$

$$- \frac{1}{4} L^{(X,\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4} L^{(X,\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{4} L^{(X,\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4} L^{(X,\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X+t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X+t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X+t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X+t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X-t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X-t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X-t\sqrt{c},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X-t\sqrt{c},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8} M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8} M^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8} M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8} M^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8} N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8} N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$- \frac{1}{8}$

$$-\frac{1}{8}N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}-\frac{1}{8}N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$
$$-\frac{1}{8}N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})}-\frac{1}{8}N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})};$$

On trouvera de même les transformées (M) & (N) des deux autres équations (G) & (H), & l'on aura ainſi, en ſubſtituant, la transformée entière de la formule coſ. $t\sqrt{-c}\,k$ $\int[(x)L+(y)M+(z)N]\,dX\,dY\,dZ$, qu'on ſubſtituera enſuite dans l'équation (D).

Suppoſons, pour un moment, que les quantités (x'), (y'), (z') ſoient nulles dans cette équation, la lettre k s'en ira entiérement, & ne ſe trouvera plus que dans les expreſſions des quantités L, M, & N. Or, quoique nous ne conoiſſions point la forme de ces expreſſions, on pourra cependant vérifier l'équation indépendanment de k, comme notre méthode le demande; car pour cela il ne s'agira que de comparer enſemble les quantités qui ſe trouveront multipliées par les fonctions L, M, N qui auront des valeurs égales.

Que (X), (Y), (Z) dénotent les coordonnées qui répondent à l'expreſſion générale $L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, on aura, ſelon notre hipothèſe, $(X)=X+pt$, $(Y)=Y+qt$, $(Z)=Z+rt$; X, Y, Z étant les coordonnées, qui répondent à l'expreſſion L ſimplement, & aux quantités x, y, z, (x), (y), (z). Suppoſons donc que les valeurs de (X), (Y), (Z) ſoient diminuées des quantités pt, qt, rt, (ce qui eſt permis, puiſque ces quantités ſont conſtantes à l'égard des intégrations indiquées dans l'équation) elles deviendront X, Y, Z; mais en même tems les coordonnées correſpondantes à (x), (y), (z), & qui étoient auparavant X, Y, Z, deviendront $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$. De cette manière toutes les quantités exprimées généralement par $L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, $M^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$ $N^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, redeviendront

dront $L^{(X, Y, Z)}$, $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$, ou simplement L, M, N; mais à leur tour les quantités (x), (y), (z), qui les multiplient, se changeront en $(x)^{(X-pt,\, Y-qt,\, Z-rt)}$, $(y)^{(X-pt,\, Y-qt,\, Z-rt)}$, $(z)^{(X-pt,\, Y-qt,\, Z-rt)}$.

Après ces transformations on joignera ensemble tous les termes de l'équation qui se trouvent multipliés par L, M, N, & on décomposera ensuite cette équation en trois portions, dont chacune devra se vérifier séparément, & indépendamment des valeurs de L, M, & N. On aura donc par là

(P) . . . . $x = (x)^{(X, Y, Z)}$

$$-\frac{1}{4}(x)^{(X,\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4}(x)^{(X,\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{4}(x)^{(X,\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4}(x)^{(X,\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z,\, +t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X-t\sqrt{c},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X-t\sqrt{c},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X-t\sqrt{c},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{4}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X-t\sqrt{c},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X+t\sqrt{c},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X+t\sqrt{c},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(x)^{(X+t\sqrt{c},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X+t\sqrt{c},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(y)^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(y)^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(y)^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}}} + \frac{1}{8}(y)^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{8}(y)^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8}(y)^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{8}(y)^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8}(y)^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}(z)^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8}(z)^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+\frac{1}{8}(z)^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8}(z)^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$+\frac{1}{8}$

$$- \frac{1}{8} (z)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})} - \frac{1}{8} (z)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} (z)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})} - \frac{1}{8} (z)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})}.$$

On aura de même, pour les valeurs de y & de z, deux autres formules que je nommerai (Q) & (R), & que je m'abſtiens de rapporter, puiſque on peut les déduire de la précédente en changeant ſimplément, x, (x), X en y, (y), Y pour la formule (Q), & en z, (z), Z pour la formule (R), & réciproquement.

Ce ſont là les valeurs de x, y, z dans l'hipothèſe que (x'), (y'), &(z') ſoient nulles. Suppoſons maintenant que ces quantités aient une valeur, mais qu'en même tems les (x), (y), & (z) ſoient nulles; il eſt clair que dans l'équation (D) on aura, à la place du terme $\text{coſ.}\, t\sqrt{-ck}$ $\int [(x) L + (y) M + (z) N] \, dX dY dZ$, l'autre terme

$$\frac{\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int [(x') L + (y') M + (z') N] \, dX dY dZ;$$

Or ſi l'on fait attention que ſin. $\dfrac{\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} = \int \text{coſ.}\, t\sqrt{-ck}\, dt$, il ne ſera pas difficile d'appercevoir que les expreſſions de L, M, & N qui ſe trouveront en faiſant diſparoître la la lettre k ne ſeront que les intégrales de celles qu'on a trouvé plus haut, priſes en regardant t ſeul comme variable. Ainſi un terme quelconque de la transformée ſera repréſenté par $\int [(x') \int L^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)} \, dt] \, dX dY dZ$; or il eſt viſible que l' intégration ſuivant t, dans l'expreſſion $\int L^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)} \, dt$, ſe réduit à trois intégrations, ſuivant X, Y, Z; d'où il s' enſuit que l' intégrale de $[(x') \int L^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)} \, dt] \, dX dY dZ$ pourra ſe transformér, par des intégrations par parties, en celle-ci $- \int [L^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)} \int (x') \, dt] \, dX dY dZ$, qui pourra encore ſe mettre ſous cette autre forme $\int [L^{(X, Y, Z)} \int (x')^{(X - pt,\, Y - qt,\, Z - rt)} \, dt] \, dX dY dZ$,

où

où l'intégrale de $(x')^{(X-pt,\, Y-qt,\, Z-rt)}$ devra être priſe en faiſant varier t dans les valeurs $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$ des coordonnées de (x').

Faiſant des obſervations & des réductions ſemblables ſur tous les autres termes, & comparant enſuite les quantités L, M, & N entr'elles, on trouvera pour x, y, z des formules qui ne différeront de celles qu'on a trouvé ci-deſſus, qu'en ce qu'à la place des quantités (x), (y), (z) il y aura les quantités intégrales $\int (x')\,dt$, $\int (y')\,dt$, $\int (z')\,dt$.

Il eſt maintenant facile de voir, en examinant l'équation (D), que les deux ſolutions particulières, qui vienent d'être trouvées, renferment la ſolution générale, & qu'il ne faudra qu'ajouter enſemble les expreſſions trouvées de x, y, z dans les cas, où (x'), (y'), (z'), ou (x), (y), (z) ſont nulles, pour avoir les expreſſions completes pour le cas où ces quantités ſont toutes réelles.

De plus, comme l'équation (E) n'eſt que la différentielle de l'équation (D) priſe en variant t ſeul, on aura tout d'un coup les valeurs de viteſſes, en différentiant les formules qu'on vient de trouver pour les valeurs des eſpaces x, y, z; il viendra donc

$$(P') \quad \ldots\ldots\ldots \quad x' = (x')^{(X,\, Y,\, Z)}$$

$$-\frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$-\frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X-t\sqrt{c},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+\frac{1}{8}$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X - t\sqrt{c},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X - t\sqrt{c},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X - t\sqrt{c},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X + t\sqrt{c},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X + t\sqrt{c},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X + t\sqrt{c},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right](X + t\sqrt{c},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$- \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$- \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$- \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$- \frac{1}{8}\left[(y') + \frac{d\cdot(y)}{dt}\right](X + t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Z + t\sqrt{\tfrac{c}{6}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(z') + \frac{d\cdot(z)}{dt}\right](X - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y - t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{2}})$$

$$+ \frac{1}{8}\left[(z') + \frac{d\cdot(z)}{dt}\right](X - t\sqrt{\tfrac{c}{2}},\ Y + t\sqrt{\tfrac{c}{6}},\ Z - t\sqrt{\tfrac{c}{2}})$$

$$+ \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right]^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right]^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(z) + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})}.$$

Les valeurs de y' & de z' se trouveront de même en substituant dans cette formule à la place de x', (x), (x'), X, leurs correspondantes y', (y), (y'), Y, ou z', (z), (z'), Z, & réciproquement.

48. Voila des formules très-générales, par lesquelles, connoissant dans un instant quelconque le mouvement de toutes les parties du fluide, on pourra déterminer à très-peu-près leur mouvement dans les instans suivans, au moins pendant un intervalle de tems fort court. Or, si après ce tems on recommence le calcul, en substituant à la place de (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') les valeurs trouvées de x, y, z, x', y', z', on en tirera des nouvelles valeurs de x, y, z, x', y', z' qui serviront pour un second intervalle de tems égal au premier; & opérant ainsi de suite on pourra trouver les mouvemens du fluide par tel espace de tems qu'on voudra; mais il faut avoüer que cette méthode ne sera guere pratiquable pour un tems assès long; car, nos formules n'étant qu'approchées, l'inexactitude de chaque résultat influira nécessairement sur tous les résultats suivans, & par conséquent, plus le nombre des opérations sera grand, plus aussi on risquera de s'éloigner de la vérité.

Consé-

Conséquences qui résultent des formules précédentes par rapport à la propagation du Son.

49. Imaginons d'abord qu'un corps sonore n'ébranle qu'une seule particule d'air, dont la position soit déterminée par les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & voïons comment & par quels dégrès cet ébranlement unique se propagera au loin dans toute la masse de l'air pendant un tems quelconque t fort court.

Il est d'abord évident que dans les équations (P), (Q), (R), (P'), (Q'), (R') il faudra regarder comme nulles toutes les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), qui auront un autre exposant que $([X], [Y], [Z])$; or soit en général l'exposant de chacune de ces quantités exprimé par $(X - pt, Y - qt, Z - rt)$, il suit de ce qu'on vient de dire, que les valeurs de x, y, z, x', y', z' seront aussi nulles pour toutes les particules, dont la position ne sera point déterminée par des coordonnées X, Y, Z, telles que $X - pt = [X]$, $Y - pt = [Y]$, $Z - qt = [Z]$, savoir que $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$; si donc on donne successivément à p, q, r, toutes leurs valeurs particuliéres conformément à nos formules, on aura autant de valeurs de X, Y, Z, qui détermineront la position de toutes les particules de l'air qui auront quelque mouvement au bout du tems t.

Supposons p, q, r donnés, & faisons varier t; il est clair que les coordonnées X, Y, Z seront à une ligne droite qui passera par le point, auquel répondent les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & qui fera avec les lignes X, Y, Z des angles dont les cosinus seront

$\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$, $\frac{r}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$; d'où il s'ensuit qu'en donnant à p, q, r des valeurs différentes,

 on

on aura auſſi des droites de différente poſition, mais qui s' entrecouperont toutes dans un même point, & qu'on pourra par conſéquent regarder comme autant de rayons ſonores, excités par l' ébranlement donné de la particule qui eſt à leur centre.

Ces rayons croîtront uniformément avec le tems, de ſorte qu'au bout d'un tems quelconque t leur longueur ſera généralement exprimée par $t \sqrt{c\,(p^2 + q^2 + r^2)}$; l'on aura donc, pour la viteſſe de la propagation du Son dans chacun d'eux, la formule $\sqrt{c\,(p^2 + q^2 + r^2)}$, dont la valeur ſe connoîtra en ſubſtituant au lieu de p, q, r leurs valeurs particuliéres. Par ces ſubſtitutions on aura les trois quantités ſuivantes, $\sqrt{c\,(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c\,(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6})} = 2\sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{3c}{6}}$; qui conſtitueront pour ainſi dire autant d' eſpèces différentes de rayons ſonores.

C' eſt une choſe digne de remarque que la plus grande viteſſe $2\sqrt{\frac{c}{3}}$ approche beaucoup de celle qu'on trouve par l' expérience; car $\sqrt{c}$ étant environ $= 979$ piés, & $c = 958441$, on aura $\sqrt{\frac{c}{3}} = 565$, & par conſéquent $2\sqrt{\frac{c}{3}} = 1130$, qui eſt à très-peu-près le nombre de pieds que le Son parcourt dans une ſeconde, ſelon les expériences moïennes. Cependant il ne paroit pas que ce réſultat ſoit encore capable de mettre la Théorie d' accord avec l' expérience ſur la viteſſe de la propagation du Son. Voici les raiſons qui m' oblige à ſuſpendre mon jugement la-deſſus. 1° Nos formules ne ſont qu'approchées, & ne peuvent avoir lieu que pendant un tems aſsès court, après lequel chaque particule mobile doit être regardée, comme un nouveau centre de rayons ſonores; 2° La poſition de chaque rayon n' eſt pas fixe, puiſque elle dépand de celles des trois axes principaux, laquelle eſt abſolument arbitraire; d' où il ſuit qu'en changeant la poſition des axes, les rayons qui avoient auparavant une viteſſe donnée,

pourront

pourront prendre la place de ceux qui avoient des viteſſes différentes ; ce qui paroit renfermer une eſpèce de contradiction, puiſque une même particule de fluide pourroit en ce cas avoir ou ne pas avoir du mouvement. Cet inconvénient, qui vient ſans doute de ce que nos formules ne renferment pas tous les termes néceſſaires, ſera auſſi attaché à toutes les autres formules qu'on trouvera par approximation; d'où il réſulte que, juſqu'à ce qu'on ait trouvé des formules tout-à-fait exactes & rigoureuſes, on ne ſera pas en état de prononcer ſur le point dont il s'agit; 3° Nous avons trouvé dans les deux hypothèſes du *Chap.* III. la viteſſe du Son $= \sqrt{c}$; & cette même valeur peut ſe trouver auſſi par les formules de ce *Chap.* en conſidérant la plus grande viteſſe des rayons eſtimée ſuivant la direction de chacun des trois axes; ce qui paroit mieux quadrer avec la nature particuliére de ces formules.

50. Nous n'avons encore conſidéré que l'effet qui réſulte de l'ébranlement d'une ſeule particule d'air ; ſuppoſons maintenant, que tant des particules qu'on voudra ſoient ébranlées d'une maniére quelconque dans le premier inſtant du tems t ; on trouvera, en raiſonnant ſur nos formules de la même maniére qu'on a fait ci-deſſus, que chacun des ébranlemens primitifs, excitera dans le fluide environnant les mêmes rayons ſonores, que s'il étoit ſeul; de ſorte que les particules d'air qui ſe trouveront dans la rencontre de pluſieurs rayons auront un mouvement compoſé de tous les mouvemens, qui dépandront de chaque ondulation particuliére. C'eſt ce qui nous fournit une explication complete & rigoureuſe de la maniére, dont pluſieurs ſons différens peuvent coéxiſter & ſe repandre dans une même maſſe d'air, ſans ſe nuire mutuellement les uns aux autres. *Voïés l'Art.* 63. *des Réch. préc.*

Au reſte, comme chaque particule d'air ébranlée devient

elle

elle même un centre de rayons ſonores, il eſt évident que le Son doit ſe repandre également en tous ſens; ce qui eſt auſſi un des principaux phénomènes de ſa propagation.

51. Quoique il ne ſoit pas néceſſaire de connoître la nature particuliére de chaque ébranlement, il eſt cependant bon de faire attention à la différence qui ſe trouve entre les ébranlemens primitifs & dérivatifs, par rapport à leur propagation. Suppoſons pour cela qu'aïant déduit de nos formules les valeurs de x, y, z, &c. pour un tems quelconque déſigné par (t), on les ſubſtitue dans les mêmes formules à la place de (x), (y), (z) &c. pour trouver les valeurs correſpondantes de x, y, z &c. pour un ſecond intervalle, de tems marqué par t; & ſoit par exemple $\alpha\,[(x) + \int (x')\,dt]^{(X+p(t),\,Y+q(t),\,Z+r(t))}$ un terme quelconque de la valeur de x, &

$$\alpha\,[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+p(t),\,Y+q(t),\,Z+r(t))}$$ le terme

correſpondant de la valeur de x', leſquels doivent être ſubſtitués au lieu de (x), & de (x') dans les termes de la forme de $\alpha\,[(x) + \int (x')\,dt]^{(X+pt,\,+Yqt,\,Z+rt)}$ pour la valeur de x, & dans ceux de la forme de

$$\alpha\,[(x') + \frac{d\,(x)}{dt}]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$$ pour la valeur

de x'. On remarquera d'abord que dans nos formules un terme quelconque, dont l'expoſant eſt $(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)$ eſt toujours accompagné d'un autre terme exprimé de la même maniére, mais avec l'expoſant $(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)$; on ſait de plus, par ce qui a été dit ci-deſſus que les termes

$$[(x) + \int (x')\,dt]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)},$$
$$[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$$

marquent la propagation des ébranlemens (x), (x') ſuivant

vant une ligne qui fait, avec les trois axes principaux des angles, dont les cosinus sont $\frac{p}{\surd(p^2+q^2+r^2)}$, $\frac{q}{\surd(p^2+q^2+r^2)}$, $\frac{r}{\surd(p^2+q^2+r^2)}$, d'où il s'ensuit que les termes

$$[(x) + \int(x')\,dt]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)},$$

$$[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)}$$ dénoteront

la propagation des mêmes ébranlemens (x), & (x') dans la même ligne prolongée du côté opposé. Or, cela posé, je dis, que si Cc (*fig.* 12.) représente un rayon de la propagation d'un ébranlement primitif excité en C, la propagation de l'ébranlement dérivatif qui est en c sera nulle suivant la direction cC opposée à celle de son ébranlement primitif. Pour le prouver, il n'y a qu'à faire voir qu'en substituant

$\alpha[(x) + \int(x')\,dt]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$ au lieu de (x)

& $\alpha[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+pt,\ Y+qt,\ Z+rt)}$ au lieu de (x')

dans les termes

$$[(x) + \int(x')\,dt]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)}$$

$$[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X-pt,\ Y-qt,\ Z-rt)}$$ ces termes

deviendront nuls. Or, comme dans les exposans $X - pt$, $Y - qt$, $Z - rt$, le tems t est négatif par rapport aux coordonnées X, Y, Z, il est visible, que l'intégrale $\int(x)\,dt$, & la différentielle $\frac{d\cdot(x)}{dt}$ seront aussi nécessairement négatives ; d'où l'on aura par la substitution $[(x) - \int(x')\,dt] = \alpha[(x) + \int(x')\,dt - \int(x')\,dt - (x)] = 0$, & de même $[(x') - \frac{d\cdot(x)}{dt}] = \alpha[(x) + \frac{d\cdot(x)}{dt} - \frac{d\cdot(x)}{dt} - x'] = 0$, donc &c.

Au reſte la remarque que nous venons de faire ſur les formules générales de ce Chap., eſt entiérement analogue à celle qu'on a déja fait ſur les formules particuliéres du Chap. III. dans l'art. 16., remarque dont nous ſommes rédévables à M. Euler, & qui eſt d'une grande importance dans la Théorie de la propagation du Son.

52. Il ne nous reſte plus qu'à examiner le changement qui doit arriver aux rayons ſonores par la rencontre d'un obſtacle quelconque, qui s'oppoſe entiérement, ou en partie au mouvement des particules contigues de l'air. Pour cela il n'y a qu'à chercher quelle devra être la poſition d'une particule mobile quelconque, lorſque les coordonnées $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$ tomberont au delà de l'obſtacle immobile. Or en examinant les calculs de *l'Art.* 47. on voit que les valeurs des X, Y, Z pour une particule quelconque mobile ſont les mêmes que celles qui conſtituent les fonctions $L^{(X, Y, Z)}$, $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$; donc tout ſe réduit à examiner la nature de ces fonctions, & à voir de quelle maniére il faudra les transformer, afin que les quantités X, Y, Z ne ſurpaſſent jamais des valeurs données.

Imaginons donc que la maſſe de l'air ſoit interrompuë de quelque côté, & comme terminée par une eſpèce de parois immobile de figure donnée; il eſt conſtant par ce qui a été enſeigné dans *l'Art.* 45. que les expreſſions intégrales à deux ſeules changeantes, que nous avons traité comme nulles dans *l'Art. cité*, devront diſparoître par elles mêmes, en tant qu'elles ſe rapporteront à un point quelconque de la figure propoſée. Rapellons-nous ces expreſſions négligées dans les calculs précédens, & conſidérons d'abord celles qui ont le ſigne $-$; je dis que leur ſomme eſt toujours évanoüiſſante, quelle que ſoit la figure à quelle il faille les rapporter. Pour le prouver ajoutons-les enſemble; on aura

$\int(dL$

$\int\left(\frac{dL}{dX}+\frac{dM}{dY}+\frac{dN}{dZ}\right)\times(x\,dYdZ+y\,dYdZ+z\,dXdY)$.
Or ſoit le rapport entre les trois coordonnées X, Y, Z exprimé par l'équation $dZ = PdX + QdY$; il eſt aiſé de prouver qu'on peut ramener tous les termes de l'expreſſion précédente à la variabilité des ſeules coordonnées X, Y, en ſubſtituant au lieu de dZ, PdX dans le produit $dYdZ$, & QdY dans le produit $dXdZ$; d'où l'on aura la transformée $\int\left(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dY}+\frac{dN}{dZ}\right)\times(xP+yQ+z)$ $dXdY$ qu'il faudra maintenant intégrer en faiſant varier X & Y l'une après l'autre. Mais x, y, z dénotant les eſpaces parcourus par une même particule ſuivant les directions des trois coordonnées X, Y, Z, il n'eſt pas difficile de voir que $\frac{xP+yQ+z}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ dénotera l'eſpace que cette même particule décrira ſuivant une direction perpendiculaire à la ſurface dont l'équation eſt $dZ = PdX + QdX$; or il eſt clair, que dans notre cas, cet eſpace doit être nul, puiſque le mouvement eſt entiérement arrêté ſuivant la direction perpendiculaire à chaque point de la paroi immobile; donc on aura $\frac{xP+yQ+z}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} = 0$; & par conſéquent $xP + yQ + z = 0$.

Joignant enſemble les autres formules qui ont le ſigne $+$; on aura l'expreſſion $\int\left(\frac{dx}{dX}+\frac{dY}{dY}+\frac{dZ}{dZ}\right)\times(LdYdZ$ $+ MdXdZ + NdXdY)$ qui doit auſſi être $= 0$, en tant qu'elle ſe rapporte à chacun des points de la ſurface exprimée par $dZ = PdX + QdY$. Or le facteur $LdYdZ + MdXdZ + NdXdY$ ſe réduira, de la même façon que ci-deſſus, à $(LP + MQ + N)\,dXdY$, d'où l'on tirera l'équation $LP + MQ + N = 0$, qui devra avoir lieu pour tous les points de la ſurface propoſée; & cette équa-

tion renfermera en général les conditions que doivent avoir les valeurs de L, M, N. (*Voïés ci-dessus art.* 45.).

Supposons maintenant, pour simplifier les choses, $P = 0$ & $Q = 0$, de sorte que la paroi immobile soit un plan perpendiculaire à l'axe des Z; l'équation trouvée se réduira à $N = 0$; ou bien, si on veut que le plan donné soit perpendiculaire à l'axe des X, & que sa distance au point de l'origine des abscisses soit $= a$, on aura $L = 0$, X étant $= a$, & Y & Z étant quelconques; ce qui s'exprimera à notre maniére par $L^{(a, Y, Z)} = 0$. Or, si dans l'expression générale $L^{(X, Y, Z)}$ on suppose que X surpasse a d'une quantité infiniment petite u, de sorte que $X = a + u$, on aura $L^{(X, Y, Z)} = L^{(a + u, Y, Z)} = L^{(a, Y, Z)} + u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$ à très-peu-près, $= u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; de même, si on suppose u négative, on aura $L^{(a - u, Y, Z)} = - u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; d'où je tire $L^{(a - u, Y, Z)} = - L^{(a - u, Y, Z)}$; & remettant pour u sa valeur $X - a$, $L^{(X, Y, Z)} = - L^{(2a - X, Y, Z)}$.

Maintenant, comme les fonctions $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$ doivent avoir un certain rapport avec la fonction $L^{(X, Y, Z)}$, en vertu des équations (A), (B), (C), il est clair que la même condition de $L^{(a, Y, Z)} = 0$ servira aussi à trouver les transformations qui conviennent aux fonctions M & N, lorsque X est supposé plus grand que a; pour y parvenir je reprens les équations mentionnées, & comparant la première, differentiée suivant la variable Y & divisée par dY, à la seconde, differentiée suivant la variable X & divisée par dX, je trouve $\frac{dL}{dY} = \frac{dM}{dX}$; & de même comparant la première, differentiée suivant Z, & divisée par dZ à la troisiéme, differentiée suivant X, & divisée par dX, j'ai

$\frac{dL}{dZ}$

$\frac{dL}{dZ} = \frac{dN}{dX}$; posons dans ces deux équations $X = a$, de sorte que $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dY} = \frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX}$, & $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dZ} = \frac{dN^{(a,Y,Z)}}{dX}$; or aïant en général $L^{(a,Y,Z)} = 0$, on aura aussi $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dY} = 0$, & $\frac{dL^{(a,Y,Z)}}{dZ} = 0$; donc, $\frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$, & $\frac{dN^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$; Supposons maintenant dans les fonctions indéterminées $M^{(X,Y,Z)}$, $N^{(X,Y,Z)}$, $X = a + u$, & développons-les, en poussant les series jusqu'aux infinimens petits du second ordre; on aura $M^{(a+u,Y,Z)} = M^{(a,Y,Z)} + u\frac{d \cdot M^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 \cdot M^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$, & $N^{(a+u,Y,Z)} = N^{(a,Y,Z)} + u\frac{d \cdot N^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 N^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$; & de même, en prenant u négativement, $M^{(a-u,Y,Z)} = M^{(a,Y,Z)} - u\frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 M^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$, & $N^{(a-u,Y,Z)} = N^{(a,Y,Z)} - u\frac{d \cdot N^{(a,Y,Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2 N^{(a,Y,Z)}}{dX^2}$; d'où l'on déduit, à cause de $\frac{dM^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$, & $\frac{dN^{(a,Y,Z)}}{dX} = 0$ par hipothèse, $M^{(a+u,Y,Z)} = M^{(a-u,Y,Z)}$, & $N^{(a+u,Y,Z)} = N^{(a-u,Y,Z)}$, ou bien, restituant pour u sa valeur $X - a$,

$$M^{(X,Y,Z)} = M^{(2a-X,Y,Z)}$$
$$N^{(X,Y,Z)} = N^{(2a-X,Y,Z)}$$

Soient reprises maintenant les formules (D), (E), & supposant que X surpasse a d'une quantité infiniment petite, on commencera par changer l'expression $L^{(X,Y,Z)}$ des termes xL, $x'L$, ou ce qui est la même chose, des termes $xL^{(X,Y,Z)}$, $x'L^{(X,Y,Z)}$ en $-L^{(2a-X,Y,Z)}$, lorsque

X deviendra plus grand que a, & l'on aura par conféquent ces termes transformés en $-x\,L^{(2a-X,\,Y,\,Z)}$, $-x'\,L^{(2a-X,Y,Z)}$, fur lefquels on opérera comme auparavant, pour en tirer les valeurs de x & x'. Or, puifque les coordonnées qui répondent à x & x' font les mêmes, que celles qui entrent dans l'expreffion de L, il eft clair que, fans autre opération, il fuffira de changer la valeur X de l'abfciffe de x & x' en $2a - X$, en rendant en même tems ces quantités x & x' négatives. On changera de même les expreffions $M^{(X,\,Y,\,Z)}$, $N^{(X,\,Y,\,Z)}$ qui entrent dans les termes My, My', & Nz, Nz' des mêmes formules (D), (E), en $M^{(2a-X,\,Y,\,Z)}$ & $N^{(2a-X,\,Y,\,Z)}$, & par un raifonnement femblable au précédent, on trouvera que l'abfciffe X en tant qu'elle répond aux autres quantités y, y', z, z' deviendra de même $2a - X$, mais fans que la valeur de ces quantités foit changée.

On conclura donc pour notre cas, que, lorfque le tems t fera tel, que l'abfciffe $[X] + pt$ furpaffera a, il faudra mettre à fa place l'abfciffe $2a - [X] - pt$, & faire en même tems l'efpace x négatif, laiffant les mêmes les deux coordonnées $[Y] + pt$, & $[Z] + qt$, & les deux autres efpaces y, z.

Voici maintenant le changement qu'il en réfultera dans les rayons fonores. Que CA (*fig.* 13.) repréfente l'axe des X, qui eft le même que celui des $[X]$, & qui rencontre perpendiculairement le plan inébranlable AB; que C foit un centre de rayons fonores déterminé par les trois coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$; & que CD foit un de ces rayons quelconque déterminé par les coordonnées $[X] + pt$, $[Y] + qt$, $[Z] + rt$. Suppofons maintenant que t foit augmenté en forte, que $[X] + pt$ furpaffe a, c'eft-à-dire que pt furpaffe CA, & foit par exemple $= CA'$, le point A' tombant derriére l'obftacle immobile AB; il faudra, fuivant ce que nous venons d'enfeigner, changer

ger la valeur de $[X] + pt$ en $2a - [X] - pt$; ce qui donnera, en ſuppoſant $CA = \alpha$ & par conſéquent $a = [X] + \alpha$, $[X] + 2\alpha - pt$ au lieu de $[X] + pt$; ou bien, poſant $AA' = \theta$ & par conſéquent $pt = \alpha + \theta$, $[X] + \alpha - \theta$ au lieu de $[X] + pt$, ſavoir de $[X] + \alpha + \theta$; d' où l' on voit que le point A' ſera tranſporté en A, les diſtances AA' & $A'A$ au plan AB étant égales de part & d' autre; donc, comme les deux autres coordonnées perpendiculaires à l'axe CA demeurent les mêmes, le rayon CD ſera continué du côté CA dans la direction de la droite DE, dont la poſition devra être telle qu'elle ſe trouve dans le plan des deux lignes CD, CA, & qu'elle faſſe de plus avec le plan BA l' angle BDE égal à l' angle CDA. Le rayon CD ſera donc réfléchi par le plan BA; en ſorte que l'angle de réflexion ſoit égal à l'angle d'incidence, tout de même que il arrive à un corps parfaitement élaſtique.

Voilà donc la réflexion du Son, déduite de ſes vrais principes, & prouvée d'une maniére rigoureuſe & exacte, ce que perſonne n' avoit encore fait. *Voïés ce que j' ai dit ſur ce ſujet Art. 61. des Rech. préc.*

Au reſte, ſi nous n'avons conſidéré qu'une ſurface plane, ce n'a été que pour rendre notre calcul moins embarraſſant; car il n' auroit pas été difficile de l' appliquer auſſi à des ſurfaces courbes d' une nature quelconque; mais, comme les rayons ſonores ſe multiplient continuellement, & ſe repandent en tout ſens, comme on l'a fait voir (*Art.* 50.), il ſeroit aſsès inutile de déterminer les loix de la réflexion de chaque rayon à la rencontre d' un obſtacle de figure quelconque. Il ſuffit pour l' explication des *Echos*, d'avoir prouvé que cette réflexion doit toujours avoir lieu, lorſque l' air eſt appuïé ſur un obſtacle quelconque inébranlable.

SCOLIE I.

53. Il eſt viſible que, dans les formules (P), (Q), (R), (P'), (Q'), (R'), on peut regarder les expreſſions $(x)^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}$ &c. comme des fonctions indéterminées de $X+pt$, $Y+qt$, $Z+rt$; de ſorte qu'en ſubſtituant pour (x), (x'), (y), (y'), (z), (z') des fonctions de différente nature, & compoſées des mêmes variables qui conſtituent l'expoſant de chacune des quantités (x), (x') &c., on aura les valeurs de x, x', y &c. données en fonctions indéterminées, ainſi que M. D'Alembert l'a pratiqué le premier dans la Théorie des vibrations des cordes, & ailleurs.

Au reſte pour démontrer que ces valeurs de x, y, z ſatisfont aux trois équations de *l'Art.* 10., il faudra néceſſairement regarder t comme infiniment petit, & développer les fonctions indéterminées comme on l'a pratiqué à l'égard des fonctions L, M, N (*Art.* 47. *ci-deſſus*), en négligeant tous les termes qui ſeront multipliés par des puiſſances de t plus hautes que la quatriéme.

SCOLIE II.

34. Si on vouloit ſe borner à chercher les valeurs de x, y, z par les ſeries, on y parviendroit fort aiſément par les principes de *l'Art.* 47. Car développant en ſuites infinies les expreſſions coſ. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ de l'équation (D), & faiſant enſuite évanoüir toutes les puiſſances de k, par les transformations enſeignées dans le même *Art.*, on obtiendra une équation qui ne renfermera que les fonctions inconnues L, M, N avec leurs différences; or ces différences pourront toujours ſe réduire aux quantités finies L, M, N par les opérations connues des inté-

grations par parties. Car, ſoit par exemple $\frac{1}{2} t^2 c \int (x) \frac{d^2 L}{d X^2}$ $dXdYdZ$ un terme quelconque de l'équation (D), tranſformée comme nous venons de la dire, ce terme ſe réduira, en négligeant toujours les intégrales à deux ſeules changeantes, à $\frac{1}{2} t^2 c \int \frac{d^2 (x)}{d X^2} L\, dXdYdZ$, & généralement il ſuffira d'ôter les différentiations aux quantités L, M, N, & de les appliquer aux quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), par leſquelles celles-là ſont multipliées. Cela fait, comme l'équation ne renfermera plus que les fonctions finies L, M, N, qui, à cauſe de la quantité k qu'elles contiennent, ne doivent point entrer dans les valeurs de x, y, z, on trouvera ces valeurs, en comparant enſemble tous les termes qui ſeront multipliés ſéparément par L, M, N. On aura donc par là

$$x = (x) + t(x') + \frac{1}{2} t^2 c \left[\frac{d^2 (x)}{d X^2} + \frac{d^2 (y)}{dXdY} + \frac{d^2 (z)}{dXdZ}\right] + \&c.$$
$$y = (y) + t(y') + \quad \&c.$$
$$z = (z) + t(z') + \quad \&c.$$

où les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') devront être regardées comme des fonctions indéterminées des trois variables X, Y, Z, pour qu'on puiſſe avoir les valeurs des différences $\frac{d^2 (x)}{d X^2}$, $\frac{d^2 (y)}{dXdY}$ &c. Or dans le cas où t eſt ſuppoſé infiniment petit, ſi on néglige les termes multipliés par des puiſſances de t plus hautes que la quatriéme, & qu'on pratique enſuite ſur les fonctions (x), (y), &c. des réductions analogues à celles qui ont été pratiquées ſur les fonctions L, M, N dans le calcul de *l'Art.* 47. il ſera aiſé de réduire les expreſſions de x, y, z à des fonctions de $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, comme dans le Scolie précédent, ce qui ſera une preuve de la juſteſſe de nos calculs.

Au

Au reste la méthode, que nous n' avons fait qu'indiquer dans ce Scolie, est générale & peut aussi être appliquée à la résolution d'une infinité d' autres équations de la nature de celles que nous avons examiné dans tout le cours des Recherches précédentes. Mais on trouvera toujours des séries composées de puissances croissantes de t, & qui, par conséquent, ne seront bonnes que tant t aura des valeurs fort-petites.

§. III.

Conjectures sur la loi de l'élasticité des particules de l'air.

55. Nous avons vu que la vitesse du Son, suivant la Théorie, est exprimée par $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{2hE}}{T^2 D}$, & nous avons vu aussi qu'elle différe de la véritable d'environ 163 pieds par seconde, quantité qui ne peut raisonnablement être négligée; comment donc concilier sur ce point la Théorie & l' Expérience?

L'expression $\frac{\sqrt{2hE}}{T^2 D}$ est fondée sur l' hypothêse ordinaire que l' élasticité des parties de l'air soit exactement proportionnelle à leur densité; mais ne pourroit-on pas supposer que l' élasticité variât dans uue autre raison peu différente de celle de la densité simple. Si on vouloit en général supposer E proportionel à φD, comme dans *l'Art.* 11., il n' y auroit qu'à mettre dans nos calculs $E \varphi' D$ au lieu de E tout le reste demeurant le même; ce qui ne produiroit d' autre différence dans les résultats, si non que la vitesse du Son seroit augmentée dans la raison de $\sqrt{\varphi' D} : 1$.

Soit l' élasticité proportionnelle à une puissance quelconque m de la densité, ce qui paroit le cas le plus naturel; on

on aura $\varphi D = D^m$ & $\varphi' D = m D^{m-1}$; d'où, en posant $D = 1$, l'on tire la viteſſe du Son $= \sqrt{m} \times \sqrt{c} = 979 \sqrt{m}$ piés par ſeconde; par conſéquent, en prenant 1142 piés par ſeconde pour l' expreſſion véritable de cette viteſſe, il faudra que $979 \sqrt{m} = 1142$, ce qui donnera $\sqrt{m} = \frac{1142}{979}$ & $m = 1 \cdot 3' 6''$ en fractions décimales, ou $m = 1 + \frac{1}{3}$ à très-peu-près. Or, comme l' élaſticité ſe meſure par le poid comprimant, il eſt clair que ſi cette hypothèſe a lieu dans la nature, il faudra que la denſité devenant double, triple, quadruple &c., les poids comprimans croiſſent comme les nombres $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{4}$ &c. qui ſurpaſſent les nombres de la progreſſion aritméthique 2, 3, 4 &c. d' environ $\frac{518}{1000}$, $1\,\frac{326}{1000}$, $1\,\frac{848}{1000}$.

Ces différences paroiſſent à la vérité trop fortes, pour qu'on puiſſe raiſonablement ſuppoſer qu'elles ayent échappées aux ſavans Phiſiciens, qui ont déterminé par l' expérience les loix de la compreſſion de l'air; auſſi je ne donne l' hypothèſe de l' élaſticité proportionelle à $D^{1 + \frac{1}{3}}$, que comme une légére conjecture, & je me contenterai ſeulement de faire obſerver, que l'expérience même paroit juſqu'à un certain point favorable à la ſuppoſition, que l'élaſticité croiſſe dans une raiſon plus grande que la denſité; puiſque on ſait que de très-habiles Phiſiciens ont trouvé que, lorſque la denſité eſt devenue quadruple de la naturelle, l'air ne ſe comprime plus que ſuivant une proportion moindre que celle des poids.

56. Au reſte il eſt clair que ſi l' hypothèſe $P = D$, & en général $P = D^m$ avoit exactement lieu dans la nature, la denſité d'une particule d'air deviendroit nulle, lorſque le poid comprimant ſeroit nul, ce qui paroit renfermer quelque eſpèce de contradiction; ſi donc, pour éviter un pareil inconvénient, on ſuppoſe que le poid comprimant ſoit pro-

portionel à quelque autre fonction φ de la densité, on satisfaira tout-à-la-fois à la Théorie de la propagation du Son, & aux expériences de la compression de l' air, si on peut déterminer φ en sorte que $\varphi' D$ soit (en y mettant $D = 1$) $= 1 + \frac{1}{3}$, & qu'en même tems φD soit assès sensiblement proportionel à D, tant que D est contenu entre les limites 1 & 4.

CHAPITRE VI.

Reflexions sur la Théorie des instrumens à vent.

57. DAns *l' Art.* 52. *des Rech. préc.* j' ai réduit la Théorie des flutes à celle des oscillations d'une fibre élastique d' air, dont les deux extrémités soient fixes, comme dans les cordes sonores; mais cette supposition n' est pas exacte; car on sait que l' air renfermé dans le tuïau communique toujours avec l' air extérieur, ou de deux côtés, comme dans toutes les espèces de flutes, ou d' un côté seulement comme dans les trompettes, les cors de chasse, & dans les tuïaux d' orgue bouchés; je vais donc maintenant avoir égard à ces circonstances.

Considérons d' abord des flutes de forme exactement cilindrique, & supposons que la colonne d'air qui y est renfermée soit soutenue, à ses deux extrémités, par une force égale au ressort naturel de l' air extérieur.

Dénotant par z les excursions longitudinales de chaque partie d' air, on aura l' équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dx^2}$; d' où il sera aisé de tirer par le Prob. 1. ci-dessus, les mêmes résultats que dans *l' Art. cité*, en supposant, comme on l' a pratiqué partout ailleurs, z nul, lorsque $x = 0$, & $x = a$, a étant ici la longueur entière de la flute; mais, dans le

cas

cas que nous nous propoſons d'examiner, ce n'eſt plus cette condition qui doit avoir lieu, mais il faut que l'élaſticité de la premiére & de la derniére particule ſoit la même que l'élaſticité naturelle de l'atmoſphère, ſavoir que $c\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = c$, ou bien $\frac{dz}{dx} = 0$, lorſque $x = 0$, & $x = a$. Or, puiſque dans ces deux points les deux termes $\frac{dz}{dx} M - z \frac{dM}{dx}$ doivent diſparoître d'eux mêmes, par la nature de notre méthode, (*Voïés Prob.* 1.) il faudra que la différentielle $\frac{dM}{dx}$ y devienne nulle; c'eſt pourquoi l'on aura $M = A$ coſ. $x\sqrt{-k}$, & $\sqrt{-k} = \frac{\nu\pi}{2a}$, & par conſéquent les équations

$$\int z \text{ coſ. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{coſ. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ coſ. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$+ \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V \text{ coſ. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$\int u \text{ coſ. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{coſ. } t\sqrt{-ck} \int V \text{ coſ. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$- \sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ coſ. } x\sqrt{-k}\,dx.$$

Ces équations fourniront une conſtruction à peu-près ſemblable à celle de *l'Art.* 7.; mais on pourra s'en paſſer, lorſqu'il ne ſera queſtion que de déterminer la durée commune des oſcillations des particules de l'air. Car il ſuffira pour cela de conſidérer, que les équations trouvées demeurent invariables, lorſqu'on augmente la valeur de t d'un multiple quelconque de $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; d'où il s'enſuit qu'au bout de chaque intervalle de tems $\frac{2a}{\sqrt{c}}$ les valeurs de z & de u reviendront les mêmes, & que par conſéquent toutes les particules reprendront auſſi la même ſituation, & le même mouvement; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'endroit cité des *Rech. préc.*, quoique d'après une autre hipothèſe.

Cela aura lieu en général pour toutes les valeurs possibles de ν ; mais si on suppose que les valeurs de ν soient renfermées dans la formule particuliére $\nu = m \times \mu$, m étant un nombre entier, positif & déterminé, & μ un nombre quelconque entier; il est évident, par la nature des sinus & cosinus, que les valeurs de z & de u reviendront les mêmes après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{m\sqrt{c}}$, & qu'ainsi la durée des oscillations se réduira à la moitié, au tiers, au quart &c., selon que m sera exprimé par 2, 3, 4 &c.

Or dans ce cas il est clair, que si on décrit une courbe, où les abscisses étant x, les ordonnées soient cos. $x\sqrt{-k}$, cette courbe aura autant de ventres égaux & semblables qu'il y a d'unités dans le nombre m; par conséquent les quantités Z, V, z, u qui sont multipliées par chacune de ces ordonnées devront former aussi des courbes de pareille forme; autrement le Problême demeureroit indéterminé, ou plutôt indéterminable, puisque on pourroit trouver pour z & u plusieurs valeurs différentes, ce qui seroit absurde.

On voit parlà que ce cas répond exactement à celui, que nous avons examiné dans *l'Art.* 49. *des Rech. préc.*, & qu'il contient par conséquent l'explication des Sons harmoniques.

58. Supposons maintenant que la flute soit bouchée à l'extrémité opposée à l'embouchure; puisque alors $z = 0$, x étant $= a$, le terme $z\,dM$ disparoîtra de lui même, & le terme restant $M dz$ donnera $M = 0$, d'où l'on tirera cos. $a\sqrt{-k} = 0$, & $\sqrt{-k} = (2\nu + 1)\frac{\pi}{4a}$, ν marquant un nombre quelconque entier positif, ou négatif.

Cette valeur substituée dans les deux équations de *l'Art. préc.*, on verra aisément que les termes cos. $t\sqrt{-ck}$, & sin. $t\sqrt{-ck}$ ne reprendront les mêmes valeurs, que lorsque

t ſera augmenté de $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; ce qui donnera la durée des oſcillations double de celle qu'on a trouvé dans le cas précédent.

Ce fait eſt confirmé par l'expérience, par laquelle on trouve en effet que les tuïaux bouchés donnent juſtement l'octave du ſon, qu'ils donneroient étant ouverts. Mais il y a plus; comme la durée des oſcillations ne peut s'acourcir à moins que $2\nu + 1$ ne devienne le produit de deux nombres entiers & par conſéquent impairs, il s'enſuit qu'elle ne pourra devenir que le tiers, ou la cinquiéme partie, ou &c. de la durée naturelle $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; d'où il réſulte qu'une flute bouchée, après avoir rendu le ſon fondamental, ira immédiatement à la quinte en haut de ce même ſon, & puis à la double tierce &c. ſans paſſer par aucune des octaves intermédiaires.

Voilà l'explication exacte d'un phénomène aſsès ſingulier, que M. Daniel Bernoulli a le premier fait remarquer dans *l'Art. III. de ſon Mémoire ſur les vibrations des cordes* (*Acad. de Berlin* 1753.); mais dont ni lui, ni aucun autre, que je ſache, n'avoit encore juſqu'ici rendu raiſon.

59. Lorſque les flutes n'ont pas une forme cilindrique, ou en général, lorſqu'il s'agit des trompettes & des cors de chaſſe, il ſemble qu'on pourroit tirer leur Théorie des calculs de *l'Art.* 30. *ci-deſſus*; cependant voici une difficulté.

On ſait, que ces inſtrumens, quelque figure qu'ils aient, donnent toujours, par une ſimple variation d'embouchure, tous les ſons qui répondent aux nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. & il n'eſt pas difficile de voir, en appliquant aux formules générales de *l'Art.* 28. les remarques des *Art. précéd.*, que cela demande néceſſairement que les valeurs de k ſoient 1, 2, 3, 4 &c. comme dans les flutes cilindriques. Or je ne vois point comment l'expreſſion de M de *l'Art.* 27.

Pour-

pourroit fournir des telles valeurs pour k, à moins que les coéficiens alternatifs A, C &c., ou B, D &c. ne fussent nuls, ainsi qu'on l'a déja remarqué dans *l'Art.* 32.

Au reste quels que soient les mouvemens des particules de l'air dans les instrumens à vent, ils seront toujours renfermés dans les trois équations générales de *l'Art.* 10., dont nous avons donné une construction approchée dans le *Chap. préc.* Il est vrai que cette construction ne nous apprendra rien sur la nature des vibrations des particules; mais les équations (D), & (E) font connoître que, pour ces vibrations deviennent sinchrones, il faut que toutes les valeurs de $\surd - k$ soient commensurables entr'elles, afin qu'il y ait un certain intervalle de tems, après lequel les fonctions sin. $t\surd - ck$ & cos. $t\surd - ck$ reprenant toujours les mêmes valeurs, les équations mentionnées redeviennent aussi exactement les mêmes.

Cette condition cependant n'est point nécessaire, si on suppose que les équations dont il s'agit soient vérifiées indépendanment des quantités sin. $\surd - ck$, & cos. $\surd - ck$; ce qui à lieu, lorsque chacune des intégrales $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$, $\int(x'L + y'M + z'N)\, dXdYdZ$, $\int[(x)L + (y)M + (z)N]\, dXdYdZ$, $\int[(x')L + (y')M + (z')N]\, dXdYdZ$ s'évanoüit d'elle même. Il ne sera donc pas inutile d'examiner ici quelles doivent être les valeurs de x, y, z, x', y', z' &c. pour que ces derniéres conditions aïent lieu.

60. Pour cela soient substituées au lieu de L, M, N leurs valeurs tirées des équations de condition (A), (B), (C) de *l'Art.* 45.; & faisant évanoüir par des intégrations par parties les différences de L, M, N, on aura d'abord, en négligeant les intégrales à deux seules changeantes qui sont nulles par la nature mêmes des quantités x, y, z, & des fonctions L, M, N, la transformée suivante

$\int(xL+yM+zN)\,dXdYdZ = \frac{1}{k}\int[(\frac{d^2x}{dX^2}+\frac{d^2y}{dXdY}$ $+\frac{d^2z}{dXdZ})L+(\frac{d^2y}{dY^2}+\frac{d^2x}{dYdX}+\frac{d^2z}{dYdZ})M$ $+(\frac{d^2z}{dZ^2}+\frac{d^2x}{dZdX}+\frac{d^2y}{dZdY})N]\,dXdYdZ$, où l' on voit que les quantités multipliées par L, M, N, sont les mêmes que celles qui composent les seconds membres des équations différentielles proposées; ce qui ne pourra jamais être autrement, quelque forme que puissent avoir ces équations; puisque il est clair que les nouvelles intégrations par parties, dont on fait usage ici, ne servent qu'à defaire ce qu'on avoit fait par les premiéres.

On aura donc, en posant α pour une constante quelconque, $\int[(\alpha x+\frac{d^2x}{dX^2}+\frac{d^2y}{dXdY}+\frac{d^2z}{dXdZ})L+(\alpha y$ $+\frac{d^2y}{dY}+\frac{d^2z}{dYdZ}+\frac{d^2x}{dYdX})M+(\alpha z+\frac{d^2z}{dZ^2}$ $+\frac{d^2x}{dZdX}+\frac{d^2y}{dZdY})N]\,dXdYdZ = (\alpha+k)$ $\int(xL+yM+zN)\,dXdYdZ$, & par conséquent, tant que α ne sera pas $=-k$, on satisfera à l' équation $\int(xL+yM+zN)\,dXdYdZ = 0$, en faisant séparément

$$(a) \ldots\ldots \alpha x+\frac{d^2x}{dX^2}+\frac{d^2y}{dXdY}+\frac{d^2z}{dXdZ}=0$$

$$(b) \ldots\ldots \alpha y+\frac{d^2y}{dY^2}+\frac{d^2z}{dYdZ}+\frac{d^2x}{dYdX}=0$$

$$(c) \ldots\ldots \alpha z+\frac{d^2z}{dZ^2}+\frac{d^2x}{dZdX}+\frac{d^2y}{dZdY}=0;$$

d'où l' on tirera les valeurs de x, y, z qu'on pourra exprimer généralement ainsi: $x = A\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $y = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $z = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, les lettres φ, ψ, χ marquant des fonctions variables données.

La

La conſtante A peut-être quelconque, & même une fonction du tems t qui eſt ici regardé comme conſtant, mais les autres conſtantes qui ſe trouveront dans les fonctions φ, ψ, χ devront être déterminées par les conditions qu'on ſuppoſera aux quantités x, y, z; conditions qui dépendront dans le cas préſent de la figure du tuïau qui renferme les purticules mobiles de l'air.

A' l'égard de la conſtante α, elle ſera ſuſceptible d'une infinité de valeurs, qui ſeront les mêmes préciſément que celles de la la quantité k, mais priſes négativement; ce qu'on peut démontrer en général de la maniére ſuivante. Les équations trouvées (a), (b), (c) comparées avec les équations fondamentales de *l'Art.* 10. donnent $\frac{d^2x}{dt^2} = -c\alpha x$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -c\alpha y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -c\alpha z$; d'où l'on tire l'équation $\frac{d^2s}{dt^2} = -c\alpha s$, qui comparée avec l'équation en s trouvée dans *l'Art.* 45. $\frac{d^2s}{dt^2} = kcs$ donne $-\alpha = k$, & $\alpha = -k$.

En raiſonnant & opérant de même ſur les autres formules intégrales qui doivent auſſi être $= 0$, on trouvera pour x', y', z', comme auſſi pour (x), (y), (z), & (x'), (y'), (z') des valeurs qui ne différeront de celles de x, y, z que dans la conſtante arbitraire, par laquelle les fonctions φ, ψ, χ peuvent être multipliées; on aura ainſi

$x' = B\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $y' = B\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$z' = B\chi(\alpha, X, Y, Z)$;
$(x) = E\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $(y) = E\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$(z) = E\chi(\alpha, X, Y, Z)$; &
$(x') = F\varphi(\alpha, X, Y, Z$, $(y') = F\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$(z') = F\chi(\alpha, X, Y, Z)$.

Maintenant il faut obſerver que comme les équations (a), (b); (c) ne rendent l'intégrale propoſée $= 0$ que tant

tant que α n' eſt pas $= -k$, & que d' ailleurs les équations (D) & (E) de *l'Art.* 45. doivent avoir lieu en général pour toutes les valeurs de k, il reſtera encore à vérifier ces équations dans le cas de $k = -\alpha$; or ſubſtituant dans l'équation (D) les valeurs trouvées ci-deſſus de x, y &c. il viendra $A\int[L\varphi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)]\,dX\,dY\,dZ$ $= (E \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}) \int[L\varphi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)]\,dX\,dY\,dZ$; ce qui donnera $A = E \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}$. On aura de même, par l'équation (E), $B = F \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}$, donc

$$x = [E \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\,\varphi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$y = [E \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\,\psi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$z = [E \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\,\chi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$x' = [F \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}]\,\varphi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$y' = [F \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}]\,\psi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$z' = [F \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha}]\,\chi(\alpha, X, Y, Z).$$

Il n' eſt pas difficile de voir ici, que les vibrations des particules ſeront toutes ſyncrones à celles d'une pendule ſimple, dont la longeur ſoit $= \frac{2h}{\alpha T^2 c} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{D}{E}$; par conſéquent, quelles que ſoient les valeurs de α, le fluide pourra toujours faire des oſcillations iſochrones d'autant d'eſpèces qu'il y aura de différentes valeurs de α. Au reſte ce cas eſt celui de l'iſochroniſme ordinaire, où les forces accélératrices ſont proportionelles aux eſpaces à parcourir.

 61. Sup-

61. Suppofons maintenant

$$\alpha x + \frac{d^2 x}{dX^2} + \frac{d^2 y}{dXdY} + \frac{d^2 z}{dXdZ} = p$$

$$\alpha y + \frac{d^2 y}{dY^2} + \frac{d^2 z}{dYdZ} + \frac{d^2 x}{dYdX} = q$$

$$\alpha z + \frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{d^2 x}{dZdX} + \frac{d^2 y}{dZdY} = r$$

on aura $\int(pL + qM + rN)\, dXdYdZ = (\alpha + k)$ $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$.

Donc, pour que $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$ devienne $= 0$, il fuffira de faire $\int(pL + qM + rN)\, dXdYdZ = 0$, fans qu'il foit féparément $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, comme dans les équations (a), (b), (c).

Or cette derniére formule étant femblable à la formule $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$ qui a fourni les équations (a), (b), (c); on trouvera par des pareils procédés les équations fuivantes

$$(p) \ldots \beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dXdY} + \frac{d^2 r}{dXdZ} = 0$$

$$(q) \ldots \beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dYdZ} + \frac{d^2 p}{dYdX} = 0$$

$$(r) \ldots \beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZdX} + \frac{d^2 q}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de p, q, r qui étant fubftituées ci-deffus donneront des nouvelles valeurs de x, y, z &c.

Il faut remarquer que dans la transformation de la formule $\int(pL + qM + rN)\, dXdYdZ$, on trouvera des intégrales à deux changeantes de même forme que celles qui réfultent de la formule $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$; il faudra donc les faire évanoüir, en fuppofant aux valeurs de p, q, r, les mêmes conditions qu'à celles de x, y, z; d'où il s'enfuit que, comme les équations (p), (q), (r) font d'ailleurs entiérement femblables aux équations (a), (b), (c), on aura de même $p =$

A φ

$A\varphi(\beta, X, Y, Z)$, $q = A\psi(\beta, X, Y, Z)$, $r = A\chi(\beta, X, Y, Z)$, & de plus que la quantité β aura les mêmes valeurs que la lettre $-k$.

Maintenant au lieu de ſubſtituer ces valeurs de p, q, r dans les équations en x, y, z; je multiplie ces mêmes équations telles qu'elles ſont par un coéficient indéterminé H, & j'ajoute chacune d'elles avec ſa correſpondante d'entre les trois autres (p), (q), (r), ce qui me donne

$$H\alpha x + (\beta - H)p + \frac{Hd^2x}{dX^2} + \frac{d^2p}{dX^2} + \frac{Hd^2y}{dXdY} + \frac{d^2q}{dXdY} + \frac{Hd^2z}{dXdZ} + \frac{d^2r}{dXdZ} = 0$$

$$H\alpha y + (\beta - H)q + \&c. = 0$$

$$H\alpha z + (\beta - H)r + \&c. = 0.$$

Soit donc fait $\beta - H = \alpha$; ſavoir $H = \beta - \alpha$, & ſuppoſant pour abreger $Hx + p = p'$, $Hy + q = q'$, $Hz + r = r'$ on aura

$$\alpha p' + \frac{d^2p'}{dX^2} + \frac{d^2q'}{dXdY} + \frac{d^2r'}{dXdZ} = 0$$

$$\alpha q' + \frac{d^2q'}{dY^2} + \frac{d^2r'}{dYdZ} + \frac{d^2p'}{dYdX} = 0$$

$$\alpha r' + \frac{d^2r'}{dZ^2} + \frac{d^2p'}{dZdX} + \frac{d^2q'}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera comme ci-deſſus $p' = A\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $q' = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $r' = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, A marquant une nouvelle conſtante arbitraire.

Or les conditions qui déterminent les conſtantes de p, q, r étant les mêmes que celles qui déterminent les conſtantes de x, y, z, par ce qui a été dit ci-deſſus, elles ſeront encore les mêmes pour les conſtantes de p', q', r'; d'où il s'enſuit qu'on aura auſſi pour α les mêmes valeurs que pour β, ſavoir les mêmes que celles de la quantité $-k$.

Maintenat comme $x = \frac{p' - p}{H}$, $y = \frac{q' - q}{H}$, $z = \frac{r' - r}{H}$; on aura en ſubſtituant, & prenant deux différentes conſtantes arbitraires A', A'', & marquant par α', α'' deux valeurs quelconques de $-k$;

$$x = A' \varphi(\alpha', X, Y, Z) + A'' \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$y = A' \psi(\alpha', X, Y, Z) + A'' \psi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$z = A' \chi(\alpha', X, Y, Z) + A'' \chi(\alpha'', X, Y, Z);$$

formules qui ſerviront auſſi pour les autres variables x', y', z', (x), (y) &c. en ne faiſant que changer les conſtantes A', A''.

Or pour trouver le rapport entre les quantités x, y, z, x', y', z', & (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') dépandant du tems t, on remarquera qu'il y a ici deux cas, où les équations (p), (q), (r) ne rempliſſent point la condition propoſée de $\int (xL + yM + zN)\, dXdYdZ = 0$; ſavoir celui, où k eſt $= -\alpha'$, & celui où $k = -\alpha''$. Il faudra donc dans ces cas recourir immédiatement aux équations (D) & (E), & ſubſtituant au lieu de x, y, z &c. les expreſſions trouvées faire en ſorte, que ces équations deviennent poſſibles, lorſque $k = -\alpha'$, & $k = -\alpha''$.

Soient déſignées par B', B'', les conſtantes qui répondent aux quantités x, y, z, & par E', E'', F', F'' celles qui répondent aux quantités (x), (y), (z), & (x'), (y'), (z'), & poſons d'abord $k = -\alpha'$, il eſt clair que la formule $\int [L\varphi(\alpha'', X, Y, Z) + M\psi(\alpha'', X, Y, Z) + N\chi(\alpha'', X, Y, Z)]\, dXdYdZ$, évanoüira par elle même, ſuivant ce qui a été démontré dans *l' Art. préc.*; donc l' équation (D) ſe réduira comme ci-deſſus à $A' \int [L\varphi(\alpha', X, Y, Z) + M\psi(\alpha', X, Y, Z,) + N\chi(\alpha', X, Y, Z)]\, dXdYdZ = (E' \operatorname{coſ.} t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F' \operatorname{ſin.} t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}) \int [L\varphi(\alpha', X, Y, Z) + M\psi(\alpha', X, Y, Z) + N\chi(\alpha', X, Y, Z)]\, dXdYdZ$; d'où

d'où l'on tire $A' = E' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F' \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$. On tirera de même de l'équation (E), $B' = F' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'}\, \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}$.

Après cela on fuppofera $k = -\alpha''$, & l'on trouvera par des procédés femblables $A'' = E'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F'' \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$, $B'' = F' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''}\, \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}$.
On aura donc,

$$x = [\, E' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}}\ \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}\,]\, \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\, E'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}}\ \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}\,]\, \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$y = [\, E' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}}\ \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}\,]\, \psi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\, E'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}}\ \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}\,]\, \psi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$z = \&c.$$
$$x' = [\, F' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'}\ \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}\,]\, \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\, F'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''}\ \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}\,]\, \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$y' = \&c.$$
$$z' = \&c.$$

On voit par ces formules que le mouvement de chaque particule fera compofé de deux mouvemens analogues chacun au mouvement repréfenté par les formules de *l' Art. préc.*; d'où il eft aifé de conclure, que les vibrations ne feront jamais ifochrones, à moins que les mouvemens compofans ne foient finchrones entr'eux, ce qui ne pourra arriver que, lorfque les quantités α' & α'' feront commenfurables entr'elles.

62. En fuivant la méthode que nous venons d'expliquer on pourra fuppofer de nouveau au lieu des équations (p), (q), (r);

$$\beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dX dY} + \frac{d^2 r}{dX dZ} = P$$

$$\beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dY dZ} + \frac{d^2 p}{dY dX} = Q$$

$$\beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZ dX} + \frac{d^2 q}{dZ dY} = R$$

& enſuite

$$\gamma P + \frac{d^2 P}{dX^2} + \frac{d^2 Q}{dX dY} + \frac{d^2 R}{dX dZ} = 0$$

$$\gamma Q + \frac{d^2 Q}{dY^2} + \frac{d^2 R}{dY dZ} + \frac{d^2 P}{dY dX} = 0$$

$$\gamma R + \frac{d^2 R}{dZ^2} + \frac{d^2 P}{dZ dX} + \frac{d^2 Q}{dZ dY} = 0;$$

d' où, par des opèrations analogues à celles qui ont été pratiqué ci-deſſus, on parviendra aux formules ſuivantes,

$$x = [E' \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'}]\, \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [E'' \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha''}]\, \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ [E''' \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha'''} + \frac{F'''}{\sqrt{c\alpha'''}} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'''}]\, \varphi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$y =$ &c.

$z =$ &c.

$$x' = [F' \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'}]\, \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [F'' \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha''}]\, \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ [F''' \text{ coſ. } t\sqrt{c\alpha'''} - E'''\sqrt{c\alpha'''} \text{ ſin. } t\sqrt{c\alpha'''}]\, \varphi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$y' =$ &c.

$z' =$ &c.

qui donnent les mouvemens des particules compoſés de trois mouvemens ſimples, analogues chacun à celui de l'*Art.* 60.; d' où il s' enſuit que l' iſochroniſme n' y aura lieu que, lorſque les quantités α', α'', α''' qui expriment trois valeurs quelconques de $-k$ ſeront toutes commenſurables entr'elles.

En

En ſuivant encore la même méthode, on trouvera pour les valeurs de x, y, z, x', y', z' des formules compoſées de 4, 5, 6 &c. termes ſemblables donc chacun répondra à une quelconque des valeurs de k; on pourra donc par ce moïen avoir autant de ſolutions particuliéres, qu'il y aura de combinaiſons à faire, à une à une, à deux à deux, à trois à trois &c. des valeurs de k, de ſorte, que leur nombre étant m, celui de ſolutions particuliéres ſera $2^m - 1$; mais ſi le nombre des valeurs commenſurables eſt ſeulement $= n$, il n'y aura que $2^n + m - n - 1$ de ces ſolutions qui rendent les oſcillations iſochrones.

Remarque.

63. Si on pouſſoit les expreſſions des valeurs de x, y &c. juſqu'à ce que le nombre de leurs termes fût égal à celui des valeurs de k, on auroit alors une ſolution générale, & applicable à tous les cas poſſibles; quoique cette propoſition ne ſoit pas une ſuite néceſſaire de l'Analiſe précédente, il eſt aiſé de la démontrer en rigueur par le moïen des principes juſqu'ici établis.

Pour cela je ſuppoſe qu'on développe la formule (D) en autant de formules particuliéres qu'il y a de valeurs de k, & qu'on en tire par la combinaiſon la valeur de chacune des quantités x, y, z, ſoit en ſe ſervant des régles ordinaires, où en emploïant une méthode analogue à celle, dont nous avons fait uſage dans le *Chap III. des Recher. préc.*, *Art.* 24.; il eſt facile de voir que ces valeurs ſeront exprimées de la maniére ſuivante;

$$x = P' \left[S' \operatorname{coſ.} t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{c\alpha'} \right]$$

$$+ P'' \left[S'' \operatorname{coſ.} t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{c\alpha''} \right]$$

&c. &c.

+

$$+ P^m [S^m \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}]$$

$$y = Q' [S' \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha'}]$$

$$+ Q'' [S'' \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha''}]$$

&c. &c.

$$+ Q^m [S^m \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}]$$

$$z = R' [S' \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha'}]$$

$$+ R'' [S'' \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha''}]$$

&c. &c.

$$+ R^m [S^m \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}];$$

poſant α^m pour la derniére des valeurs de $-k$.

Les quantités S', S'' &c. S^m & V', V'' &c. V^m ſont miſes pour dénoter les valeurs des expreſſions $\int [(x) L + (y) M + (z) N] dX dY dZ$, & $\int [(x') L + (y') M + (z') N]$, lorſque on fait ſucceſſivement $-k = \alpha'$, $= \alpha''$ &c. $= \alpha^m$. Les autres quantités P', P'' &c. P^m, Q', Q'' &c. Q^m, R', R'' &c. R^m ſont différentes pour chaque particule, c'eſt-à-dire, ſont des fonctions variables de X, Y, Z.

Or, ſi l'on regarde ces fonctions comme indéterminées, on pourra en connoître la valeur par le moïen de la ſubſtitution & de la comparaiſon, ainſi qu'on le pratique dans la méthode connue des indéterminées. Subſtituons donc au lieu de x, y, z dans l' équation (D) les expreſſions ci-deſſus, & ſuppoſant pour abreger que S, V dénotent en géneral les valeurs de S', S'' &c. V', V'' &c., lorſqu'il y a encore $-k$ au lieu de α', α'' &c. on aura

$$[S' \text{cos.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{sin.}\, t\sqrt{c\alpha'}] \int (P'L + Q'M + R'N)\, dX dY dZ$$

$$+$$

+ [S''

$+ [S'' \text{cof.}\, t \sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{fin.}\, t \sqrt{c\alpha''}] \int (P''L + Q''M + R''N)\, dXdYdZ$

&c. &c.

$+ [S^m \text{cof.}\, t \sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{fin.}\, t \sqrt{c\alpha^m}] \int (P^mL + Q^mM + R^mN)\, dXdYdZ$

$$= S \text{ cof. } t \sqrt{-ck} + \frac{V}{\sqrt{-ck}} \text{ fin. } t \sqrt{-ck}.$$

Equation qui doit être identique en faifant $-k = \alpha'$, $= \alpha''$, $=$ &c., $= \alpha^m$.

Soit donc pofé, en général $-k = \alpha^\mu$, le fecond membre de l'équation deviendra $S^\mu \text{ cof. } t \sqrt{c\alpha^\mu} + \frac{V^\mu}{\sqrt{c\alpha^\mu}} \text{ fin. } t \sqrt{c\alpha^\mu}$, & le terme μ^{me} du premier membre étant

$[S^\mu \text{cof.}\, t \sqrt{c\alpha^\mu} + \frac{V^\mu}{\sqrt{c\alpha^\mu}} \text{fin.}\, t \sqrt{c\alpha^\mu}] \int (P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\, dXdYdZ$,

pour identifier les deux membres, on fuppofera que $\int (P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\, dXdYdZ$ foit $= 1$, & que toutes les autres formules exprimées généralement $\int (PL + QM + RN)\, dXdYdZ$ foient nulles, $-k$ étant $= \alpha^\mu$ dans les valeurs de L, M, N; d'où l'on voit que les valeurs de P, Q, R devront être telles que la formule générale $\int (P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\, dXdYdZ$ foit toujours $= 1$, lorfque $k = -\alpha^\mu$, & qu'elle foit toujours $= 0$, lorfque k a une autre valeur quelconque.

Or, par ce qui a été démontré dans *l'Art.* 60., on trouvera d'abord, pour remplir cette derniére condition, les équations fuivantes,

$$\alpha^\mu P^\mu = \frac{d^2 P^\mu}{dX^2} + \frac{d^2 Q^\mu}{dXdY} + \frac{d^2 R^\mu}{dXdZ}$$
$$\alpha^\mu Q^\mu = \frac{d^2 Q^\mu}{dY^2} + \frac{d^2 R^\mu}{dYdZ} + \frac{d^2 P^\mu}{dYdX}$$
$$\alpha^\mu R^\mu = \frac{d^2 R^\mu}{dZ^2} + \frac{d^2 P^\mu}{dZdX} + \frac{d^2 Q^\mu}{dZdY};$$

d'où il réfultera comme dans *l'Art. cité*

$P^\mu = A\,\varphi\,(\alpha^\mu,\ X,\ Y,\ Z)$; $Q^\mu = A\,\psi\,(\alpha^\mu,\ X, Y, Z)$
$R^\mu = A\,\chi\,(\alpha^\mu;\ X,\ Y,\ Z.$

Soit maintenant la valeur de $\int[\,L\varphi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z) + M\,\psi\,(\alpha^\mu,\ X,\ Y,\ Z) + N\chi\,(\alpha^\mu,\ X,\ Y,\ Z)\,]\,dXdYdZ$, en y pofant $-k = \alpha^\mu$, exprimée par D^μ; on aura pour fatisfaire à la premiére condition $A D^\mu = 1$, & par conféquent $A = \frac{1}{D^\mu}$.

Subftituant enfin les valeurs trouvées de P, Q, R, dans les expreffions de x, y, z, & pofant pour plus de fimplicité E', E'', &c. au lieu de $\frac{S'}{D'}$, $\frac{S''}{D''}$ &c. & F', F'', &c. au lieu de $\frac{V'}{D'}$, $\frac{V''}{D''}$ &c. il viendra

$$x = [\,E' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha'}\,]\,\varphi\,(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\,E'' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi\,(\alpha'', X, Y, Z)$$
&c. &c.
$$+ [\,E^m \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha} + \frac{F^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha^m}]\,\varphi\,(\alpha^m, X, Y, Z)$$
$y =$ &c.
$z =$ &c.

Par des raifonnemens, & des opérations femblables on tirera de l'équation (E)
$$x' = [\,F' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha'}\,]\,\varphi\,(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\,F'' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha''}\,]\,\varphi\,(\alpha'', X, Y, Z)$$
+ &c.
$$+ [\,F^m \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha^m} - E^m\sqrt{c\alpha^m} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha^m}]\,\varphi\,(\alpha^m, X, Y, Z).$$
$y' =$ &c.
$z' =$ &c.

Voilà, comme l'on voit, une conftruction générale des mêmes équations que nous avons déja traité dans le §. 2. du *Chap. préc.* par une voie fort différente, & feulement

par

par approximation; mais il faut avouer que cette construction n'est guères utile pour la connoissance du mouvement des particules de l'air. Car les valeurs de x, y, z sont composées de suites infinies, dont les termes ne sont point convergens, ou du moins ne peuvent point être regardés comme tels, puisque les constantes E, F, que ces termes renferment, dépendent des premiéres valeurs de x, y, z, & de x', y', z', qui doivent être supposées quelconques.

SCOLIE.

64. Il est clair que la méthode de la Remarque précédente peut aussi être emploïée dans une infinité d'autres équations de même espèce, & qu'elle s'applique également, soit que le nombre des corps mobiles soit infini, ou qu'il soit fini; de sorte qu'on peut la regarder comme une simplification, & une généralisation de celle, dont nous nous sommes servis dans le *Chap. III. des Rech. préc.*

Au reste cette méthode sert à démontrer la belle Proposition de M. Daniel Bernoulli que, lorsque un sistème quelconque de corps fait des oscillations infiniment petites, le mouvement de chaque corps peut être consideré, comme composé de plusieurs mouvemens partiels, & sinchrones chacun à celui d'un pendule simple. *Voïés les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année* 1753.

Fautes à corriger dans la Dissertation précédente.

Pag. 15 *lig.* 16; & qui renferme même quelque chose de contradictoire à la nature du Problême; *lisez* & qui est même incompatible avec les principes de l'Analise de M. Newton.

Pag. 23 *lig.* 4; *au lieu de* R *dans le terme* $R\sqrt{-ck}$ fin. $t\sqrt{-ck}$; *mettez* S.

ibid. *changez les signes aux deux dernières termes des équations* $s =$ &c., & $r =$ &c. *comme aussi aux termes correspondans des équations qui suivent* $\int zMdx =$ &c., $\int uMdx =$ &c. *Au reste cette faute a été corrigée dans la suite du calcul.*

Pag. 25 *lig.* 16; dans les seconds termes; *lisez* dans les seconds membres.

lig. 19; dans ces termes; *lisez* dans les termes de ces membres.

Pag. 32 *lig.* 27; de sa partie $A'S$; *mettez* de sa partie $A'S'$, *lig. suiv.*; comme aussi que; *effacez* que.

Pag. 48 *lig.* 21 *au lieu de* $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$; *posez* $\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2hE}{D}}$.

Pag. 52 *lig.* 6; que l'autre; *effacez* l'autre.

Pag. 59; *dans l'équation* $r =$ &c. *au lieu de* $R\sqrt{ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$; *mettez* $S\sqrt{-ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$.

Pag. 67 *lig.* 5; & de dy au lieu; *mettez* & $-dy$ au lieu.

lig. 7; *placez le signe* $-$ *avant le premier terme de la valeur de* (Z). *Même correction aux formules des lig.* 22 *&* 23.

Pag. 72 *lig.* 17; *changez le signe* $-$ *en* $+$ *avant le dernier terme de l'équation de cette ligne*, $\varphi(a+y) =$ &c.

lig. 22; *mettez* $\varphi(a+y)$ *au lieu de* $\varphi(a+z)$.

Pag. 96 *lig. dernière*; $X = hx^m$, *posez* $X = hx^n$.

Pag. 104 *lig.* 17; $s + \mu v$ *lisez* $s + \mu r$.

lig. 21; *posez* $e^{t\sqrt{ck}}$ *au lieu de* $e^{-t\sqrt{ck}}$ *après le signe* $\int$ *dans le dernier terme de l'équation* (A).

Pag. 105 *lig.* 6; *après* $\int ZMdx$, *ajoutez* $\int VMdx$.

Pag. 110 *lig.* 17; que M soit; *lisez* que z, & M soient.

Pag. 140 *lig.* 14; $= \frac{\sqrt{3c}}{6}$; *lisez* $= \frac{\sqrt{7c}}{6}$.

Pag. 146 *lig.* 16; *au lieu de* $L^{(a-u,\,Y,\,Z)} =$ &c. *mettez* $L^{(a+u,\,Y,\,Z)} =$ &c.

Pag. 157 *lig.* 13 & 14; à la quinte en haut de ce même Son, & puis à la double tierce; &c. *lisez pour plus d'intelligence* à la douxiéme, & puis à la dixseptiéme &c. de ce même Son.

ESSAI

ESSAI

D'UNE NOUVELLE METHODE POUR DE'TERMINER LES *MAXIMA*, ET LES *MINIMA* DES FORMULES INTEGRALES INDEFINIES.

PAR M. DE LA GRANGE.

POUR peu qu'on soit au fait des Principes du Calcul différentiel, on connoit la méthode de déterminer les plus grandes, & les moindres ordonnées des courbes; mais il est des questions *de maximis*, & *minimis* d'un genre plus élévé, & qui, quoique dépendantes de la même méthode ne s'y appliquent pas si aisément. Ce sont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans lesquelles une expression intégrale donnée soit un *maximum*, ou un *minimum* par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problême de ce genre, que les Géomètres aïent resolu, est celui de la *Brachrystochrone*, ou ligne de la plus vite descente, que M. Jean Bernoulli proposa vers la fin du siécle passé. On n'y parvint alors que par des voies particuliéres, & ce ne fut que quelque tems après, & à l'occasion des recherches sur les *Isopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler, & son Illustre frere M. Jacque Bernoulli donnerent quelques régles générales pour résoudre plusieurs autres questions de même nature. Mais ces régles n'aïant pas assès d'étendue, le célèbre M. Euler a entreprit de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes : sive solutio Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Ouvrage original, & qui brille par tout d'une

pro-

profonde ſcience de calcul. Cependant, quelque ingénieuſe & feconde que ſoit ſa méthode, il faut avouer qu'elle n'a pas toute la ſimplicité qu'on peut déſirer dans un ſujet de pure Analiſe. L'Auteur le fait ſentir lui même dans *l'Art.* 39. du *Chap.* 2. de ſon livre par ces paroles: *Deſideratur itaque methodus a reſolutione geometrica & lineari libera, qua pateat in tali inveſtigatione maximi minimique, loco* Pdp *ſcribi debere* — pdP.

Maintenant voici une méthode qui ne demande qu'un uſage fort ſimple des principes du Calcul différentiel & intégral; mais avant tout je dois avertir que, comme cette méthode exige que les mêmes quantités varient de deux maniéres différentes, pour ne pas confondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle carathériſtique δ. Ainſi δZ exprimera une différence de Z qui ne ſera pas la même que la dZ, mais qui ſera cependant formée par les mêmes régles; de ſorte qu'aïant une équation quelconque $dZ = m\delta x$, on pourra avoir également $\delta Z = m\delta x$, & ainſi des autres. Cela poſé je viens d'abord au Problême ſuivant.

I.

PROBLEME I. Etant propoſée une formule intégrale indéfinie repréſentée par $\int Z$, où Z déſigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z, & de leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z &c., trouver la rélation que ces variables doivent avoir entr'elles, pour que la formule $\int Z$ devienne un *maximum*, ou un *minimum*.

SOLUTION. Suivant la méthode connue *de maximis, & minimis*, il faudra différentier la propoſée $\int Z$, en regardant les quantités x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z &c. comme variables, & faire la différentielle, qui en réſulte, égale à zero. Marquant donc ces variations par δ, on aura d'abord pour l'équation du *maximum*, ou *minimum* $\delta \cdot \int Z = 0$, où, ce qui en eſt l'équivalent, $\int \delta Z = 0$. Or

Or ſoit Z tel que $\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2 x + r\delta d^3 x + \&c. + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + R\delta d^3 y + \&c. + \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2 z + \rho\delta d^3 z + \&c.$ il en viendra l'équation

$$\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2 x + \int r\delta d^3 x + \&c. + \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2 y + \int R\delta d^3 y + \&c. + \int \nu\delta z + \int \pi\delta dz + \int \chi\delta d^2 z + \int \rho\delta d^3 z + \&c. = 0;$$

Mais on comprend aiſément que $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2 x = d^2\delta x$, & ainſi des autres; de plus on trouve par la méthode des intégrations par parties $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$, $\int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2 q\delta x$, $\int r d^3\delta x = r d^2\delta x - dr\delta x + d^2 r\delta x - \int d^3 r\delta x$; & ainſi du reſte; donc l'équation précédente ſe changera en celle-ci,

$$(A)\ \ldots \int(n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\,\delta x + \int(N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y + \int(\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta z +$$
$$(p - dq + d^2 r - \&c.)\,\delta x + (q - dr\ \&c.)\,d\delta x + (r - \&c.)\,d^2\delta x + \&c. +$$
$$(P - dQ + d^2 R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR\ \&c.)\,d\delta y + (R - \&c.)\,d^2\delta y + \&c. +$$
$$(\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta z + \chi - d\rho\ \&c.)\,d\delta z + (\rho - \&c.)\,d^2 + \&c. = 0;$$

d'où l'on tirera premiérement l'équation indéfinie

$$(B)\ \ldots (n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\,\delta x + (N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y + (\nu - d\pi + d\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta z = 0;$$

& enſuite l'équation déterminée

$$(C)\ \ldots (p - dq + d^2 r - \&c.)\,\delta x + (q - dr + \&c.)\,d\delta x + (r - \&c.)\,d^2\delta x + \&c. +$$
$$(P - dQ + d^2 R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR + \&c.)\,d\delta y + (R - \&c.)\,d^2\delta y + \&c. +$$
$$(\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta x + \chi - d\rho + \&c.)\,d\delta z + (\rho - \&c.)\,d^2\delta z + \&c. = 0.$$

Cette équation ſe rapporte au dernier point de l'intégrale $\int Z$; mais il faut obſerver, que comme chacun de ſes termes

mes comme $p\delta x$ dépend d'une intégration partielle de la formule $\int p\,d\delta x$, on peut lui ajouter, ou en retrancher une quantité conſtante. Or la condition, par laquelle cette conſtante doit ſe déterminer eſt qu'elle faſſe évanoüir le terme $p\delta x$ au point, où commence l'intégrale $\int p\,d\delta x$; il faudra donc retrancher de $p\delta x$ ſa valeur en ce point; d'où réſulte la régle ſuivante. Soit le premier membre de l'équation (C) exprimé généralement par M, & ſoit la valeur de M, au point où commence l'intégrale $\int Z$, déſignée par $`M$, & au point où cette intégrale finit, déſignée par $M'$, on aura $M' - `M = 0$ pour l'expreſſion complete de l'équation (C).

Maintenant pour ſe défaire dans les équations trouvées des différences indéterminées δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$ &c. on examinera d'abord ſi par la nature du Problême il y a entr'elles quelque rapport donné; & les aïant réduit au plus petit nombre poſſible, on fera enſuite le coéficient de chacune de celles qui reſteront égal à zero. Si elles ſont abſolument indépendantes les unes des autres, l'équation (B) nous donnera ſur le champ les trois ſuivantes

$$n - dp + d^2q - d^3r + \&c. = 0$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \&c. = 0$$
$$\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c. = 0$$

II.

Exemple. Soit cherchée la courbe brachiſtochrone dans le vuide : Nommant x l'abſciſſe verticale, & y, & z les deux ordonnées orizontales, & perpendiculaires l'une à l'autre; la formule qui exprime le tems ſera $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$, laquelle étant comparé à $\int Z$, on a $Z = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$; & différentiant par δ ſuivant les régles ordinaires des différentiations, δZ

$= -$

$= -\frac{\delta x \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{2x\sqrt{x}} + \frac{dx \delta dx}{\sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$
$+ \frac{dy \delta dy}{\sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} + \frac{dz \delta dz}{\sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ donc, posant pour abreger $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $n = -\frac{ds}{2x\sqrt{x}}$ $p = \frac{dx}{ds\sqrt{x}}$, $P = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, $\pi = \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, & toutes les autres quantités q, r, N, Q &c. $= 0$.

III.

Premier cas. Or si le Problême est de trouver en général, entre toutes les courbes possibles, celle de la plus vite descente, on aura en ce cas les équations $n - dp = 0$; $dP = 0$; $dP' = 0$, savoir $-\frac{ds}{2xdx} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$; $-d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$; $-d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$; ces trois équations devant représenter une courbe unique, il faut qu'elles se réduisent à deux seulement; c'est de quoi il est facile de s'assurer par le calcul; car, la seconde étant multipliée par $2\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ & ajoutée à la troisiéme multipliée par $2\frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, il vient, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $d \cdot (\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{ds^2 x}) = 0$, savoir, en différentiant & divisant le tout par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, $-\frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$ qui est la première équation.

Présentement, si l'on intégre les deux équations $d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$, on a $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}$

=

$= \frac{1}{\sqrt{b}}$; d' où l' on tire d' abord $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; ce qui fait voir que la courbe cherchée eſt toute dans un même plan vertical, & que par conſéquent elle eſt à ſimple courbure. Pour la mieux connoître rapportons-là à deux coordonnées priſes dans ſon même plan. Que x ſoit l'une, & t l'autre, on aura $\sqrt{(y^2 + z^2)} = t$, & puiſque $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, on aura en intégrant $z = y \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (je n'ajoute point de conſtante, parce que je ſuppoſe que l'axe des x paſſe par la courbe même); d'où l'on tire $z = t \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}$, $y = t \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$, $dy = dt \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dt^2)}$, & enfin $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}\,dt}{\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2+dt)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui ſe réduit, en poſant $\frac{ab}{a+b} = c$, à $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$, équation d' une cicloïde décrite ſur une baſe horizontale par un cercle, dont le diamêtre $= c$.

I V.

Maintenant, ſi le premier & le dernier point de la brachriſtochrone ſont donnés, il eſt clair que, les coordonnées x, y, z étant invariables pour ces points, leurs différences δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$ &c. ſeront nulles, & par conſéquent auſſi tous les termes de l' équation (C); la conſtante c devra donc être déterminée en ſorte, que la cicloïde paſſe par les deux points donnés.

Si le premier point eſt donné, & que la brachriſtochrone doive être telle qu'un corps partant de ce point arrive dans le moindre tems à un plan horizontal donné, alors M

ſera

fera nul de lui même, & l'équation (C) donnera $M' = 0$, favoir $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{x}}\delta z = 0$, équation qui devra avoir lieu feulement dans le point où la courbe rencontre le plan; or ce plan étant donné de pofition, l'abfciffe x qui y répond fera donnée auffi, par conféquent on aura $\delta x = 0$, & le refte de l'équation devra être vrai quelles que foient δy, & δz. On aura donc $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$, $a = \infty$, $b = \infty$, ce qui transformera la cicloïde en une droite verticale. Mais fi le plan donné au lieu d'être horizontal, étoit vertical, & perpendiculaire à l'axe des y, ou des z, on auroit alors $\delta y = 0$ & par conféquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$ pour le premier cas, & $\delta z = 0$, & par conféquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$ $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$ pour le fecond; par-là on détermineroit les conftantes a, & b, & l'on trouveroit que la cicloïde devroit être telle qu'elle rencontrât le plan donné à angles droits.

En général fi au lieu d'un plan, on prend une furface quelconque pour terme de la brachriftocrhone, il eft clair que les δx, δy, δz de l'équation (C) devront avoir entr'elles un rapport dépendant de la nature de la furface donnée; de forte, que $dz = Tdx + Vdy$ étant fuppofée l'équation différentielle de cette furface, on aura $\delta z = T\delta x + V\delta y$; donc fubftituant cette valeur de δz dans l'équation (C) on aura

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + T\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + V\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right)\delta y = 0;$$

d'où l'on tire féparément $dx + Tdz = 0$; & $dy + Vdz$

$Vdz = 0$. Equations qui font connoître que la ſurface propoſée doit toujours être coupée à angles droits par la courbe cherchée.

Si la brachriſtochrone doit ſimplement être terminée par deux ſurfaces données de poſition; alors pour remplir l'équation (C) il eſt néceſſaire de faire ſéparément $M = 0$, & $M' = 0$; d'où l'on tire pour le premier, & le dernier point de la courbe les mêmes conditions qu'on a trouvé dans le cas précédent pour le dernier point ſeulement; on en conclura donc que la courbe cherchée ſera celle, d'entre toutes les cicloides poſſibles, qui rencontrera perpendiculairement les deux ſurfaces propoſées.

V.

Second cas. Suppoſons maintenant que la brachriſtochrone doive être toute couchée ſur une ſurface donnée, dont l'équation ſoit $dz = pdx + qdy$; changeant la caratheriſtique d en δ, on aura donc $\delta z = p\delta x + q\delta y$, équation qui donne le rapport qu'il doit y avoir en général entre les différences δz, δy, δx. Subſtituant cette valeur de δz dans l'équation (B), & faiſant enſuite les deux coéficiens de δx, & de δy chacun $= 0$ on aura pour la courbe cherchée

$$-p\,d\cdot\frac{dz}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d\cdot\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$$

$$-q\,d\cdot\frac{dz}{ds\sqrt{x}} - d\cdot\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0.$$

Ces équations reviennent au même, étant combinées avec l'équation à la ſurface $dz = pdx + qdy$. Car multipliant la premiére par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, & la ſeconde par $\frac{2dy}{ds\sqrt{x}}$ & les joignant enſemble, on trouve, après toutes les rédu-

réductions, $- d \cdot \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} = 0$. On prendra donc une de ces équations à volonté, & on la combinera avec l'équation $dz = pdx + qdx$, pour avoir la brachriſtochrone cherchée.

VI.

A' l'égard de l'équation (C) il eſt clair que tous les termes de cette équation s'évanoüiront, lorſque on ſuppoſera donnés le premier & le dernier point de la courbe; mais ſi l'un d'eux étoit arbitraire, alors aïant ſubſtitué au lieu de δz ſa valeur $p \delta x + q \delta y$, on auroit les équations $p \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $q \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, qu'il faudroit vérifier par rapport à ce point. Mais ſi l'on avoit tracée ſur la ſurface une courbe, à laquelle le mobile dût arriver dans le tems le plus court; ſuppoſant cette courbe donnée par l'équation $dy = m dx$, on auroit de même $\delta y = m \delta x$; &, cette valeur de δy étant ſubſtituée dans l'équation (C) on feroit $p \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} + (q \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}) m = 0$, ou bien $(p + qm) dz + dx + m dy = 0$; équation qui renferme les conditions néceſſaires pour que la brachriſtochrone rencontre à angles droits la courbe propoſée.

VII.

Remarque 1. M. Euler eſt le premier qui ait donné des formules générales pour trouver les courbes, dans leſquelles une fonction intégrale donnée eſt la plus grande, ou la plus petite; (*Voïés le Traité dont on a fait mention plus haut*) mais

mais les formules de cet Auteur ſont moins générales que les notres ; 1.° parce qu'il ne fait varier que la ſeule changeante y dans l' expreſſion Z ; 2.° parce qu'il ſuppoſe, que le premier & le dernier point de la courbe ſont fixes. En introduiſant ces conditions dans nos formules, elles deviendront entiérement eonformes à celles du Prob. V. du Traité cité ; il faudra ſeulement mettre Zdx au lieu de Z, & enſuite $\frac{P}{dx}$, $\frac{Q}{dx^2}$ &c. au lieu de P, Q &c., dx étant conſtant.

VIII.

REMARQUE 2. Soit ſuppoſé $dy = A\,dx$, $dA = B\,dx$ &c. $dz = \alpha\,dx$, $d\alpha = \beta\,dx$ &c. il eſt clair, qu'en ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion Z, elle prendra cette forme Xdx, où X ſera une fonction quelconque algébrique des variables finies x, y, z, A, B &c. α, β &c. ; faiſons donc $\delta X = N'\delta x + n'\delta y + \nu'\delta z + P'\delta A + Q'\delta B +$ &c. $+ \pi'\delta\alpha + \chi'\delta\beta +$ &c. on aura $\delta Z = \delta\cdot Xdx = \delta X dx + X\delta dx = \delta X dx + \frac{Z\delta dx}{dx} = N'dx\delta x + \frac{Z}{dx}\delta dx + n'dx\delta y + \nu'dx\delta z + P'dx\delta A + Q'dx\delta B +$ &c. $+ \pi'dx\delta\alpha + \chi'dx\delta\beta +$ &c. Or $dy = A\,dx$, $d^2y = B\,dx^2 + A\,d^2x$, &c. donc $\delta dy = \delta A\,dx + A\delta dx$, $\delta d^2y = \delta B\,dx^2 + \delta A\,d^2x + 2B\,dx\delta dx + A\delta d^2x$, &c. ; on trouvera de même $\delta dz = \delta\alpha\,dx + \alpha\delta dx$, $\delta d^2z = \delta\beta dx^2 + \delta\alpha d^2x + 2\beta\,dx\delta dx + \alpha\delta d^2x$, &c. ; ſubſtituant ces valeurs dans l' expreſſion de δZ, & ordonnant les termes on aura $\delta Z = n\delta x + (p + PA + 2QB\,dx +$ &c. $+ \pi\alpha + 2\chi\beta\,dx +$ &c.$)\,\delta dx + (q + QA +$ &c. $+ \chi\alpha +$ &c.$)\,\delta d^2x +$ &c. $+ N\delta y + \nu\delta z + (P\,dx + Q\,d^2x +$ &c.$)\,\delta A + (Q\,dx^2 +$ &c.$)\,\delta B +$ &c. $+ (\pi\,dx + \chi\,d^2x +$ &c.$)$

&c.) $\delta\alpha + (\chi dx^2 + \&c.)\delta\beta + \&c.$ Cette valeur de δZ doit être identique avec celle qu'on trouvé précédemment; comparant donc les termes affectés de δdx, $\delta\delta^2 x$ &c. on aura les équations $\frac{Z}{dx} = p + PA + 2QBdx + \&c. + \pi\alpha + 2\chi\beta dx + \&c.$ $q + QA + \&c. + \chi\alpha + \&c. = 0$.

La seconde étant différentiée, & ensuite retranchée de la première, on a $\frac{Z}{dx} = p - dq + \&c. + PA + QBdx - dQA + \&c. + \pi\alpha + \chi\beta dx - d\chi\alpha + \&c. = 0$. La même èquation étant multipliée par d^2x, & ensuite ajoutée à celle-ci multipliée par dx, il vient $Z = pdx + Pdy + \pi dz + qd^2x - dqdx + Qd^2y - dQdy + \chi d^2z - d\chi dz + \&c.$ Différentiant, & effaçant ce qui se détruit, on aura, à cause de $dZ = ndx + Ndy + \nu dz + pd^2x + Pd^2y + \&c.$, $(n - dp + d^2q + \&c.)dx + (N - dP + d^2Q + \&c.)dy + (\nu - d\pi + d^2\chi - \&c.)dz = 0$; équation qui est d'elle même identique, & qui montre par conséquent, que les équations trouvées à la fin de *l'Art. I.* sont telles, que si on en prend deux à volonté, la troisiéme s'ensuit toujours nécessairement.

I X.

Probleme 2. Rendre la formule $\int Z$ un *maximum*, ou un *minimum*, en supposant que Z est une fonction quelconque algébrique composée des changeantes x, y, z avec leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y &c., & de la quantité $\Pi = \int Z'$, Z' étant une autre fonction algébrique quelconque des seules changeantes x, y, z &c., & de leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y &c.

Solution. Soit, en différentiant par δ, & ne regardant que y comme variable, $\delta Z = L\delta\Pi + n\delta x + p\delta dx$

+

$+ q\delta d^2x +$ &c. $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y +$ &c. $+ \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z +$ &c. & $\delta Z' = n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c. $+ N'\delta y + P'\delta dy + Q'\delta d^2y +$ &c. $+ \nu'\delta z + \pi'\delta dz + \chi\delta d^2z +$ &c., on aura, par l' hipothèſe, $\delta\Pi = \delta\int Z' = \int\delta Z' = \int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$]$, donc $\delta\cdot\int Z = \int\delta Z = \int[n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x +$ &c.$] + \int L\int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$]$. La premiére partie ſe réduira, comme dans le Prob. 1., à $\int(n - dp + d^2q -$ &c.$)\delta x + (p - dq +$ &c.$)\delta x + (q -$ &c.$)d\delta x +$ &c. A l' égard de la ſeconde on la transformera d' abord en $\int L \times \int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$] - \int[\int L \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$)]$.

Or ſoit la valeur totale de l'intégrale $\int L$ repréſentée par H, prenant cette quantité H pour conſtante, la transformée précédente ſe réduira à celle-ci

$$\int[(H - \int L) \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \text{\&c.})]$$

laquelle ſe transformera aiſément, par des intégrations par parties, en

$$\int[n'(H-\int L) - d\cdot p'(H-\int L) + d^2\cdot q'(H-\int L) - \text{\&c.}]\delta x$$
$$+ [p'(H - \int L) - d\cdot q'(H - \int L) + \text{\&c.}]\delta x$$
$$+ [q'(H - \int L) - \text{\&c.}]d\delta x + \text{\&c.}$$

Poſant donc pour abréger

$n + n'(H - \int L) = (n)$, $p + p'(H - \int L) = (p)$ $q + q'(H - \int L) = (q)$ &c., & de même $N + N'(H - \int L) = (N)$, $P + P'(H - \int L) = (P)$ $P + Q'(H - \int L) = (Q)$ &c. comme auſſi $\nu + \nu'(H - \int L) = (\nu)$, $\pi + \pi'(H - \int L) = (\pi)$, $\chi + \chi'(H - \int L) = (\chi)$ &c., on aura en général

$$\delta\cdot\int Z = \int[(n) - d\cdot(p) + d^2(q) - \text{\&c.}]\delta x$$
$$+ \int[(N) - d\cdot(P) + d^2(Q) - \text{\&c.}]\delta y$$
$$+ \int[(\nu) - d\cdot(\pi) + d^2(\chi) - \text{\&c.}]\delta x$$
$$+ [(p) - d\cdot(q) + \text{\&c.}]\delta x + [(q) - \text{\&c.}]\delta dx + \text{\&c.}$$
$$+ [(P) - d\cdot(Q) + \text{\&c.}]\delta y + [(Q) - \text{\&c.}]\delta dy + \text{\&c.}$$

$+$

$+ [(\pi) - d \cdot (\chi) + \&c.] \delta z + [(\chi) - \&c.] \delta d z + \&c. = 0$ . . . . (D)

Equation réduite à la forme de l'équation (*A*) du Prob. préc. ; donc &c.

X.

Corollaire. Ce seroit la même méthode qu'il faudroit suivre si la quantité Z' renfermoit une autre fonction intégrale indéfinie $\Pi' = \int Z''$, ensorte que $\delta Z' = L' \delta \Pi' + n' \delta x + p' \delta dx + \&c.$, & $\delta Z'' = n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c. + N'' \delta y + P'' \delta dy + Q'' \delta d^2 y + \&c. + \nu'' \delta z + \pi'' \delta dz + \chi'' \delta d^2 z + \&c.$ Alors l'expression de $\delta \int Z$ seroit augmentée de la formule $\int L \int L' \int (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)$; or cette formule se réduit d'abord à $\int [(H - \int L) L' \int (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)]$, & ensuite à $\int [(H' - \int (H - \int L) L') \times (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)]$, en posant H' pour la valeur totale de l'intégrale $\int (H - \int L) L'$. Par conséquent il n'y aura qu'à augmenter, dans la formule (*D*), la valeur de (*n*) de la quantité $n'' [H' - \int (H - \int L) L]$, celle de (*p*) de la quantité $p'' [H' - \int (H - \int L) L]$, & ainsi des autres.

Il est aisé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit suivre si la formule Z'' contenoit encore une autre formule intégrale $\int Z'''$, & ainsi de suite.

X I.

Probleme 3. Trouver l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de la formule $\int Z$, lorsque Z est donné simplement par une équation différentielle qui ne renferme d'autres différences de Z que la premiére.

Solution. Quelle que soit l'équation proposée, pourvû qu'elle soit délivrée de tout signe d'intégration, il est clair, qu'en la différentiant par δ, on pourra toujours la mettre

ſous la forme ſuivante $\delta dZ + T\delta Z = n\delta x + p\delta dx$ + &c. + $N\delta y + P\delta dy$ + &c. + $\nu\delta z + \pi\delta dz$ + &c.; d'où l'on tirera, à cauſe de $\delta dZ = d\delta Z$, la valeur de δZ exprimée par $e^{-\int T} \int e^{\int T} (n\delta x + p\delta dx + \&c.)$, & delà $\delta \int Z = \int e^{-\int T} \int e^{\int T} (n\delta x + p\delta dx + \&c.)$.

En ſuivant les principes établis dans le Problême précédent, on ſuppoſera que G ſoit la valeur totale de $\int e^{-\int T}$, & faiſant enſuite $n e^{\int T} (G - \int e^{-\int T}) = (n)$, $p e^{\int T} (G - \int e^{-\int T}) = (p)$, $q e^{\int T} (G - \int e^{-\int T}) = (q)$ &c., on trouvera pour l'expreſſion de $\delta \int Z$ une formule tout-à-fait ſemblable à la formule (D) ci-deſſus.

X I I.

Scholie. Les formules qui font l'objet des deux Problêmes précédens, ſont analogues à celles que M. Euler a traitées dans le Chap. III. de ſon Ouvrage ſur cette matiére. Le Lecteur qui ſera curieux de comparer nos ſolutions avec celles que ce ſavant Auteur a trouvées par une méthode différente verra qu'elles s'accordent dans les réſultats, en aïant égard à ce qu'on a dit dans *l'Art.* VII. *ci-deſſus*. Au reſte M. Euler n'eſt pas allé plus loin, & n'a point examiné les cas où la formule Z dépendroit d'une équation différentielle, d'un ordre plus élévé que le premier. Le Corollaire ſuivant ne laiſſera plus rien à déſirer ſur ce ſujet.

X I I I.

Corollaire. Suppoſons que dans l'équation différentielle propoſée il ſe trouve des différences de Z du ſecond ordre; de ſorte qu'en différentiant par δ, il vienne $\delta d^2 Z + T\delta dz + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx$ + &c. Je commence par mettre la caractériſtique d avant la caractériſtique δ, enſuite je multiplie toute l'équation par une variable indéter-

déterminée α, & j'en prend la somme, en affectant les deux membres du signe $\int$; après je transforme le premier membre $\int(\alpha d^2 \delta Z + \alpha T d\delta Z + \alpha V \delta Z)$ en $\alpha d\delta Z + (\alpha T - d\alpha)\delta Z + \int[\alpha V - d\cdot(\alpha T - d\alpha)]\delta Z$, & supposant α tel que $\alpha V - d\cdot(\alpha T - d\alpha) = 0$, j'ai l'équation $d\delta Z + \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}\delta Z = \frac{1}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx$ $+$ &c.$)\alpha$; d'où l'on tire aisément $\delta Z = e^{-\int T'} \int \frac{e^{\int T'}}{\alpha}$ $\int(n\delta x + p\delta dx +$ &c.$)\alpha$; T' étant mis pour $\frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}$; & enfin $\delta\cdot\int Z = \int e^{-\int T'} \int \frac{e^{\int T'}}{\alpha} \int(n\delta x + p\delta dx +$ &c.$)\alpha$, formule qui est dans le cas de celle qu'on a traitée dans l'*Art.* X.

Par des procédés semblables on trouvera l'expression de $\delta\cdot\int Z$ lorsque δZ sera donnée par une équation différentielle du troisiéme ordre, & au delà, & cette expression sera toujours susceptible de la métode expliquée dans le Prob. II.

X I V.

REMARQUE. L'équation de condition $\alpha V - d\cdot(\alpha T - d\alpha) = 0$ est du second ordre, & ne peut-être intégrée que dans certains cas particuliers; mais notre solution n'en est pas moins générale. Car, pour délivrer l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de l'inconnue α, il ne faudra que la combiner avec la précédente par le moïen de plusieurs différentiations réitérées; il n'y aura de difficulté que la longueur du calcul.

X V.

SCHOLIE. Il est clair que la méthode du Corol. préc. suffit pour déterminer les *maxima*, & les *minima* de toutes

les formules intégrales imaginables; car dénotant par Π la formule proposée, il sera toujours possible d'exprimer Π par une équation différentielle, qui ne renferme aucun signe d'intégration; ainsi l'on aura, en différentiant par δ, une nouvelle équation qui contiendra $\delta\Pi$ avec ses différences $d\delta\Pi$ &c., & on en tirera l'expression intégrale de $\delta\Pi$, & par conséquent l'équation du *maximum*, ou *minimum* par les régles enseignées.

APPENDICE I.

Par la méthode qui vient d'être expliquée on peut aussi chercher les *maxima*, & les *minima* des surfaces courbes, d'une maniére plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Pour ne donner là-dessus qu'un exemple très-simple, supposons qu'il faille trouver la surface qui est la moindre de toutes celles qui ont un même périmètre donné. Aiant pris trois coordonnées rectangles x, y, z, & la surface étant supposée représentée par l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, on trouvera pour l'élément de la quadrature $dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$; par conséquent la surface entiére sera $= \iint dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, où les deux signes $\iint$ marquent deux intégrations successives, l'une par rapport à x & l'autre par rapport à y, ou réciproquement. On aura donc, suivant notre métode, $\delta \cdot \iint dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$ ce qui se réduit d'abord à $\iint \delta \cdot dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ = (en différentiant, & supposant dx, dy constantes) $\iint dx\,dy\,\frac{p\,\delta p + q\,\delta q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = 0$. Or $p = (\frac{dz}{dx})$, $q = (\frac{dz}{dy})$; donc $\delta p = (\frac{\delta dz}{dx}) = (\frac{d\delta z}{dx})$, $\delta q = (\frac{\delta dz}{dy}) = (\frac{d\delta z}{dy})$; donc $\iint dx\,dy\,\frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx}) + \iint dx\,dy$

$\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dy}) = 0$. Maintenant, comme dans l'expreſſion $(\frac{d\delta z}{dx})$, $d\delta z$ exprime la différence de δz, x ſeul étant variable, il eſt clair que pour faire diſparoître cette différence, il ne faudra conſidérer, dans la formule $\iint dx\,dy$ $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{\delta dz}{dx})$, que l' intégration rélative à x; ſoit donc pris l'intégrale $\int dx \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx})$, où x ſeul varie; il eſt facile de la transformer par des intégrations par parties, en $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\delta z - \int d\cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ $\times \delta z$, ce qui ſe réduit, en ſuppoſant les premiers & les derniers z donnés, à $-\int d\cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \delta z$, la différentielle de $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ étant priſe en variant ſeulement x. Soit, pour abreger, $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = P$; on aura, en multipliant par dy & intégrant de nouveau, $\int dy \int dx \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ $\times (\frac{d\delta z}{dx})$, ou (ce qui eſt la même choſe) $\iint dx\,dy$ $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx}) = -\int dy \int dx\,(\frac{dP}{dx})\delta z, = -$ $\iint dx\,dy\,(\frac{dP}{dx})\delta z$. On trouvera de même, en n'aïant égard qu'à la variabilité de y, & poſant Q pour $\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, $\int dy \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dy}) = Q\delta z - \int dy\,(\frac{dQ}{dy})\delta z =$ $-\int dy\,(\frac{dQ}{dy})\delta z$, & $\iint dx\,dy \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dy}) = -$

$\iint dx$

$\iint dx\,dy\,(\frac{dQ}{dy})\,\delta z$. Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $-\iint dx\,dy\,[(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$, laquelle devra être vraie indépendenment de δz; on aura donc en général, pour tous les points de la surface cherchée, $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) = 0$; ce qui montre que cette quantité $P\,dy - Q\,dx$, savoir $\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ doit être une différentielle complette. Le Problême se réduit donc à chercher p & q par ces conditions que $p\,dx + q\,dy$, & $\frac{p\,dy - p\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ soient l'une & l'autre des différentielles exactes.

Il est d'abord clair qu'on satisferà à ces conditions en faisant p & q constantes, ce qui donnera un plan quelconque pour la surface cherchée, mais ce ne sera là qu'un cas très-particulier; car la solution générale doit être telle que le périmétre de la surface puisse être déterminé à volonté.

Si la surface cherchée ne devoit être un *minimum*, qu'entre toutes celles qui forment des solides égaux, alors $z\,dx\,dy$ étant l'élément du solide, il faudroit que la formule $\iint z\,dx\,dy$ demeurât la même pendant que l'autre la formule $\iint dx\,dy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ varie; on auroit donc à la fois les deux équations $\delta\cdot\iint z\,dx\,dy = 0$, & $\delta\cdot\iint dx\,dy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$, savoir $\iint dx\,dy\,\delta z = 0$, & $\iint dx\,dy\,[(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$. Qu'on multiplie la premiére par un coéficient quelconque k, & qu'on l'ajoute à la seconde, on aura $\iint dx\,dy\,[k + (\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$, d'où l'on tire l'équation générale $k + (\frac{dP}{dx})$

$+ (\frac{dQ}{dy}) = 0$, qui aura lieu toutes les fois que $(P + kx)\,dy - Q\,dx$ ſera une différentielle complette. Donc la queſtion ſera réduite à chercher p, & q par cette condition que $p\,dx + q\,dy$ étant une différentielle exacte, $\frac{p\,dy - q\,dx}{\surd(1 + p^2 + q^2)} + k\,x\,dy$ en ſoit une auſſi.

L'équation de la ſphére eſt en général $(z - a)^2 + (y - b)^2 + (x - c)^2 = r^2$; ce qui donne

$$dz = \frac{(y - b)\,dy + (x - c)\,dx}{\surd[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]},\ \text{donc}$$

$$p = \frac{x - c}{\surd[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]},$$

$$q = \frac{y - b}{\surd[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]},\ \text{donc}$$

$\frac{p\,dy - q\,dx}{\surd(1 + p^2 + q^2)} + k\,x\,dy = (\frac{1}{r} + k)\,x\,dy - \frac{1}{r}\,y\,dx + \frac{b\,dx - c\,dy}{r}$, qui eſt une différentielle complette ſi $\frac{1}{r} + k = -\frac{1}{r}$.

Appendice 2.

Soit propoſé de trouver celui, d'entre tous les poligones qui ont un nombre donné de côtés donnés, dont l'aire eſt la plus grande. La méthode de ce Mémoire eſt auſſi applicable à ces ſortes de queſtions; car ſoit y une ordonnée quelconque du poligone, & x l'abſciſſe correſpondante, on aura pour l'élément fini de l'aire, $(y + \frac{1}{2}dy)\,dx$ comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par l'inſpection d'une figure fort ſimple; par conſéquent l'aire entiére ſera $\int(y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx$. Donc, ſuivant notre méthode, $\delta \cdot \int(y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx = \int[\delta y\,dx + \frac{1}{2}\,\delta\,dy\,dx + (y + \frac{1}{2}\,dy)\,\delta\,dx] = 0$. Or chaque

chaque côté du poligone eſt en général $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc on aura $\delta \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$, c'eſt-à-dire $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = 0$, & $\delta dx = -\frac{dy\,\delta dy}{dx}$; ſubſtituant cette valeur de δdx dans l'équation précédente, elle deviendra celle-ci $\int [dx\,\delta y + (\frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})\,\delta dy] = 0$. Qu'on mette au lieu de δdy ſon égale $d\delta y$, & qu'on faſſe pour abréger $\frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx} = z$, on aura la formule $z\,d\delta y$ qu'il faudra intégrer par parties, afin de faire diſparoître la différence de δy. Pour cela je remarque que dans le cas des différences finies, on a $d \cdot z\delta y = dz\,\delta y + z\,d\delta y + dz\,d\delta y = z\,d\delta y + dz\,(\delta y + d\delta y) =$ (en dénotant par $\delta y'$ le terme qui ſuit δy) $z\,d\delta y + dz\,\delta y'$; donc $z\delta y = \int z\,d\delta y + \int dz\,\delta y'$, donc $\int z\,d\delta y = z\delta y - \int dz\,\delta y'$, où (ce qui eſt la même choſe) $z\,dy - \int d^{\backprime}z\,\delta y$, $d^{\backprime}z$ étant le terme qui précéde dz, & qui par conſéquent, eſt multiplié par δy; ſubſtituant ces valeurs dans l' équation ci-deſſus, elle deviendra $z\delta y + \int (dx - d^{\backprime}z)\,\delta y = 0$.

Suppoſons que le poligone coupe l' axe en deux points, en ſorte que le premier, & le dernier y ſoient nuls, auſſi bien que leurs différences δy; le terme $z\delta y$ qui eſt hors du ſigne $\int$, diſparoîtra; & l'on aura ſimplement $\int (dx - d^{\backprime}z)\,\delta y = 0$; ce qui donnera en général $dx - d^{\backprime}z = 0$; c' eſt-à-dire, en intégrant, $a = x - {}^{\backprime}z = x' - z = x + dx - z = x + dx - \frac{1}{2}dx + \frac{y\,dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}$; multipliant par dx eſt réduiſant, on aura $a\,dx = (x + \frac{1}{2}dx)\,dx + (y + \frac{1}{1}dy)\,dy = \frac{1}{2}d \cdot x^2 + \frac{1}{2}d \cdot y^2$; & intégrant de nouveau, $2ax + r^2 = x^2 + y^2$. Equation à un cercle,

cle, dont le centre eſt dans l'axe des x, donc l'on voit que le poligone cherché doit être tel qu'il puiſſe être inſcrit dans la demie circonférence d'un cercle.

Si la baſe du poligone étoit donnée, alors il faudroit que le dernier δx fût $= 0$; or $\delta x = -\int \frac{dy\, d\delta y}{dx}$; il faudroit donc que la valeur totale de $\int \frac{dy\, d\delta y}{dx}$ fût $= 0$ en même tems que celle de $\int [dx \delta y + (\frac{1}{2} dx - \frac{y\, dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx}) d\delta y]$ eſt auſſi $= 0$. Pour cela ſoit multipliée la premiére formule par un coéficient indéterminé k, & enſuite ajoutée à la ſeconde, on aura

$$\int [dx \delta y + (k \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} dx - \frac{y\, dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx}) d\delta y] = 0;$$

donc, faiſant $k \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} dx - \frac{y\, dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx} = z$, on parviendra, comme ci-deſſus, à l'équation $a = x + dx - z$, qui ſe réduit, en multipliant par dx, à $a\, dx = k\, dy + \frac{1}{2} d \cdot x^2 + \frac{1}{2} d \cdot y^2$, dont l'intégrale eſt $ax + b^2 = ky + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2$; équation pour un cercle en général; d'où réſulte ce Théoréme, que le plus grand poligone qu'on puiſſe former avec des côtés donnés eſt celui qui peut être inſcrit dans un cercle.

M. Cramer a démontré ce théoréme ſyntétiquement dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1752.

Si l'on veut que les cotés du poligone ne ſoient pas donnés chacun en particulier, mais ſeulement leur ſomme, c'eſt-àdire le périmètre du poligone, on fera ſimplément égale à zéro la différence de l'intégrale $\int \surd (dx^2 + dy^2)$; ce qui donnera l'équation $\delta \cdot \int \surd (dx^2 + dy^2)$

 $= \int$

$= \int \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$, laquelle devra avoir lieu en même tems que l'équation du *maximum* $\int [dx\,\delta y + \frac{1}{2} dx\,\delta dy + (y + \frac{1}{2} dy)\,\delta dx] = 0$. Multipliant donc une de ces équations, par un coéficient indéterminé k, & les ajoutant ensemble, on aura en général $\int [dx\,\delta y + (\frac{1}{2} dx + \frac{k\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}})\,\delta dy + (y + \frac{1}{2} dy + \frac{k\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}})\,\delta dx] = 0$. Soit supposé $\frac{1}{2} dx + \frac{k\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z$, & $y + \frac{1}{2} dy + \frac{k\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = u$, on aura $\int (dx\,\delta y + z\,\delta dy + u\,\delta dx) = 0$, équation qui se transforme, par la même méthode que ci-dessus, en $z\,\delta y + u\,\delta x - \int [(dx - d`z)\,\delta y - d`u\,\delta x) = 0$, d'où l'on tire $dx - d`z = 0$, & $d`u = 0$; on aura donc, en intégrant, $x - `z = a$, savoir $x + dx - z = a$, & $`u = b$, savoir $u = b$; c'est-à-dire, en substituant pour z & u leurs valeurs, $x + \frac{1}{2} dx - \frac{k\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = a$, $y + \frac{1}{2} dy + \frac{k\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = b$.

Qu'on multiplie la premiére par dx, & la seconde par dy, & qu'ensuite on les ajoute ensemble, il viendra $(x + \frac{1}{2} dx)\,dx + (y + \frac{1}{2} dy)\,dy = a\,dx + b\,dy$; & en intégrant $\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 = ax + by + r^2$, équation à un cercle en général. Qu'on reprenne les mêmes équations, & qu'on les quarre, après avoir transposé les termes $x + \frac{1}{2} dx$ & $y + \frac{1}{2} dy$, on aura $\frac{k^2 dy^2}{dx^2 + dy^2} = (a - x - \frac{1}{2} dx)^2$, $\frac{k^2 dx^2}{dx^2 + dy^2} = (b - y - \frac{1}{2} dy)^2$; ces équations étant ajoutées ensemble donnent, $k^2 = (a - x - \frac{1}{2} dx)^2 + (b - y - \frac{1}{2} dy)^2 = a^2 + b^2 - 2ax - 2by$;

+

$+ x^2 + y^2 - (a-x)dx - (b-y)dy + \frac{1}{4}dx^2 + \frac{1}{4}dy^2$ $=$ [à cause de $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2$, & $(a-x)dx + (b-y)dy = \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2$] $a^2 + b^2 + r^2 - \frac{1}{4}dx^2 - \frac{1}{4}dy^2$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - k^2)}$ ce qui montre que tous les côtés du poligone doivent être égaux entr'eux, & que par conséquent le poligone doit être régulier.

A l' égard des termes $z\delta y$, $u\delta x$, il est clair que ces termes disparoîtront d' eux mêmes, si on suppose les premiers, & les derniers x, & y donnés; mais si la base du poligone étant donnée, & $= c$, le y qui y répond ne ne l'étoit pas, il faudroit faire u & $z = 0$, lorsque $x = c$; on auroit donc $b = 0$, $c = a$, & la base c deviendroit le diamètre du cercle circoncrit au poligone.

Fautes à corriger dans le Mémoire précédent.

Pag. 173. *lign.* 16.; Brachrystochrone; *lisez* Brachystochrone. *Faites la même correction dans la suite du Mémoire.*

Pag. 174. *lign.* 1. de calcul; *lisez* du calcul.

dans la lign. 9. *de l'Art. I.* les quantités x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z, &c.; *mettez* les quantités x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z &c.

Pag. 175. *dans la ligne* 5. *de l'équation* (*C*); *changez* δx *en* δz.

Pag. 177. *dans la ligne* 4. *de l'Art. III. au lieu de* $dP = 0$, $dP' = 0$; *écrivez* $-dP = 0$; $-d\pi = 0$.

Pag. 182. *dans la ligne* 16. de l' Art. VIII. *après ces mots* l' expression de δZ; *ajoutez pour plus d' intelligence* de l' Art. I.

Application de la Méthode précédente à la solution de différens Problêmes de Dynamique.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. Euler dans une Addition à ſon excellent Ouvrage qui a pour titre *Methodus maximorum &c.* a démontré ce Principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la viteſſe multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

Je me propoſe ici de généraliſer ce même Principe, & d'en faire voir l'uſage pour réſoudre avec facilité toutes les queſtions de Dynamiques.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'' &c. qui agiſſent les uns ſur les autres d'une manière quelconque, & qui ſoient, de plus, ſi l'on veut, animés par des forces centrales proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances; que s, s', s'' &c. dénotent les eſpaces parcourus par ces corps dans le tems t, & que u, u', u'' &c. ſoient leurs viteſſes à la fin de ce tems; la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds''$ + &c. ſera toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

I.

PROBLEME 1. Trouver le mouvement d'un corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces P, Q, R &c. exprimées par des fonctions quelconques des diſtances.

SOLU-

SOLUTION. Comme il n' y a ici qu'un ſeul corps M, la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* ſera ſimplement $M\int u\,ds$; on aura donc, ſuivant la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, l' équation $\delta\cdot M\int u\,ds = 0$, ou, en diviſant par M qui eſt conſtante, $\delta\cdot\int u\,ds = 0$. Or $\delta\cdot u\,ds = u\,\delta\,ds + \delta\,u\,ds$; donc changeant l'expreſſion $\delta\cdot\int u\,ds$ en ſon équivalente $\int\delta\cdot u\,ds$, comme on l'a enſeigné (*Art. I. Mém. précéd.*) on aura l' équation $\int(u\,\delta\,ds + \delta\,u\,ds) = 0$.

Soient p, q, r &c. les diſtances du corps M aux centres des forces P, Q, R &c., on aura, comme tous les Géométres le ſavent, $\frac{u^2}{2} = \text{conſt.} - \int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{\&c.})$ donc $u\,\delta\,u = -\delta\cdot\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{\&c.}) = -\int(\delta\,P\,dp + P\,\delta\,dp + \delta\,Q\,dq + Q\,\delta\,dq + \delta\,R\,dr + R\,\delta\,dr + \text{\&c.}) =$ (en changeant $\delta\,dp$, $\delta\,dq$, $\delta\,dr$ &c. en $d\,\delta\,p$, $d\,\delta\,q$, $d\,\delta\,r$ &c. & intégrant par parties les termes $P\,d\,\delta\,p$, $Q\,d\,\delta\,q$, $R\,d\,\delta\,r$ &c.) $-P\,\delta\,p - Q\,\delta\,q - R\,\delta\,r - \text{\&c.} + \int(\delta\,P\,dp - dP\,\delta\,p + \delta\,Q\,dq - dQ\,\delta\,q + \delta\,R\,dr - dR\,\delta\,r + \text{\&c.})$. Or (*hip.*) $P = \text{fonct.}\ p$, $Q = \text{fonct.}\ q$, $R = \text{fonct.}\ r$ &c., on trouvera donc, en différentiant $\frac{\delta P}{\delta p} = \frac{dP}{dp}$, $\frac{\delta Q}{\delta q} = \frac{dQ}{dq}$, $\frac{\delta R}{\delta r} = \frac{dR}{dr}$ &c., & par conſéquent $\delta\,P\,dp - dP\,\delta\,p = 0$, $\delta\,Q\,dq - dQ\,\delta\,q = 0$, $\delta\,R\,dr - dR\,\delta\,r = 0$ &c.; donc $u\,\delta\,u = -P\,\delta\,p - Q\,\delta\,q - R\,\delta\,r - \text{\&c.}$, & $\delta\,u\,ds = -P\,dt\,\delta\,p - Q\,dt\,\delta\,q - R\,dt\,\delta\,r - \text{\&c.}$, en mettant au lieu de $\frac{ds}{u}$ ſon égale dt; donc l'équation ci-deſſus ſe changera en celle-ci

$$\int(u\,\delta\,ds - P\,dt\,\delta\,p - Q\,dt\,\delta\,q - R\,dt\,\delta\,r - \text{\&c.}) = 0 \quad . \quad . \quad (A)$$

Il faut maintenant chercher le rapport que les différences $\delta\,p$, $\delta\,q$, $\delta\,r$, $\delta\,ds$ ont entr'elles; ce qui ſe fera différemment

ment ſelon les différentes ſortes de coordonnées, qu'on emploïera pour repréſenter la trajectoire. Et premiérement ſoient priſes trois coordonnées rectangles x, y, z; on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; par conſéquent $\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds} =$ (en changeant δdx &c. en $d\delta x$ &c.) $\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}$; donc $\int u\delta ds = \int(\frac{udx}{ds} d\delta x + \frac{udy}{ds} d\delta y + \frac{udz}{ds} d\delta z)$. Qu'on faſſe diſparoître dans cette expreſſion les différentielles de δx, δy, δz par la méthode des intégrations par parties, pratiquée dans le Mém. préc., on aura la transformée ſuivante

$$\int u\delta ds = -\int(d\cdot\frac{udx}{ds} \times \delta x + d\cdot\frac{udy}{ds} \times dy + d\cdot\frac{udz}{ds} \times \delta z) + \frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z.$$

Il ne s'agit plus que d'exprimer les différences δp, δq, δr &c. par les δx, δy, δz. Pour cela on cherchera les valeurs analitiques des lignes p, q, r &c. rapportées aux coordonnées x, y, z, & en prendra leurs différentielles, en mettant δ pour d. Soit ſuppoſé en général $dp = Ldx + ldy + \lambda dz$, $dq = Mdx + mdy + \mu dz$, $dr = Ndx + ndy + \nu dz$; il eſt clair qu'on aura auſſi $\delta p = L\delta x + l\delta y + \lambda\delta z$, $\delta q = M\delta x + m\delta y + \mu\delta z$, $\delta r = N\delta x + n\delta y + \nu\delta z$. Donc ſi on fait pour abréger

$$PL + QM + RN = \Pi$$
$$Pl + Qm + Rn = \pi$$
$$P\lambda + Q\mu + R\nu = \Psi,$$ on aura

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c. = \Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z.$$

Faiſant toutes ces différentes ſubſtitutions dans l'équation (A), elle deviendra

$$(B) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z$$

—

$$-\int([d\cdot\frac{udx}{ds}+\Pi\,dt]\delta x+[d\cdot\frac{udy}{ds}+\pi\,dt]\delta y$$
$$+[d\cdot\frac{udz}{ds}+\Psi\,dt]\delta z)=0;$$

Equation qui doit avoir lieu, quelques valeurs qu'on ſuppoſe aux différences δx, δy, δz; c'eſt pourquoi l'on fera les trois équations ſuivantes:

$$d\cdot\frac{u\,dx}{ds}+\Pi\,dt=0$$
$$d\cdot\frac{u\,dy}{ds}+\pi\,dt=0$$
$$d\cdot\frac{u\,dz}{ds}+\Psi\,dt=0.$$

Ce ſont ces équations qui ſerviront à déterminer la courbe décrite par le corps M, & ſa viteſſe à chaque inſtant.

Si on met dt au lieu de $\frac{ds}{u}$, qu'on multiplie la premiére équation par $\frac{dx}{dt}$, la ſeconde par $\frac{dy}{dt}$, la troiſiéme par $\frac{dz}{dt}$, & qu'enſuite on les intégre, on aura $\frac{dx^2}{2dt^2}=a^2-\int\Pi\,dx$, $\frac{dy^2}{2dt^2}=b^2-\int\pi\,dy$, & $\frac{dz^2}{2dt^2}=c^2-\int\Psi\,dz$; d'où l'on tire en chaſſant dt, & extraïant la racine quarrée

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-\int\Pi\,dx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(b^2-\int\pi\,dy)}}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-\int\Pi\,dx)}}=\frac{dz}{\sqrt{(c^2-\int\Psi\,dz)}};$$

Equations, où les indéterminées ſeront ſéparées ſi $\Pi=$ fonct. x, $\pi=$ fonct. y, $\Psi=$ fonct. z.

II.

I I.

Remarque. Quant aux termes $\frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z$; on pourra se dispenser d'y avoir égard, en supposant que les deux extrémités de la trajectoire soient données de position; car cette supposition fera évanoüir les premiers & les derniers δx, δy, δz, & par conséquent aussi tous les termes en question. (*Voïés l' Art. IV. du Mém. préc.*)

I I I.

Corollaire. Imaginons que le mobile M sollicité par les mêmes forces P, Q, R *&c.* soit contraint de se mouvoir sur une surface courbe donnée par l'équation $dz = pdx + qdy$; en changeant d en δ, on aura $\delta z = p\delta x + q\delta y$; substituant cette valeur de δz dans l'équation (B), & faisant les deux coéficiens de δx, & δy chacun $= 0$, on aura

$$d\cdot\frac{udx}{ds} + \Pi dt + [d\cdot\frac{udz}{ds} + \Psi dt]p = 0$$

$$d\cdot\frac{udy}{ds} + \pi dt + [d\cdot\frac{udz}{ds} + \Psi dt]q = 0;$$

Deux équations, qui, avec l'équation donnée $dz = pdx + qdy$, suffiront pour résoudre le Problême.

I V.

Autre solution. Qu'on prenne, à la place des deux coordonnées rectangles x, y, un rayon variable x qui tourne autour d'un point fixe dans le même plan des x & y, & dont la position à chaque instant soit déterminée

par

par un angle φ. Conſervant la troiſiéme coordonnée z, qu'on imaginera élevée de l'extrémité du rayon x perpendiculairement au plan de l' angle φ, il eſt facile de trouver que l' élément ds de la courbe ſera $= \sqrt{(x^2 d\varphi^2 + dx^2 + dz^2)}$; ainſi on aura en différentiant $\delta ds =$

$$\frac{x^2 d\varphi \delta d\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx \delta dx + dz \delta dz}{ds} = \frac{x^2 d\varphi d\delta\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx d\delta x + dz d\delta z}{ds}.$$

Mettant donc cette valeur dans la formule intégrale $\int u \delta ds$, & faiſant diſparoître les différentielles de $\delta\varphi$, δx, δz, par la voie ordinaire des intégrations par parties, on aura $\int u \delta ds = -\int [d \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \times \delta\varphi + (d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds}) \delta x + d \cdot \frac{u dz}{ds} \times \delta z] + \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \delta\varphi + \frac{udx}{ds} \delta x + \frac{udz}{ds} \delta z$.

Après la ſubſtitution de cette valeur de $\int u \delta ds$ dans l' équation (A) de *l'Art. I.*, il n'y aura plus qu'à réduire les différences δp, δq, δr *&c.* aux différences δx, δy, δz. Pour cela ſoit ſuppoſé en général

$$dp = L dx + l d\varphi + \lambda dz$$
$$dq = M dx + m d\varphi + \mu dz$$
$$dr = N dx + n d\varphi + \nu dz,$$

on aura de même

$$\delta p = L \delta x + l \delta\varphi + \lambda \delta z$$
$$\delta q = M \delta x + m \delta\varphi + \mu \delta z$$
$$\delta r = N \delta x + n \delta\varphi + \nu \delta z.$$

Donc ſi on fait les mêmes ſubſtitutions que dans la ſolution précédente, on aura auſſi $P \delta p + Q \delta q + R \delta r$ *&c.* $= \Pi \delta x + \pi \delta\varphi + \Psi \delta z$, & l' équation ($A$) deviendra enfin

$$(C) \ldots\ldots\ldots \frac{u x^2 d\varphi}{ds}\delta\varphi + \frac{u dx}{ds}\delta x + \frac{u dz}{ds}\delta z$$

$$- \int [(d \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} + \pi dt) \delta\varphi + (d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds} +$$

$$\Pi dt) \delta x + (d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt) \delta z] = 0.$$

Maintenant si on suppose, comme dans *l' Art.* II. que le premier & le dernier point de la trajectoire sont donnés, il est clair que les $\delta\varphi$, δx, δz qui y répondent seront nulles d' elles mêmes; & que par conséquent, les trois premiers termes de cette équation le seront aussi. Donc pour satisfaire au reste de l' équation, indépendanment des différences indéterminées $\delta\varphi$, δx, δz, on fera chacun de leurs coéficiens $= 0$, & l'on aura pour les équations générales du mouvement du corps

$$d \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} + \pi dt = 0$$

$$d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds} + \Pi dt = 0$$

$$d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt = 0.$$

Qu'on mette dans ces équations dt pour $\frac{ds}{u}$, & qu'on intégre la premiére, après l' avoir multipliée par $\frac{x^2 d\varphi}{dt}$, on aura $\frac{1}{2} (\frac{x^2 d\varphi}{dt})^2 = a^2 - \int \pi x^2 d\varphi$, d' où l' on tire $dt = \frac{x^2 d\varphi}{\sqrt{(2a^2 - 2\int \pi x^2 d\varphi)}}$; substituant cette valeur dans la seconde équation; & faisant pour abréger $\sqrt{(2a^2 - 2\int \pi x^2 d\varphi)} = V$ on aura

$$d \cdot \frac{V dx}{x^2 d\varphi} - \frac{V d\varphi}{x} + \frac{\Pi x^2 d\varphi}{V} = 0,$$

ou

où, en mettant y pour $\frac{1}{x}$,

$$- d \cdot \frac{V\,dy}{d\varphi} - Vy\,d\varphi + \frac{\Pi\,d\varphi}{Vy^2} = 0,$$

ce qui donnera par la différentiation, en regardant $d\varphi$ comme constante, & multipliant par $\frac{\delta\varphi}{V}$,

$$- d^2 y - \frac{dV}{V} dy - Vy\,d\varphi^2 + \frac{\Pi\,d\varphi^2}{V^2 y^2} = 0,$$

savoir, à cause de $\frac{dV}{V} = - \frac{\pi x^2 d\varphi}{V^2} = - \frac{\pi\,d\varphi}{V^2 y^2}$,

$$- d^2 y - y\,d\varphi^2 + \frac{\Pi + \frac{\pi\,dy}{d\varphi}}{V^2 y^2}\,d\varphi^2 = 0,$$ équation constructible dans plusieurs cas particuliers.

Enfin la troisiéme équation étant multipliée par $\frac{dz}{dt}$, & ensuite intégrée deviendra $\frac{dz^2}{2dt^2} = b^2 - \int \Psi\,dz$, d'où l'on tirera la valeur de dt, laquelle étant comparée à celle qu'on a trouvée plus haut fournira l'équation $\frac{dz}{\sqrt{(2b^2 - 2\int \Psi\,dz)}} = \frac{d\varphi}{Vy^2}$.

V.

Corollaire. Si le corps étoit obligé de se mouvoir sur une surface courbe donnée, alors rapportant cette surface aux trois variables x, φ, z; & la supposant exprimée par l'équation $dz = p\,d\varphi + q\,dx$, on mettroit dans l'équation (C), au lieu de δz, $p\,\delta\varphi + q\,\delta x$, ensuite on égaleroit à zéro les coéficiens de δx, & $\delta\varphi$, & l'on auroit

$$d \cdot \frac{u\,x^2 d\varphi}{ds} + \pi\,dt + \left(d \cdot \frac{u\,dz}{ds} + \Psi\,dt\right) p = 0$$

$$d \cdot \frac{u\,dx}{ds} - \frac{u\,x\,d\varphi^2}{ds} + \Pi\,dt + \left(d \cdot \frac{u\,dz}{ds} + \Psi\,dt\right) q = 0.$$

V I.

Remarque 1. Nous avons ſuppoſé que les forces P, Q, R &c. étoient comme des fonctions quelconques des diſtances p, q, r &c.; cependant il eſt facile de démontrer, par les principes de Dynamique, que les équations trouvées ſont générales pour toutes ſortes de forces accélératrices; & l'on peut d' ailleurs s' en convaincre par cette ſeule raiſon, que les équations dont il s' agit, ne renferment point la loi ſuivant laquelle les forces P, Q, R &c. croiſſent ou décroiſſent, mais ſeulement les quantités & les directions inſtantanées de ces forces, comme il eſt aiſé de le voir en ſubſtituant pour Π, ϖ & Ψ leurs valeurs. Au reſte, à examiner les ſolutions précédentes, il eſt évident que l' hipotéſe de $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r &c. ne ſert qu'à rendre $= 0$ la formule intégrale $\int(\delta P dp - dP \delta p, + \delta Q dq - dQ \delta q, + \delta R dr - dR \delta r$ &c.$)$. Or pour cela il ſuffiroit que les quantités P, Q, R &c. euſſent entr' elles un rapport tel, que $Pdp\delta - dP\delta p + \delta Q dq - dQ \delta q + \delta R dr - dR \delta r +$ &c. $= 0$; ſoient donc P, Q, R &c. des fonctions quelconques de p, q, r &c., de ſorte que l' on ait par la différentiation $dP = A dp + B dq + C dr$ &c., $dQ = D dp + E dq + F dr$ &c. $dR = G dp + H dq + I dr$ &c.; il eſt clair qu'on aura également $\delta P = A \delta p + B \delta q + R \delta r +$ &c. $\delta Q = D \delta p + E \delta q + F \delta r$ &c. $\delta R = G \delta p + H \delta q + I \delta r$ &c. Subſtituant ces valeurs dans l' équation de condition, & réduiſant on aura $(B - D) \times (dp \delta q - dq \delta p) + (C - G) \times (dp \delta r - dr \delta p) + (F - H) \times (dq \delta r - dr \delta q) = 0$, donc $B - D = 0$, $C - G = 0$, $F - H = 0$, ſavoir

$$\left(\frac{dP}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dp}\right), \left(\frac{dP}{dr}\right) = \left(\frac{dR}{dp}\right), \left(\frac{dQ}{dr}\right) = \left(\frac{dR}{dq}\right);$$

c' eſt-à-dire que $P dp + Q dq + R dr$ &c. devra être une diffé-

différentielle complette. Si cette condition a lieu la valeur de $u\,\delta u$ ſera ſimplement $-P\,\delta p - Q\,\delta q - R\,\delta r$ — *&c.*; autrement, il faudra encore tenir compte de l'intégrale $\int(\delta P\,dp - dP\,\delta p + \&c.)$ pour rendre la formule $\int u\,ds$ un vrai *maximum*, ou *minimum*; mais les équations qu'on trouveroit alors ne ſeroient plus les véritables équations du mouvement du corps.

VII.

REMARQUE 2. Ce Problême eſt le ſeul, auquel M. Euler ait appliqué ſon Principe. Il l'a auſſi réſolu pour les deux cas, des coordonnées rectangles, & des rayons partant d'un centre fixe. Mais pour pouvoir comparer ſes ſolutions avec les nôtres, il faut remarquer; 1.° Que M. Euler n'a conſidéré que des courbes à ſimple courbure, 2.° Qu'il n'a cherché le *maximum*, ou le *minimum* de la formule $\int u\,ds$ qu'eu égard à la variabilité de l'ordonnée y dans le premier cas, & à celle de l'angle que nous avons nommé φ, dans le ſecond; *Voïés l'Addition citée au commencement de ce Mémoire.*

Au reſte il eſt clair que par nôtre Méthode on pourra encore varier la ſolution de ce Problême en pluſieurs autres maniéres, ſelon les différentes ſortes de coordonnées qu'on choiſira pour repréſenter la trajectoire cherchée.

VIII.

PROBLEME 2. GÉNÉRAL. Soit un ſiſtème quelconque de pluſieurs corps, M, M', M'' *&c.*, qui ſoient ſollicités par tant de forces centrales qu'on voudra, ſavoir M par les forces P, Q, R *&c.*, M' par les forces P', Q', R' *&c.* M'' par les forces P'', Q'', R'' *&c.*, & qui agiſſent, de plus, les uns ſur les autres par des forces quelconques d'attraction

traction mutuelle; trouver le mouvement de chacun de ces corps.

Solution. Tout se réduit à rendre la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' +$ &c. un *maximum*, ou un *minimum*. On sera donc, suivant notre méthode, $\delta\cdot M\int u\,ds + \delta\cdot M'\int u'\,ds' + \delta\cdot M''\int u''\,ds'' +$ &c. $= 0$. Or $\delta\cdot M\int u\,ds$ $=$ (à cause que M est constant) $M\delta\cdot\int u\,ds = M\int(u\,\delta\,ds + u\,\delta\,u\,dt)$, *Art. I.*, $= \int M(u\,\delta\,ds + u\,\delta\,u\,dt)$. On trouvera de même, en substituant toujours dt pour $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., $\delta\cdot M'\int u'ds' = \int(u'\delta\,ds' + u'\delta\,u'\,dt)$, $\delta\cdot M''\int u''ds'' = \int M''(u''\,\delta\,ds'' + u''\delta\,u''\,dt)$, & ainsi de suite; on aura donc l'équation

(D) ... $\int(M\,u\,\delta\,ds + M'u'\delta\,ds' + M''u''\delta\,ds'' +$ &c. $+ [M\,u\,\delta\,u + M'u'\delta\,u' + M''u''\delta\,u''$ &c.$]\,dt) = 0$.

Maintenant soient p, q, r &c. les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R &c., & p', q', r' &c., p'', q'', r'' &c. celles des autres corps M', M'' &c. aux centres de leurs forces P', Q', R' &c., P'', Q'', R'' &c. Soient, outre cela, f la distance entre le corps M, & le corps M', & F la force, avec laquelle chaque point de l'un attire chaque point de l'autre, & de même f' la distance entre les corps M', M'', & F' leur force d'attraction, & ainsi de suite; soient encore g la distance entre le corps M', & le corps M'', & G leur attraction, & ainsi pour tous les autres corps; on aura par le Principe général de la conservation des forces vives, l'équation

$$M u^2 + M'u'^2 + M''u''^2 + \text{\&c.} = MV^2 + M'V'^2 + M''V''^2 + \text{\&c.} - 2M\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{\&c.}) - 2M'\int(P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{\&c.}) - 2M''\int(P''dp'' + Q''dq'' + R''dr''\ \text{\&c.}) - \text{\&c.} - 2MM'\int F\,df - 2MM''\int F'\,df' - \text{\&c.} - 2M'M''\int G\,dg - \text{\&c.}$$

V, V', V'' &c. étant les vitesses primitives des corps M, M', M'' &c.

Or

Or soit supposé $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r, &c. $P' =$ fonct. p', $Q' =$ fonct. q &c. $F =$ fonct. f, &c. $G =$ fonct. g &c., on trouvera, par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le Prob. 1., l'équation différentielle

$$(V) \ldots \quad M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \&c. = \begin{array}{l} - M\,(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.) \\ - M'\,(P' \delta p' + Q' \delta q' + R' \delta r' + \&c.) \\ - M''\,(P'' \delta p'' + Q'' \delta q'' + R'' \delta r'' + \&c.) \\ - \&c. \\ - M M' F \delta f - M M'' F' \delta f' - \&c. \\ - M' M'' G \delta g - \&c. \end{array}$$

Il faut maintenant trouver les valeurs des différences $\delta d s$, $\delta d s'$, $\delta d s''$ &c., & cette recherche dépend, comme on le voit, de la nature des coordonnées qu'on emploie pour représenter les courbes décrites par chaque corps.

IX.

Premier cas. Soient, comme dans *l'Art. I.*, x, y, z trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du corps M dans un tems quelconque, & soient de même x', y', z', x'', y'', z'' &c. d'autres coordonnées rectangles & paralelles à celles-là pour la position des autres corps M', M'' &c. dans le même tems; on aura, comme dans *l'Art. cité*,

$$\delta d s = \frac{d x d \delta x + d y d \delta y + d z d \delta z}{d s}$$

& de même

$$\delta d s' = \frac{d x' d \delta x' + d y' d \delta y' + d z' d \delta z'}{d s'}$$

$$\delta d s'' = \frac{d x'' d \delta x'' + d y'' d \delta y'' + d z'' d \delta z''}{d s''}$$

& ainsi de suite.

Qu'on

Qu'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (D), & qu'on faſſe diſparoître, comme à l'ordinaire, les différentielles de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c., on aura, en négligeant tous les termes hors du ſigne $\int$, qui peuvent être ſuppoſés nuls par la Remarque de *l'Art. II.*

$$\int(Md \cdot \frac{u\,dx}{ds} \times \delta x + Md \cdot \frac{u\,dy}{ds} \times \delta y + Md \cdot \frac{u\,dz}{ds} \times \delta z$$
$$+ M'd \cdot \frac{u'\,dx'}{ds'} \times \delta x' + M'd \cdot \frac{u'\,\delta y'}{ds'} \times \delta y' + M'd \cdot \frac{u'\,dz'}{ds'} \times \delta z'$$
$$+ M''d \cdot \frac{u''\,dx''}{ds''} \times \delta x'' + M''d \cdot \frac{u''\,dy''}{ds''} \times \delta y'' + M''d \cdot \frac{u''\,dz''}{ds''} \times \delta z''$$
$$+ \quad \&c. \quad \&c.$$
$$- [\,Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' + \&c.\,]\,dt) = 0 \,. \; (E)$$

Il ne s'agira plus maintenant que de ſubſtituer dans cette équation au lieu de $Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' +$ &c. ſa valeur tirée de l'équation (V), & de réduire enſuite les différences δp, δq, δr &c. $\delta p'$, $\delta q'$ &c. δf, $\delta f'$ &c. δg &c. aux différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. par une méthode analogue à celle qu'on a pratiquée dans le Prob. préc.; après quoi, ſi chaque corps eſt entiérement libre, en ſorte que toutes les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. demeurent indéterminées, on fera chacun de leurs coéficiens $= 0$, & l'on aura trois fois autant d'équations, qu'il y a de corps, leſquelles priſes enſemble ſuffiront pour déterminer toutes les viteſſes, & les courbes cherchées: mais ſi un, ou pluſieurs de ces corps ſont forcés de ſe mouvoir ſur des courbes, ou des ſurfaces données, & qu'ils agiſſent de plus, les uns ſur les autres, ſoit en ſe pouſſant, ſoit en ſe tirant par des fils, ou des verges inflexibles, ou de quelque autre maniére que ce ſoit, alors on cherchera les rapports qui devront néceſſairement ſe trouver entre les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. On réduira par-là ces différences au plus petit nombre poſſible, & on fera enſuite chacun de leurs coéficiens $= 0$ ce qui donnera

donnera toutes les équations néceſſaires pour la ſolution du Problême.

X.

Corollaire. Suppoſons le ſiſtème entiérement libre, & que les corps agiſſent les uns ſur les autres d'une maniére quelconque; ſuppoſons, outre cela, que tous les corps ſoient ſollicités par trois forces P, Q, R dirigées parallélement aux coordonnées x, y, z, & qui ſoient les mêmes pour chacun d'eux; on mettra dans l'équation (V) x, y, z à la place de p, q, r, & l'on aura $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' +$ &c. $= - M(P\delta x + Q\delta y + R\delta z) - M'(P'\delta x' + Q'\delta y' + R'\delta z') - M''(P''\delta x'' + Q''\delta y'' + R''\delta z'') -$ &c. $- MM'F\delta f - MM''F'\delta f' -$ &c. $- M'M''G\delta g -$ &c. Cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' +$ &c. étant ſubſtituée dans l'équation (E), ſoit fait $x' = x + X$, $y' = y + Y$, $z' = z + Z$, $x'' = x + X'$, $y'' = y + Y'$, $z'' = z + Z'$ &c., & par conſéquent $\delta x' = \delta x + \delta X$, $\delta y' = \delta y + \delta Y$, $\delta z' = \delta z + \delta Z$, $\delta x'' = \delta x + \delta X'$, $\delta y'' = \delta y + \delta Y'$, $\delta z'' = \delta z + \delta Z'$ &c.; il eſt clair que les lignes f, f', g &c. qui marquent les diſtances des corps entr'eux, dépendront uniquement des lignes X, Y, Z, X', Y', Z' &c. qui déterminent leur poſition reſpective, & qu'ainſi les expreſſions des différences δf, $\delta f'$, δg &c. ne renfermeront aucunement les différences δx, δy, δz; on remarquera de plus que ces mêmes différences δx, δy, δz ſeront abſolument indépendantes de toutes les autres différences δX, δY &c. Car il eſt évident que, l'action mutuelle des corps ne dépendant que de leur poſition reſpective, ſavoir des lignes X, Y, Z, X', Y', Z', X'' &c., il n'y aura que les ſeules différences δX, δY, δZ, $\delta X'$, $\delta Y'$, $\delta Z'$ &c. de

ces mêmes lignes qui ſoient liées entr'elles par des rapports donnés par la nature du Problême ; d'où il s'enſuit que les termes affectés des différences δx, δy, δz dans l'équation (E) devront être chacun en particulier $= 0$; ce qui donnera les trois équations générales.

$$Md \cdot \frac{u\,dx}{ds} + M'd \cdot \frac{u'dx'}{ds'} + M''d \cdot \frac{u''dx''}{ds''} + \&c.$$
$$+ (M + M' + M'' + \&c.)\,P\,dt = 0,$$
$$Md \cdot \frac{u\,dy}{ds} + M'd \cdot \frac{u'dy'}{ds'} + M''d \cdot \frac{u''dy''}{ds''} + \&c.$$
$$+ (M + M' + M'' + \&c.)\,Q\,dt = 0,$$
$$Md \cdot \frac{u\,dz}{ds} + M'd \cdot \frac{u'dz'}{ds'} + M''d \cdot \frac{u''dz''}{ds''} + \&c.$$
$$+ (M + M' + M'' + \&c.)\,R\,dt = 0.$$

Or $\frac{ds}{u} = \frac{ds'}{u'} = \frac{ds''}{u''}\ \&c. = dt$, donc ces équations deviendront celles ci

$$d \cdot \frac{M\,dx + M'dx' + M''dx'' + \&c.}{dt} +$$
$$(M + M' + M'' + \&c.)\,P\,dt = 0,$$
$$d \cdot \frac{M\,dy + M'dy' + M''dy'' + \&c.}{dt} +$$
$$(M + M' + M'' + \&c.)\,Q\,dt = 0,$$
$$d \cdot \frac{M\,dz + M'dz' + M''dz'' + \&c.}{dt} +$$
$$(M + M' + M'' + \&c.)\,R\,dt = 0;$$

D'où l'on voit que ſi on prend à chaque inſtant dans le ſiſtème un point tel, que ſa poſition ſoit déterminée par trois coordonnées, l'une paralléle à x, & $= \frac{Mx + M'x' + M''x'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}$, l'autre paralléle à y, & $= \frac{My + M'y' + M''y'' + \&c.}{M + M' + M''\ \&c.}$, & la troiſiéme paralléle

rallele à z, & $= \frac{Mz + M'z' + M''z'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}$, ce point se mouvra, comme feroit un corps sollicité simplement par les trois forces P, Q, R. Or il est évident que ce point ne sera autre chose que le centre de gravité du sistème, savoir de tous les corps M, M' &c. qui le composent.

X I.

Second cas. Soit pris, comme dans *l'Art. IV.* au lieu des deux coordonnées rectangles x & y, un raïon vecteur x avec un angle φ; & soient de même substitués aux autres coordonnées x', y', x'', y'' &c., les raïons vecteurs x', x'' &c. partant du même point fixe que le raïon x, avec les angles correspondans φ', φ'' &c. pris dans le même plan de l'angle φ; on trouvera, comme dans *l'Art. cité*,

$$\delta ds = \frac{x^2 d\varphi d\delta\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx d\delta x + dz d\delta z}{ds},$$

& de même

$$\delta ds' = \frac{x'^2 d\varphi' d\delta\varphi' + x' d\varphi'^2 \delta x' + dx' d\delta x' + dz' d\delta z'}{ds'}$$

$$\delta ds'' = \frac{x''^2 d\varphi'' d\delta\varphi'' + x'' d\varphi''^2 \delta x'' + dx'' d\delta x'' + dz'' d\delta z''}{ds''},$$

& ainsi des autres. On substituera ces valeurs dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, & pratiquant les mêmes réductions que dans *l'Art. IV.*, elle deviendra

$$\begin{aligned}\int[&M d\cdot\frac{u x^2 d\varphi}{ds} \times \delta\varphi + M\left(d\cdot\frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds}\right)\delta x + M d\cdot\frac{u dz}{ds} \times \delta z \\ &+ M' d\cdot\frac{u' x'^2 d\varphi'}{ds'} \times \delta\varphi' + M'\left(d\cdot\frac{u' dx'}{ds'} - \frac{u' x' d\varphi'^2}{ds'}\right)\delta x' + M' d\cdot\frac{u' dz'}{ds'} \times \delta z' \\ &+ M'' d\cdot\frac{u'' x''^2 d\varphi''}{ds''} \times \delta\varphi'' + M''\left(d\cdot\frac{u'' dx''}{ds''} - \frac{u'' x'' d\varphi''^2}{ds''}\right)\delta x'' + M'' d\cdot\frac{u'' dz''}{ds''} \times \delta z'' \\ &+ \&c. \qquad \&c. \\ &+ (M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \&c.)] = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (F)\end{aligned}$$

 Equa-

Equation, dans laquelle j'ai rejetté tous les termes qui ſont hors du ſigne $\int$, parceque ces termes deviennent évidemment nuls dans la ſuppoſition que le premier & le dernier point de chaque trajectoire ſoient donnés. Or cette équation étant analogue à l'équation (E) de *l'Art. VIII.*; ne demandera plus que des opérations ſemblables, pour trouver le mouvement de chaque corps. On en verra des exemples dans les Problêmes ſuivans.

X I I.

Corollaire. Si le ſiſtème eſt entiérement libre, ou qu'il ſoit ſimplement aſſujetti à ſe mouvoir autour d'un point fixe, & que toutes les forces ſollicitatrices des corps concourent à ce point; prenant ce point pour le centres des raïons vecteurs x, x', x'' *&c.*, & faiſant $\varphi' = \varphi + \Phi$, $\varphi'' = \varphi + \Phi'$ *&c.*, il eſt facile de voir que $\delta\varphi$ ſera abſolument indépendante des autres différences $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$ *&c.*, δx, $\delta x'$, $\delta x''$ *&c.* quelle que ſoit l'action réciproque des corps les uns ſur les autres; il eſt de plus évident que toutes les différences δp, δq, δf *&c.* qui entrent dans la valeur de $M u \delta u + M' u' \delta u'$ *&c.* ſeront auſſi indépendantes de la différence $\delta\varphi$; d'où il s'enſuit que tous les termes de l'équation (F) qui ſe trouveront affectés de la différence $\delta\varphi$ après les ſubſtitutions de $\delta\varphi + \delta\Phi$, $\delta\varphi + \delta\Phi'$ *&c.* à la place de $\delta\varphi'$, $\delta\varphi''$ *&c.* devront être $= 0$ ſéparément du reſte l'équation, on aura donc en général, après avoir effacé le $\delta\varphi$, l'équation

$$Md \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} + M' d \cdot \frac{u' x'^2 d\varphi'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' x''^2 d\varphi''}{ds''}$$

$$+ \,\&c. = 0,$$ dont l'intégrale eſt

$$\frac{M u x^2 d\varphi}{ds} + \frac{M' u' x'^2 d\varphi'}{ds'} + \frac{M'' u'' x''^2 d\varphi''}{ds''}$$

$$+ \,\&c. = \text{conſt.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

où,

où, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., & nommant H la constante

$$M x^2 d\varphi \; M' x'^2 d\varphi' + M'' x''^2 d\varphi'' + \&c. = H dt,$$

& intégrant de nouveau

$$M \int x^2 d\varphi + M' \int x'^2 d\varphi' + M'' \int x''^2 d\varphi'' + \&c. = Ht.$$

Il est visible que l' intégrale $\int x^2 d\varphi$ exprime l'aire que la projection du corps M décrit autour du centre des forces, & que les autres intégrales $\int x'^2 d\varphi'$, $\int x''^2 d\varphi''$ &c. expriment de même les aires décrites par les projections des autres corps M', M'' &c. autour du même centre; donc la somme de chacune de ces aires multipliée par la masse du corps qui la décrit est toujours proportionelle au tems.

Le Lecteur, qui sera curieux de voir une démonstration de ce Théorème tirée des Principes de Mécanique, la trouvera dans un Mémoire de M. le Chevalier d'Arcy, imprimé parmi ceux de l' Académie Roïale des Sciences de Paris pour l' année 1747.; il y trouvera aussi l' usage de ce même Théorème pour résoudre plusieurs questions de Dynamique.

Au reste nous remarquerons que l'équation (G) renferme le Principe que Mrs. Daniel Bernoulli, & Euler ont appellé *la conservation du moment du mouvement circulatoire*, & qui consiste en ce que la somme des produits de chaque corps (M) par sa vitesse circulatoire ($\frac{u x d\varphi}{ds}$) & par sa distance au centre (x) est constante pendant le mouvement du sistème. *Voïés les Mémoires de l'Académie Roïale des Sciences de Berlin pour l' année* 1745., *& les Opuscules de M. Euler imprimés à Berlin en* 1746.

La même équation (G) renferme aussi le Principe de M. le Chevalier d' Arcy, que la somme des produits de chaque corps (M) par sa vitesse (u), & par la perpen-

dicu-

diculaire ménée du centre ſur la direction du corps ($\frac{x^2 d\varphi}{ds}$) fait toujours une quantité conſtante. *Voïés les Mémoires de l'Académie de Paris pour les années* 1749., 1752.

XIII.

Remarque. Il eſt aiſé de trouver, par la méthode que j'ai donné dans la Remarque de *l'Art. VI.*, que l'équation (V) ſera exacte en général toutes les fois que la formule $-M(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.) - M'(P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \&c.) - \&c.$ qui exprime la valeur de $Mu\,du$ $M'u'\,du' + M''u''\,du'' + \&c.$, ſera une différentielle complette. Dans tous les autres cas cette équation ne pourra plus ſervir à trouver les conditions de la *maximité*, ou de la *minimité* de la formule intégrale $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \&c.$; mais elle ſervira toujours également pour trouver les mouvemens des corps M, M' M'' &c., quelles que ſoient les forces dont ils ſont animés. Ainſi ſans s'embaraſſer que la formule dont nous parlons ſoit réellement un *maximum*, ou un *minimum*, on pourra toujours emploïer l'équation (V) dans quelque hipotéſe de forces que ce ſoit.

XIV.

Probleme 3. Trois corps M, M', M'' s'attirent mutuellement par des forces d'attraction F, F', G; trouver les orbites des corps M', M'' par rapport au corps M regardé comme en repos.

Solution. Les mêmes noms étant conſervés que dans *l'Art. IX.* on fera de plus, comme dans *l'Art. X.*, $x' = x + X$, $y' = y + Y$ &c., & l'on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ $ds' = \sqrt{[(dx + dX)^2 + (dy + dY)^2 + (dz + dZ)^2]}$

ds''.

$ds'' = \sqrt{[(dx + dX')^2 + (dy + dY')^2 + (dz + dZ')^2]}$, d'où l'on tirera, par la différentiation, les valeurs de δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, qu'il faudra ſubſtituer dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*

Mais pour mieux repréſenter les orbites rélatives des corps M', M'', ſoient pris, au lieu des coordonnées rectangles X, Y, X', Y', deux rayons vecteurs r, r', avec deux angles correſpondans φ, φ', tels que l'on ait $X = r \cos. \varphi$, $Y = r \sin. \varphi$, $X' = r' \cos. \varphi'$, $Y' = r' \sin. \varphi'$; aïant fait ces ſubſtitutions dans les valeurs de ds', ds'', on aura $ds' = \sqrt{(ds^2 + 2\,dx\,d \cdot r \cos. \varphi + 2\,dy\,d \cdot r \sin. \varphi + r^2 d\varphi^2 + dr^2 + 2\,dz\,dZ + dZ^2)}$,
$ds'' = \sqrt{(ds^2 + 2\,dx\,d \cdot r' \cos. \varphi' + 2\,dy\,d \cdot r' \sin. \varphi' + r'^2 d\varphi'^2 + dr'^2 + 2\,dz\,dZ' + dZ'^2)}$.

Maintenant, ſi l'on veut regarder l'orbite du corps M comme connue, on prendra les différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, en ſuppoſant dx, dy, dz conſtantes; on aura $\delta ds = 0$; $\delta ds' = [dx\,\delta d \cdot r \cos. \varphi + dy\,\delta d \cdot r \sin. \varphi + r^2 d\varphi\,\delta d\varphi + r\,d\varphi^2 \delta r + dr\,\delta dr + (dz + dZ)\,\delta dZ] : ds'$;
$\delta ds'' = [dx\,\delta d \cdot r' \cos. \varphi' + dy\,\delta d \cdot r' \sin. \varphi' + r'^2 d\varphi'\,\delta d\varphi' + r'\,d\varphi'^2 \delta r' + dr'\,\delta dr' + (dz + dZ')\,\delta dZ'] : ds''$.

Avant que de faire ces ſubſtitutions dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, je remarque que les corps M', M'' dont on cherche le mouvement, étant entiérement libres par l'hipotéſe du Problême, les différences de leurs coordonnées δr, $\delta \varphi$, δZ, $\delta r'$, $\delta \varphi'$, $\delta Z'$ ſont néceſſairement indépendantes entr'elles; d'où il s'enſuit qu'on peut faire pour chacun de ces corps un calcul à part, en ne conſidérant à la fois que les variations des trois coordonnées r, φ, Z, ou r', φ', Z'.

Qu'on ne prenne d'abord que les trois premiéres r, φ, Z pour variables; il eſt clair qu'on aura $\delta ds = 0$; par conſéquent l'équation mentionnée deviendra ſimplement

$\int [M' u' \delta ds' + (M u \delta u + M' \delta u' + M'' \delta u'' + \&c.) dt] = 0.$

Pour appliquer cette équation au Problême préſent, on commencera par ſubſtituer, à la place de $\delta ds'$, ſa valeur trouvée ci-deſſus, en y mettant, pour plus de ſimplicité, au lieu de $\frac{ds'}{u'}$ ſon égale dt; enſuite on intégrera par parties tous les termes qui renfermeront des différences affectées du double ſigne δd, après avoir changé ce ſigne dans ſon équivalent $d\delta$; cette opération donnera les tranſformées ſuivantes

$$\int \frac{dx d\delta \cdot r \operatorname{coſ.} \varphi}{dt} = \frac{dx \delta \cdot r \operatorname{coſ.} \varphi}{dt} - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta \cdot r \operatorname{coſ.} \varphi$$

$$= \frac{dx}{dt} (\operatorname{coſ.} \varphi \delta r - r \operatorname{ſin.} \varphi \delta \varphi) - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\operatorname{coſ.} \varphi \delta r - r \operatorname{ſin.} \varphi \delta \varphi) =$$

(en rejettant les termes qui ſont hors du ſigne d'intégration, & qui s'évanoüiſſent toujours dans l'hipotéſe de *l'Art. II.*) $- \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\operatorname{coſ.} \varphi \delta r - r \operatorname{ſin.} \varphi \delta \varphi)$, & de même

$$\int \frac{dy d\delta r \operatorname{ſin.} \varphi}{dt} = - \int d \cdot \frac{dy}{dt} \times (\operatorname{ſin.} \varphi \delta r + r \operatorname{coſ.} \varphi \delta r)$$

$$\int \frac{r^2 d\varphi d\delta \varphi}{dt} = - \int d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} \times \delta \varphi$$

$$\int \frac{dr \delta dr}{dt} = - \int d \cdot \frac{dr}{dt} \times \delta r$$

$$\int \frac{(dz + dZ) d\delta Z}{dt} = - \int d \cdot \frac{dz + dZ}{dt} \times \delta Z.$$

En joignant enſemble toutes ces tranſformées, & y ajoutant le terme $\int \frac{r d\varphi^2}{dt} \delta r$, on aura la valeur de $\int u' \delta ds'$ exprimée par la formule ſuivante

$$\int [(r \operatorname{ſin.} \varphi d \cdot \frac{dx}{dt} - r \operatorname{coſ.} \varphi d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt}) \delta \varphi -$$

— (coſ.

$(\text{cof. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{fin. } \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{r^2 d\varphi^2}{dt}) \delta r -$
$d \cdot \frac{dz + dZ}{dt} \times \delta Z$].

A préfent, pour avoir la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, on fera dans l'équation (V) de *l'Art. VIII.* toutes les quantités P, Q, R, P', Q' *&c.* qui repréfentent des forces étrangéres $= 0$, & l' on aura

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = - MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g.$$

Or il eft facile de trouver que $f = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \sqrt{(r^2 + Z^2)}$, $f' = \sqrt{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)} = \sqrt{(r'^2 + Z'^2)}$, $g = \sqrt{[(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2]} = \sqrt{[r'^2 + r^2 - 2r'r \text{ cof. } (\varphi' - \varphi) + (Z' - Z)^2]}$; d' où l' on tirera, en regardant toujours φ', r', & Z' comme conftantes, $\delta f = \frac{r\delta r + Z\delta Z}{f}$, $\delta f' = 0$, $\delta g = \frac{r - r' \text{ cof. } (\varphi' - \varphi)}{g}\delta r - \frac{r'r \text{ fin. } (\varphi' - \varphi)}{g}\delta\varphi - \frac{Z' - Z}{g}\delta Z$.

Aïant fait ces fubftitutions, on ajoutera enfemble les valeurs de $M'\int\delta ds'$, & de $Mudu + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, & l' on aura une formule intégrale, dont chaque terme contiendra une des différences $\delta\varphi$, δr, δZ, & qui devra être $= 0$, quelles que foient les valeurs de ces différences. On trouvera donc, en faifant féparément $= 0$ chacun de leurs coéficiens, & divifant par M'

$$- d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} + r \text{ fin. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} - r \text{ cof. } \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r'r \text{ fin. } (\varphi' - \varphi)}{g} M''G dt = 0.$$

$$d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{rd\varphi^2}{dt} + \text{cof. } \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{fin. } \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} MF dt$$

$$+ \frac{r - r' \operatorname{cos.} (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt = 0;$$

$$d \cdot \frac{dz + dZ'}{dt} - \frac{Z' - Z}{g} M'' G dt = 0.$$

Equations qui ſe réduiſent à la forme de celles de *l'Art. IV.* en ſuppoſant

$$r \operatorname{ſin.} \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} - r \operatorname{coſ.} \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r r' \operatorname{ſin.} (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt$$

$$= - \pi dt;$$

$$\operatorname{coſ.} \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \operatorname{ſin.} \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} M F dt +$$

$$\frac{r - r' \operatorname{coſ.} (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt = \Pi dt;$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{Z' - Z}{g} M'' G dt = \Psi dt.$$

Et ces équations ſuffiront pour déterminer l'orbite du corps M', en ſuppoſant connues les orbites des deux autres corps M, M''.

Qu'on faſſe maintenant, dans les expreſſions de $\delta ds'$, $\delta ds''$, $\delta f'$, δg, les changeantes r', φ', Z' variables au lieu des r, φ, Z; on trouvera, par des raiſonnemens, & des opérations ſemblables aux précédentes, trois autres équations, qui ne différeront des équations ci-deſſus, que parce qu'il y aura r', φ', Z' à la place de r, φ, Z, & réciproquement, & ces équations ſeront celles de l'orbite du corps M''.

X V

Corollaire. Si on ne connoiſſoit pas l'orbite abſolue du corps M, alors, pour déterminer les valeurs des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, il faudroit auſſi faire varier les trois changeantes x, y, z, dans les valeurs de ds, ds', ds''; ce qui donneroit

δds

$\delta ds = (dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz) : ds$
$\delta ds' = [(dx + d \cdot r\,\text{cos}.\,\varphi)\,\delta dx + (dy + d \cdot r\,\text{sin}.\,\varphi)\,\delta dy + (dz + dZ)\,\delta dz] : ds'$
$\delta ds'' = [(dx + d \cdot r'\,\text{cos}.\,\varphi')\,\delta dx + (dy + d \cdot r'\,\text{sin}.\,\varphi')\,\delta dy + (dz + dZ')\,\delta dz] : ds''$.

On ſubſtitueroit ces valeurs dans l'équation générale (D) de *l'Art. VIII.*, & faiſant, après les réductions ordinaires, les trois coéficiens de δx, δy, δz chacun $= 0$, on auroit trois équations, par leſquelles on pourroit déterminer les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Au reſte ces équations reviendroient au même que celles de *l'Art. X.* en y faiſant $P, Q, R = 0$.

X V I.

Corollaire 2. Les équations, qu'on trouveroit par la méthode du Corollaire précédent, ne renfermeroient point les forces F, F', G, mais ſeulement les changeantes r, φ, r', φ' avec leurs différences; mais, pour ne pas trop charger de différentielles les équations du mouvement des corps M', M'', il ſera mieux de chercher les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en conſidérant directement les orbites abſolues de ces deux corps.

Que x', y', z', x'', y'', z'' ſoient les ordonnées rectangles des orbites, dont nous parlons; on parviendra à une équation qui ſera la même que l'équation (E) du Prob. 2., & dans laquelle, à cauſe que les corps ſont libres, il faudra faire les coéficiens de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. chacun $= 0$. Or il eſt facile de trouver que $f = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$, $f' = \sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]}$, $g = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$; pour notre cas il ſuffit de

 faire

faire varier x, y, z feulement ; on aura donc $\delta f = -\frac{x' - x}{f}\delta x - \frac{y' - y}{f}\delta y - \frac{z' - z}{f}\delta z$, $\delta f' = -\frac{x'' - x}{f'}\delta x - \frac{y'' - y}{f'}\delta y - \frac{z'' - z}{f'}\delta z$, $\delta g = 0$. On fubftituera ces valeurs dans l'expreffion $- MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g$, & l'on aura (à caufe de $x' - x = X = r \operatorname{cof.} \varphi$, $y' - y = Y = r \operatorname{fin.} \varphi$, $z' - z = Z$, $x'' - x = X' = r' \operatorname{cof.} \varphi'$, $y'' - y = Y' = r' \operatorname{fin.} \varphi'$, $z'' - z = Z'$)

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = M\left(\frac{M'Fr\operatorname{cof.}\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\operatorname{cof.}\varphi'}{f'}\right)\delta x + M\left(\frac{M'Fr\operatorname{fin.}\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\operatorname{fin.}\varphi'}{f'}\right)\delta y + M\left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'}\right)\delta z.$$

Mettant cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ dans l'équation (E), & faifant féparément $= 0$ chacun des trois coéficiens de δx, δy, δz ; il viendra, après avoir divifé le tout par M, & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$d \cdot \frac{dx}{dt} - \left(\frac{M'Fr\operatorname{cof.}\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\operatorname{cof.}\varphi'}{f'}\right)dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dy}{dt} - \left(\frac{M'Fr\operatorname{fin.}\varphi}{f} + \frac{M''F'r'\operatorname{fin.}\varphi'}{f'}\right)dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} - \left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'}\right)dt = 0.$$

Par-là les valeurs de π, Π, Ψ de *l'Art. XIV.* deviendront, après quelques réductions fort fimples.

$$M''\left(\frac{G}{g} - \frac{F'}{f'}\right) rr' \operatorname{fin.}(\varphi' - \varphi) = -\pi$$

$$(M + M')\frac{Fr}{f} + M''\left(\frac{G}{g} \times [r - r' \operatorname{cof.}(\varphi' - \varphi)]\right.$$

+

$$+ \frac{F'}{f'} \times r \text{ cos. } (\varphi' - \varphi) \Big) = \Pi$$

$$M' \frac{FZ}{f} + M'' \left[\frac{F'Z'}{f'} - \frac{G(Z' - Z)}{g} \right] = \Psi.$$

X V I I.

Probleme 4. Un corps M étant sollicité par tant des forces qu'on voudra P, Q, R &c., & tirant après lui deux autres corps M', M'' par le moïen de deux fils de longueurs données; trouver le mouvement de chacun de ces trois corps. On suppose pour plus de simplicité, qu'ils se meuvent tous trois dans le même plan.

Solution. Soient f, f' les longueurs données des fils, c'est-à-dire les distances invariables des corps M', M'' au corps M; x, y les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps M, & φ, φ' les angles que les lignes f, f' forment à chaque instant avec l'axe des x; prenant x', y', x'', y'' pour les coordonnées rectangles des autres corps M', M'', on aura $x' = x - f \text{ cos. } \varphi$, $y' = y - f \text{ sin. } \varphi$, $x'' = x - f' \text{ cos. } \varphi'$, $y'' = y - f' \text{ sin. } \varphi'$; $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2 + 2f(\text{sin. } \varphi\, dx - \text{cos. } \varphi\, dy)\, d\varphi + f^2 d\varphi^2$, $ds''^2 = dx''^2 + dy''^2 = dx^2 + dy^2 + 2f'(\text{sin. } \varphi'\, dx - \text{cos. } \varphi'\, dy)\, d\varphi' + f'^2 d\varphi'^2$; d'où l'on tire

$\delta ds = (dx\, \delta dx + dy\, \delta dy) : ds$;

$\delta ds' = [(dx + f \text{ sin. } \varphi\, d\varphi)\, \delta dx + (dy - f \text{ cos. } \varphi\, d\varphi)\, \delta dy + f d\varphi (\text{cos. } \varphi\, dx + \text{sin. } \varphi\, dy)\, \delta \varphi + f(\text{sin. } \varphi\, dx - \text{cos. } \varphi\, dy + f d\varphi)\, \delta d\varphi] : ds'$;

$\delta ds'' = [(dx + f' \text{ sin. } \varphi'\, d\varphi')\, \delta dx + (dy - f' \text{ cos. } \varphi'\, d\varphi')\, \delta dy + f' d\varphi' (\text{cos. } \varphi'\, dx + \text{sin. } \varphi'\, dy)\, \delta \varphi' + f'(\text{sin. } \varphi'\, dx - \text{cos. } \varphi'\, dy + f' d\varphi')\, \delta d\varphi'] : ds''$.

On substituera ces valeurs dans les intégrales $\int u\, \delta ds$, $\int u'\, \delta ds'$, $\int u''\, \delta ds''$ de l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, & faisant

faisant les transformations, & les réductions ordinaires, on trouvera

$$\int u\,\delta\,ds = -\int\left(d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta x + d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta y\right)$$

$$\int u'\,\delta\,ds' = -\int\Big(d\cdot\frac{dx + f\,\text{fin.}\,\varphi\,d\varphi}{dt}\times\delta x +$$

$$d\cdot\frac{dy - f\,\text{cof.}\,\varphi\,d\varphi}{dt}\times\delta y - \Big[\frac{\text{cof.}\,\varphi\,dx + \text{fin.}\,\varphi\,dy}{dt}\,f\,d\varphi$$

$$-\,d\cdot\frac{\text{fin.}\,\varphi\,dx - \text{cof.}\,\varphi\,dy + f\,d\varphi}{dt}\,f\Big]\,\delta\varphi\Big).$$

Et l'on aura pour $\int u''\,\delta\,ds''$ la même expression que pour $\int u'\,\delta\,ds'$ en marquant seulement d'un trait les lettres φ & f; comme il est aisé de s'en assurer par le calcul.

Pour avoir maintenant la valeur de $Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u''$ on aura recours à l'équation générale (V) de l'*Art. VIII.*, laquelle donnera pour le cas présent $Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' = -M(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r) =$, en faisant les mêmes suppositions que dans l'*Art. I.*, $-M(\Pi\,\delta x + \pi\,\delta y)$.

Il n'y a plus qu'à mettre ces différentes transformées dans l'équation (D); or si l'on fait pour abréger

$$M\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right) + M'\,d\cdot\frac{1}{dt}(dx + f\,\text{fin.}\,\varphi\,d\varphi)$$

$$+\,M''\,d\cdot\frac{1}{dt}(dx + f'\,\text{fin.}\,\varphi'\,d\varphi') = [x]$$

$$M\left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\,dt\right) + M'\,d\cdot\frac{1}{dt}(dy - f\,\text{cof.}\,\varphi\,d\varphi)$$

$$+\,M''\,d\cdot\frac{1}{dt}(dx - f'\,\text{cof.}\,\varphi'\,d\varphi') = [y]$$

$$\frac{M'f\,d\varphi}{dt}(\text{cof.}\,\varphi\,dx + \text{fin.}\,\varphi\,dy) - M'\,d\cdot\frac{f}{dt}(\text{fin.}\,\varphi\,dx$$
$$-\,\text{cof.}\,\varphi\,dy + f\,d\varphi) = [\varphi]$$

$$\frac{M''f'\,d\varphi'}{dt}(\text{cof.}\,\varphi'\,dx + \text{fin.}\,\varphi'\,dy) - M''\,d\cdot\frac{f'}{dt}(\text{fin.}\,\varphi'\,dx$$
$$-\,\text{cof.}\,\varphi'\,dy + f'\,d\varphi') = [\varphi'].$$

On

on trouve

$$\int([x]\delta x+[y]\delta y-[\varphi]\delta\varphi-[\varphi']\delta\varphi)=0\ldots(H)$$

D' où l' on tire par notre méthode

$$[x]=0,\ [y]=0,\ [\varphi]=0,\ [\varphi']=0.$$

Quatre équations qui ſuffiront pour déterminer le rapport des indéterminées x, y, φ, φ' au tems t, & par conſéquent le mouvement de chacun de trois corps M, M'', M''.

XVIII.

Corollaire 1. Si le corps M étoit mu dans une rainure courbe repréſentée par l'équation $dy = m dx$; alors il n'y auroit qu'à mettre, dans l'équation (H), $m\delta x$ pour δy, & faire enſuite chacun, des trois coéficiens de δx, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, $= 0$; ce qui donneroit pour les équations du mouvement des corps

$$[x]+m[y]=0,\ [\varphi]=0,\ [\varphi']=0.$$

Si le corps M étoit, outre cela, obligé de ſe mouvoir avec une viteſſe, dont la loi à chaque point de la courbe fût donnée; alors, comme le mouvement de ce corps ſeroit entiérement donné, on auroit $\delta x = 0$, & $\delta y = 0$; c'eſt pourquoi il faudroit ſupprimer les équations $[x] = 0$, & $[y] = 0$, & mettre, dans les deux autres $[\varphi] = 0$, $[\varphi'] = 0$, au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

XIX.

Corollaire 2. Suppoſons que les trois corps M, M', M'', au lieu de ſe tenir par de fils, ſoient attachés à une verge inflexible, enſorte que l'angle des lignes f, f' ſoit conſtant, & $= \alpha$; on aura donc en ce cas $\varphi' = \varphi + \alpha$, & $\delta\varphi' = \delta\varphi$; ainſi il ne faudra qu'écrire, dans l'équation (H), $\varphi + \alpha$ pour φ', & $\delta\varphi$ pour $\delta\varphi$, & faiſant

enſuite

ensuite les coéficiens de δx, δy, $\delta \varphi$ chacun en particulier $= 0$, on aura

$$[x] = 0, \ [y] = 0, \ [\varphi] + [\varphi'] = 0.$$

X X.

Corollaire 3. Si on veut de plus, dans le cas du Corollaire précédent, que le corps *M* se meuve dans une rainure courbe dont l'équation soit $dy = m dx$; mettant, comme dans *l'Art. XVIII.* $m \delta x$ au lieu de δy, & faisant $= 0$ les coéficiens de δx, & $\delta \varphi$, on aura simplement les deux équations

$$[x] + m[y] = 0, \ \& \ [\varphi] + [\varphi'] = 0.$$

Mais si la vitesse du corps *M* est aussi donnée; en ce cas δx, & δy étant nuls, il ne restera que l'équation $[\varphi] + [\varphi'] = 0$, dans laquelle il faudra mettre au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

X X I.

Corollaire 4. Si les corps *M'*, *M''* étoient liés par un même fil, de longueur donnée, le long duquel l'autre corps *M* pût couler librement par le moïen d'un anneau: on pourroit résoudre le Problême de la même maniére en faisant les quantités f, f' variables dans les expressions de ds', ds'', & de leurs différences $\delta ds'$, $\delta ds''$.

Pour cela il n'y auroit qu'à augmenter la valeur de ds'^2 trouvée ci-dessus (*Art. XVII.*) de la quantité $- 2(\text{cos}. \varphi dx + \text{sin}. \varphi dy) df + df^2$, & ensuite celle de $\delta ds'$ de la quantité $(\text{sin}. \varphi dx - \text{cos}. \varphi dy + f d\varphi) d\varphi \delta f - (\text{cos}. \varphi dx + \text{sin}. \varphi dy - df) \delta df + (\text{sin}. \varphi dx - \text{cos}. \varphi dy) df \delta \varphi - \text{cos}. \varphi df \delta dx - \text{sin}. \varphi df \delta dy$, divisée par ds'; c'est pourquoi la valeur de la formule intégrale $\int u' \delta ds'$ seroit augmentée

mentée de $\int\left(d \cdot \frac{\text{cof.}\ \varphi\, df}{dt} \times \delta x + d \cdot \frac{\text{fin.}\ \varphi\, df}{dt} \times \delta y \right.$ $+ \frac{df}{dt}\,(\text{fin.}\ \varphi\, dx - \text{cof.}\ \varphi\, dy)\,\delta\varphi + [\,\frac{d\varphi}{dt}\,(\text{fin.}\ \varphi\, dx -$ $\text{cof.}\ \varphi\, dy + f d\varphi) + d \cdot \frac{1}{dt}\,(\text{cof.}\ \varphi\, dx + \text{fin.}\ \varphi\, dy$ $\left. - df)\,]\,\delta f \right)$.

Et l' autre formule intégrale $\int u''\delta ds''$ feroit auffi augmentée de la même quantité, en marquant feulement d'un trait les deux lettres φ & f. Par-là l'équation (H) deviendroit de cette forme

(I) . . . $-\int[\,(x)\,\delta x + (y)\,\delta y - (\varphi)\,\delta\varphi - (\varphi')\,\delta\varphi' + (f)\,\delta f + (f')\,\delta f'\,] = 0$, dans laquelle

$$(x) = [x] - d \cdot \frac{\text{cof.}\ \varphi\, df}{dt} - d \cdot \frac{\text{cof.}\ \varphi'\, df'}{dt}$$

$$(y) = [y] - d \cdot \frac{\text{fin.}\ \varphi\, df}{dt} - d \cdot \frac{\text{fin.}\ \varphi'\, df'}{dt}$$

$$(\varphi) = [\varphi] + \frac{df}{dt}\,(\text{fin.}\ \varphi\, dx - \text{cof.}\ \varphi\, dy)$$

$$(\varphi') = [\varphi'] + \frac{df'}{dt}\,(\text{fin.}\ \varphi' dx - \text{cof.}\ \varphi' dy)$$

$$(f) = \frac{d\varphi}{dt}\,(\text{fin.}\ \varphi\, dx - \text{cof.}\ \varphi\, dy + f d\varphi)$$
$$+ d \cdot \frac{1}{dt}\,(\text{cof.}\ \varphi\, dx + \text{fin.}\ \varphi\, dy - df)$$

$$(f') = \frac{d\varphi'}{dt}\,(\text{fin.}\ \varphi' dx - \text{cof.}\ \varphi' dy + f' d\varphi')$$
$$+ d \cdot \frac{1}{dt}\,(\text{cof.}\ \varphi' dx + \text{fin.}\ \varphi' dy - df').$$

Maintenant, les deux corps M', M'' étant attachés fixement aux extrémités du fil qui eft fuppofé inextenfibles, il faut que la fomme des lignes f, & f' foit conftante; foit cette fomme, c' eft-à-dire, la longueur totale du fil $= a$,

$= a$, on aura $f' = a - f$, & $\delta f' = - \delta f$; on fera donc ces ſubſtitutions dans l'équation (I), & mettant enſuite $= 0$ les coéficiens des différences reſtantes δx, δy, $\delta \varphi$, $\delta \varphi'$, δf, on aura les cinq équations

$(x) = 0$, $(y) = 0$, $(\varphi) = 0$, $(\varphi) = 0$, $(f) - (f') = 0$, leſquelles donneront le rapport des cinq indéterminée x, y, φ, φ', f au tems t.

XXII.

Corollaire 5. Si le corps M étoit fixe, ou, ce qui revient au même, ſi le fil qui joint les deux corps M', M'' paſſoit à travers un anneau immobile, on auroit pour lors dx, dy, & δx, $\delta y = 0$, & les équations du mouvement des deux corps feroient

$(\varphi) = 0$, $(\varphi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; ſavoir, à cauſe que $dx = 0$, $dy = 0$, & $f' = a - f$,

$$d \cdot \frac{f^2 d\varphi}{dt} = 0, \quad d \cdot \frac{(a - f)^2 d\varphi'}{dt} = 0, \quad \&$$

$$\frac{f(d\varphi^2 + d\varphi'^2) - a d\varphi'^2}{dt} + 2 d \cdot \frac{df}{dt} = 0.$$

Les deux premiéres équations étant intégrées, donneront $d\varphi^2 = \frac{A dt^2}{f^4}$, $d\varphi'^2 = \frac{B dt^2}{(a - f)^4}$; & ces valeurs ſubſtituées dans la troiſiéme, on aura

$\frac{A\,dt}{f^3} - \frac{B\,dt}{(a - f)^3} + 2 d \cdot \frac{df}{dt} = 0$, laquèlle étant multipliée par $\frac{df}{dt}$, & enſuite intégrée devient

$-\frac{A}{2 f^2} + \frac{B}{2(a - f)^2} + \frac{df^2}{dt^2} = C$, d'où l'on tire

$$dt = \frac{df}{\sqrt{\left(C + \frac{A}{2 f^2} - \frac{B}{2(a - f)^2}\right)}}.$$

X X I I I.

Corollaire 6. Si dans le cas du Corollaire précédent les deux corps M', M'' étoient attachées à une verge droite, & inflexible; alors on auroit $\varphi' = \varphi$, & $\delta\varphi' = \delta\varphi$; & les équations $(\varphi) = 0$, $(\varphi') = 0$ n'en feroient plus qu'une feule, favoir $(\varphi) + (\varphi') = 0$; on auroit donc fimplement les deux équations $(\varphi) + (\varphi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; c'eft-à-dire $d \cdot \frac{(a^2 - 2af^2 + 2f^2)\, d\varphi}{dt} = 0$, & $\frac{(2f - a)\, d\varphi^2}{dt} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0$; lefquelles donnent, en chaffant dt, $\frac{(2f - a)\, d\varphi}{a^2 - 2af + 2f^2} + 2d \cdot \frac{df}{(a^2 - 2af + 2f^2)\, d\varphi} = 0$.

Cette équation étant multipliée par $\frac{df}{a^2 - 2af + 2f^2}$, & enfuire intégrée, en regardant $d\varphi$ comme conftante, deviendra celle-ci

$$\frac{d\varphi}{2(a^2 - 2af + 2f^2)} + \frac{df^2}{(a^2 - 2af + 2f^2)^2\, d\varphi} = \frac{d\varphi}{A^2},$$ qui fe réduit à

$$d\varphi = \frac{A\, df \sqrt{2}}{\sqrt{(2[a^2 - 2af + 2f^2]^2 - A^2[a^2 - 2af + 2f^2])}}$$

X X I V.

Probleme 5. Trouver le mouvement d'un fil fixe en une de fes extrémités, & chargé de tant de corps pefants qu'on voudra M, M', M'' *&c.*

Solution. Aïant pris comme dans *l'Art. IX.*, x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' *&c.* pour les coordonnées rectangles des corps M, M', M'' *&c.*, on a d'abord l'équation (E). Soit maintenant f la portion du fil interceptée entre l'extrémité fixe, & le corps M; foient auffi f', f'' *&c.* les

portions du même fil interceptées entre les corps M & M', M' & M'', & ainsi de suite ; on aura les équations

$$f = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$
$$f' = \sqrt{([x' - x]^2 + [y' - y]^2 + [z' - z]^2)}$$
$$f'' = \sqrt{([x'' - x']^2 + [y'' - y']^2 + [z'' - z']^2)}$$
&c. *&c.*

l'origine des abscisses x, x', x'' *&c.* étant à l'extrémité fixe du fil. On tire de là

$$x = \sqrt{(f^2 - y^2 - z^2)}$$
$$x' = x + \sqrt{(f'^2 - [y' - y]^2 - [z' - z]^2)}$$
$$x'' = x' + \sqrt{(f''^2 - [y'' - y']^2 - [z'' - z']^2)}$$
&c. *&c.*

& par conséquent

$$\delta x = -\frac{1}{x}[y\delta y + z\delta z]$$

$$\delta x' = \delta x - \frac{1}{x' - x}[(y' - y)\times(\delta y' - \delta y) + (z' - z)\times(\delta z' - \delta z)]$$
$$= \left(\frac{y' - y}{x' - x} - \frac{y}{x}\right)\delta y - \frac{y' - y}{x' - x}\delta y'$$
$$+ \left(\frac{z' - z}{x' - x} - \frac{z}{x}\right)\delta z - \frac{z' - z}{x' - x}\delta z$$

$$\delta x'' = \delta x' - \frac{1}{x'' - x'}[(y'' - y')\times(\delta y'' - \delta y') + (z'' - z')\times(\delta z'' - \delta z')]$$
$$= \left(\frac{y' - y}{x' - x} - \frac{y}{x}\right)\delta y + \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y' - y}{x' - x}\right)\delta y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\delta y''$$
$$+ \left(\frac{z' - z}{x' - x} - \frac{z}{x}\right)\delta z + \left(\frac{z'' - z'}{x'' - x'} - \frac{z' - z}{x' - x}\right)\delta z' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}\delta z'',$$

& ainsi de suite.

Maintenant, si on suppose (ce qui est absolument arbitraire) l'axe des x, x', x'' *&c.* vertical ; & que P exprime la pésanteur absolue des corps ; il faudra mettre dans l'équation (V) de *l'Art. VIII.* δx, $\delta x'$, $\delta x''$ *&c.* au lieu de δp, $\delta p'$, $\delta p''$ *&c.*, $-P$ au lieu de P, P', P'' *&c.*, & toutes les autres forces Q, R, Q' *&c.* égales à zéro ; on aura donc

Mu δu

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.$$
$$= P(M\delta x + M'\delta x' + M''\delta x'' + \&c.)$$

Faisant ces ſubſtitutions dans l'équation (E) cité ci-devant, & ordonnant les termes, elle deviendra de la forme ſuivante

$$\int([y]\delta y + [y']\delta y' + [y'']\delta y'' + \&c. +$$
$$[z]\delta z + [z']\delta z' + [z'']\delta z'' + \&c.) = 0,$$

dans laquelle on aura, après avoir mis au lieu de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c. leur valeur commune dt,

$$[y] = M\left[d\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{y}{x}\left(Pdt - d\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right] - \left[\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right] \times \left[M'\left(Pdt - d\cdot\frac{dx'}{dt}\right) + M''\left(Pdt - d\cdot\frac{dx''}{dt}\right) + M'''\left(Pdt - d\cdot\frac{dx'''}{dt}\right) + \&c.\right]$$

$$[y'] = M'\left[d\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{y'-y}{x'-x}\left(Pdt - d\cdot\frac{dx'}{dt}\right)\right] - \left[\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x}\right] \times \left[M''\left(Pdt - d\cdot\frac{dx''}{dt}\right) + M'''\left(Pdt - d\cdot\frac{dx'''}{dt}\right) + \&c.\right]$$

$$[y''] = M''\left[d\cdot\frac{dy''}{dt} + \frac{y''-y'}{x''-x'}\left(Pdt - d\cdot\frac{dx''}{dt}\right)\right] - \left[\frac{y'''-y''}{x'''-x''} - \frac{y''-y'}{x''-x'}\right] \times \left[M'''\left(Pdt - d\cdot\frac{dx'''}{dt}\right) + \&c.\right]$$

&c. &c.

& les valeurs de $[z]$, $[z']$, $[z'']$ &c. feront les mêmes que celles de $[y]$, $[y']$, $[y'']$ &c., en y mettant ſimplement z, z', z'' &c. au lieu de y, y', y'' &c.

On fera donc ſuivant notre méthode

$$[y] = 0,\ [y'] = 0,\ [y''] = 0\ \&c.$$
$$[z] = 0,\ [z'] = 0,\ [z''] = 0\ \&c.$$

Equa-

Equations qui, avec celles qu'on a trouvé plus haut, suffiront pour résoudre le Problême.

XXV.

Corollaire. Soient les corps M, M', M'' &c. infiniment petits, & placés à des distances égales les uns des autres; marquant par la lettre d la différence de deux coordonnées consécutives quelconques, on aura en général $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, & $\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x} = \mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Soit chaque petit poids, dont le fil est chargé, dm; soit de plus la somme des valeurs de $dm\,(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt})$ pour toute la longueur du fil désignée par $T\,dt$, & la somme indéfinie des mêmes valeurs prise rélativement à l'abscisse x, marquée par la lettre S de cette maniére $\mathrm{S}\,dm\,(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt})$; il est facile de voir que les équations $(y) = 0$, $(y') = 0$, $(y'') = 0$ &c. se réduiront toutes à celle-ci générale

$$dm\left[d\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right] - \mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times\left[T\,dt - \mathrm{S}\,dm\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right] = 0;$$

que de même les équations $(z) = 0$, $(z') = 0$, $(z'') = 0$ &c. se changeront en

$$dm\left[d\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right] - \mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\times\left[T\,dt - \mathrm{S}\,dm\left(P\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right] = 0.$$

Ce seront donc ces deux équations qui serviront à déterminer le mouvement du fil; mais il y faudra encore ajouter une troisiéme équation qui se déduira de ce que chaque élément

ment du fil, dont l' expression générale est $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, doit démeurer constant, pendant que le fil varie de courbe. Cette équation sera donc

$$\frac{d \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt} = 0, \text{ savoir}$$

$$dx \left(\frac{ddx}{dt}\right) + dy \left(\frac{ddy}{dt}\right) + dz \left(\frac{ddz}{dt}\right) = 0.$$

Dans le cas des oscillations infiniment petites on a $\frac{dx}{dt} = 0$, parce qu'alors chaque point du fil répond toujours à très-peu-près au même point de l' axe; de plus si on regarde le fil comme uniformément épais, & que l'élément de sa courbe $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ soit dénoté par ds; on aura $dm = ds$, & la formule intégrale $S dm \left(P dt - d \cdot \frac{dx}{dt}\right)$ se réduira à $S P\, ds\, dt =$ (à cause de $P dt$ constant) $P s dt$, étant la longueur de la partie du fil qui répond à l'abscisse x; par conséquent si la longueur totale du fil est l, on aura $T = P l$, & les deux premiéres équations deviendront celles-ci beaucoup plus simples

$$ds \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx} P dt\right) - P dt\, d \cdot \frac{dy}{dx} \times (l - s) = 0$$

$$ds \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx} P dt\right) - P dt\, d \cdot \frac{dz}{dx} \times (l - s) = 0$$

la troisiéme sera inutile.

XXVI.

SCHOLIE. Si les fils f, f', f'' &c. qui joignent les corps M, M', M'' &c. étoient extensibles, & élastiques, on auroit alors les équations

$$f \delta f = x \delta x + y \delta y + z \delta z;$$

$$f' \delta f' = (x' - x) \times (\delta x' - \delta x) + (y' - y) \times (\delta y' - \delta y) + (z' - z) \times (\delta z' - \delta z);$$

$f'' \delta f''$

$$f''\delta f'' = (x''-x')\times(\delta x''-\delta x') + (y''-y')\times(\delta y''-\delta y') + (z''-z')\times(\delta z''-\delta z'),$$

& ainſi de ſuite.

On trouvera de plus, en appellant F, F', F'' &c. les forces d'élaſticité, ou de contraction des fils f, f', f'' que l'équation (V) deviendra

$$\begin{aligned} &M u\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. \\ &= P\,(M\delta x + M'\delta x' + M''\delta x'' + \&c.) \\ &- F\delta f - F'\delta f' - F''\delta f'' - \&c., \end{aligned}$$

comme il eſt facile de s'en aſſurer en appliquant le Principe de la conſervation des forces vives, au cas dont il s'agit ici.

On mettra donc dans cette expreſſion de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.$ au lieu de δf, $\delta f'$, $\delta f''$ &c. les valeurs qu'on vient de trouver, & on la ſubſtituera enſuite dans l'équation (E) de *l'Art. IX.*; ce qui donnera, après avoir ordonné les termes, & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., une équation de cette forme

$$\begin{aligned} \int[\,&(x)\delta x + (x')\delta x' + (x'')\delta x'' + \&c. + \\ &(y)\delta y + (y')\delta y' + (y'')\delta y'' + \&c. + \\ &(z)\delta z + (z')\delta z' + (z'')\delta z'' + \&c\,] = 0; \end{aligned}$$

dans laquelle

$$(x) = M\left(d\cdot\frac{dx}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x}{f}F - \frac{x'-x}{f'}F'\right)dt$$

$$(x') = M'\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x'-x}{f'}F' - \frac{x''-x'}{f''}F''\right)dt$$

$$(x'') = M''\left(d\cdot\frac{dx''}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x''-x'}{f''}F'' - \frac{x'''-x''}{f'''}F'''\right)dt$$

&c. &c.

$$(y) = M\,d\cdot\frac{dy}{dt} + \left(\frac{y}{f}F - \frac{y'-y}{f'}F'\right)dt$$

$$(y') = M'\,d\cdot\frac{dy'}{dt} + \left(\frac{y'-y}{f'}F' - \frac{y''-y'}{f''}F''\right)dt$$

$$(y'') = M'' d \cdot \frac{dy''}{dt} + (\frac{y'' - y'}{f''} F'' - \frac{y''' - y''}{f'''} F''') dt$$

&c. &c.

& les autres expreffions (z), (z'), (z'') feront les mêmes que les (y), (y'), (y'') &c., en changeant feulement y en z, y' en z', y'' en z'' &c.

De cette équation on tirera donc, fuivant notre méthode les équations particuliéres

$$(x) = 0,\ (x') = 0,\ (x'') = 0 \text{ \&c.}$$
$$(y) = 0,\ (y') = 0,\ (y'') = 0 \text{ \&c.}$$
$$(z) = 0,\ (z') = 0,\ (z'') = 0 \text{ \&c.}$$

qui feront celles du mouvement des corps M, M', M'' &c.

XXVII.

Corollaire. Si on veut, que les maffes M, M', M'' &c. foient infiniment petites, & placées à des diftances infiniment petites les unes des autres; confervant les fuppofitions faites dans *l'Art. XXV.*, on aura en général $M = dm$, $f = ds$, $x' - x = dx$, $y' - y = dy$; $z' - z = dz$; & l'on trouvera que les équations ci-deffus fe changeront dans les trois fuivantes.

$$dm\,(d \cdot \frac{dx}{dt} - P\,dt) - d \cdot \frac{F\,dx}{ds} \times dt = 0$$

$$dm\, d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{F\,dy}{ds} \times dt = 0$$

$$dm\, d \cdot \frac{dz}{dt} - d \cdot \frac{F\,dz}{ds} \times dt = 0,$$

où la quantité F marque l'élafticité variable de chaque élément du fil.

Si on fait abftraction de la pefenteur P, & qu'on fuppofe, outre cela, les ofcillations du fil infiniment petites, enforte que l'abfciffe x demeure toujours la même pour chaque élément ds; la premiére équation fe réduira à

$- \mathrm{d} \cdot \frac{F \mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \times dt = 0$; dont l'intégrale eſt $\frac{F \mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = k$; ce qui donne $\frac{F}{\mathrm{d}s} = \frac{k}{\mathrm{d}x}$, & cette valeur étant ſubſtituée dans les deux autres équations, on aura, à cauſe de k conſtant, $dm\, d \cdot \frac{dy}{dt} = \mathrm{d} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \times k\,dt$, $dm\, d \cdot \frac{dz}{dt} = \mathrm{d} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \times k\,dt$. Soit X l'épaiſſeur du fil, en ſorte que $dm = X\mathrm{d}x$ (il faudroit mettre à la rigueur $dm = X\mathrm{d}s$, mais comme on ſuppoſe les vibrations infiniment petites, il eſt clair que $\mathrm{d}y$ & $\mathrm{d}z$ feront auſſi infiniment petites par rapport à $\mathrm{d}x$, & qu'ainſi $\mathrm{d}s$ ſera à très-peu-près $= \mathrm{d}x$); on trouvera, en différentiant & prenant dt & $\mathrm{d}x$ pour conſtantes, ce qui eſt permis, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k\mathrm{d}^2y}{X\mathrm{d}x^2}$, $\frac{d^2z}{dt} = \frac{k\mathrm{d}^2z}{X\mathrm{d}x^2}$; équations connues.

XXVIII.

Remarque. Les équations trouvées pour le mouvement d'un fil vibrant élaſtique, ou non, peuvent encore l'être d'une autre maniére plus directe, en regardant d'abord le fil comme un aſſemblage d'une infinité de points mobiles; c'eſt ce qu'il eſt bon de faire voir, pour développer davantage l'application de notre Principe général à ces ſortes de queſtions.

XXIX.

Probleme 6. Trouver le mouvement d'un fil inextenſible, dont tous les points ſont ſollicités par des forçes quelconques P, Q, R &c.

Solution. En conſervant les noms donnés dans *l'Art. XXV.*; ſoit de plus u la viteſſe de chaque élément du fil, & ds le petit eſpace qu'il parcourt dans le tems dt; il eſt facile de voir que la formule du Principe général deviendra

dra $Sdm\int uds$. On fera donc, suivant notre méthode, l'équation $\delta \cdot Sdm\int uds = 0$, qui se réduira d'abord (à cause que dm est constant pendant que le fil varie de courbe) à $Sdm\delta\int uds = 0$, savoir à $Sdm\int(u\delta ds + \delta u ds) = Sdm\int u\delta ds + Sdm\int u\delta u dt = 0$, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$.

Maintenant, si on prend pour chaque élément du fil trois coordonnées rectangles x, y, z, comme dans les Prob. 1., on aura aussi $\delta ds = \frac{1}{ds}(dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z)$, & $\int u\delta ds = -\int(d\cdot\frac{dx}{dt} \times \delta x + d\cdot\frac{dy}{dt} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dt} \times \delta z)$ en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$; donc l'intégrale $Sdm\int u\delta ds$ deviendra, en transposant les signes S, $\int$ (ce qui est évidemment permis) $-\int S dm (d\cdot\frac{dx}{dt} \times \delta x + d\cdot\frac{dy}{dt} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dt} \times \delta z)$.

On changera aussi, par la même transposition des signes, la formule $Sdm\int u\delta u dt$ en $\int S dm u\delta u dt$; & l'on aura l'équation

$$(K) \ldots \int S dm(u\delta u dt - d\cdot\frac{dx}{dt} \times \delta x - d\cdot\frac{dy}{dt} \times \delta y - d\cdot\frac{dz}{dt} \times \delta z) = 0.$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $Sdm u\delta u dt$. Or il n'est pas difficile de voir que l'équation (V) de *l'Art. VIII.* appliquée à la question présente donne $Sdm u\delta u = -Sdm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.)$. On aura donc, en multipliant par dt dont la valeur est la même pour tous les élémens du fil, $Sdm u\delta u dt = -Sdm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.)dt$; ou bien, en mettant,

 selon

ſelon les ſuppoſitions de *l'Art. I.*, $\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z$ au lieu de $P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.$,

$S dm u \delta u dt = - S dm (\Pi dt \delta x + \pi dt \delta y + \Psi dt \delta z) \ldots (X)$

Cette valeur ſubſtituée dans l'équation (K), il viendra

$(L) \ldots\ldots\ldots\ldots - \int S\, dm \left(\left[d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right] \delta x + \left[d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right] \delta y + \left[d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt \right] \delta z \right) = 0.$

Préſentement, comme chaque élément du fil, $ds = \surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, eſt ſuppoſé inextenſible, on a, comme dans *l'Art. XXV.*, l'équation

$dx \left(\frac{d\,dx}{dt} \right) + dy \left(\frac{d\,dy}{dt} \right) + dz \left(\frac{d\,dz}{dt} \right) = 0.$ On a de plus, par la même raiſon, $\delta \cdot \surd (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$, ce qui donne $dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz = 0$, ſavoir (en tranſpoſant les deux caractériſtiques δ, d) $dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z = 0$; d'où l'on tire $d\delta x = - \frac{dy d\delta y + dz d\delta z}{dx}$, &, en intégrant, $S d\delta x = \delta x = \delta' x - S \frac{dy d\delta y + dz d\delta z}{dx}$; $\delta' x$ dénote la valeur de δx lorſque l'intégrale marquée par S eſt zéro, ſavoir la valeur du δx à la premiére extrémité du fil. La ſubſtitution de cette valeur de δx dans l'équation (L) changera l'expreſſion intégrale $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta x$ en celle-ci $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta' x - S dm \left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) S \left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z \right) \right]$. Or la différence $\delta' x$ étant conſtante, peut être dégagée du ſigne d'intégration; donc ſi $T dt$ exprime la valeur totale de l'intégrale $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} \right.$

+

$+ \Pi dt$), l'expreſſion $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\,\delta\grave{x}$ ſe réduira à celle-ci plus ſimple $T\,dt\,\delta\grave{x}$. Il s'agit maintenant de faire diſparoître les différences de δy & δz dans l'autre expreſſion $[S\,dm(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\; S\,(\frac{dy}{dx}\,d\,\delta y + \frac{dz}{dx}\,d\,\delta z)]$; c'eſt de quoi on viendra aiſément à bout par la méthode de *l'Art. IX. du Mémoire préc.* Suivant cette méthode, on trouvera que, ſi $T\,dt$ repréſente, comme ci-devant, la valeur totale de l'intégrale $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)$, & qu'on faſſe, pour abréger, $T\,dt - S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt) = V\,dt$, on aura $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\;S\frac{dy}{dx}\,d\,\delta y = \frac{V\,dt\,dy}{dx}\,\delta y - S\,d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx} \times \delta y$, & de même $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)$ $S\,\frac{dz}{dx}\,d\,\delta z = \frac{V\,dt\,dz}{dx}\,\delta z - S\,d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx} \times \delta z$: où les termes qui ſe trouvent hors du ſigne d'intégration S doivent être pris avec les conditions énoncées à la fin de *l'Art. I. du Mém. préc.*; or la valeur de $V\,dt$ qui répond au dernier point du fil eſt nulle, parceque $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)$ devient alors $= T\,dt$, & pour le premier point cette valeur eſt $= T\,dt$, parceque $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt) = 0$; donc ſi on marque par $\grave{x}$, $\grave{y}$, $\grave{z}$ les coordonnées qui répondent à ce point, on aura $-\frac{T\,dt\,d\grave{y}}{d\grave{x}}\,\delta\grave{y}$ pour la valeur exacte du terme $\frac{V\,dt\,dy}{dx}\,\delta y$, & $-\frac{T\,dt\,d\grave{z}}{d\grave{x}}\,\delta\grave{z}$ pour celle de l'autre terme $\frac{V\,dt\,dz}{dx}\,\delta z$. Par ces ſubſtitutions on aura

donc

donc $S\,dm\,[(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\,S\,(\frac{dy}{dx}\,d\delta y + \frac{dz}{dx}\,d\delta z)] =$ $-T\,dt\,(\delta' x + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z) - S\,(d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx} \times \delta y$ $+ d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx} \times \delta z)$, & l' équation ($L$) se changera en celle-ci

$$(M) \ldots\ldots - \int(\delta' x + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z)\,T\,dt$$
$$- \int S\,[\,(d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx} + dm\,d\cdot\frac{dy}{dt} + dm\,\pi\,dt)\,\delta y +$$
$$(d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx} + dm\,d\cdot\frac{dz}{dt} + dm\,\Psi\,dt)\,\delta z] = 0;$$

d' où l' on tire pour tous les points du fil en général

$$d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx} + dm\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\,dt) = 0$$
$$d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx} + dm\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt) = 0,$$

& ces équations, avec celle qui a été trouvée précédemment

$$dx\,(\frac{d\,dx}{dt}) + dy\,(\frac{d\,dy}{dt}) + dz\,(\frac{d\,dz}{dt}) = 0,$$

serviront pour déterminer le mouvement du fil.

Si on fait dans ces équations $\Pi = -P$, $\pi = 0$, $\Psi = 0$, elles reviendront au même que celles de *l'Art. XXV.*, comme il est facile de s' en assurer par un calcul fort simple.

XXX.

Scholie 1. Maintenant, pour satisfaire au reste de l'équation (M) on fera encore $(\delta' x + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z)\,T\,dt = 0$, équation qui appartient uniquement au premier point du fil.

Suppo-

Suppoſons d'abord ce point abſolument fixe, il eſt clair qu'on aura $\delta`x = 0$, $\delta`y = 0$, $\delta`z = 0$, ce qui rendra nuls tous les termes de l'équation dont il s'agit; donc les équations trouvées à la fin de *l'Art. préc.* ſuffiront dans ce cas pour réſoudre le Problême.

Mais ſi l'autre bout du fil eſt auſſi fixe, il faudra faire alors quelques changemens à ces équations. Pour cela ſoit repriſe l'équation $\delta x = \delta`x - S\left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z\right)$; on trouvera, en intégrant par parties avec l'addition des conſtantes néceſſaires, $\delta x = \delta`x - \frac{dy}{dx}\delta y - \frac{dz}{dx}\delta z + \frac{d`y}{d`x}\delta`y + \frac{d`z}{d`x}\delta`z + S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right)$. Déſignons par x', y', z' les valeurs de x, y, z qui répondent à l'extrémité du fil, & rapportons l'équation qu'on vient de trouver à ce point, on aura en tranſpoſant $\delta x' + \frac{dy'}{dx'}\delta y' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta`x - \frac{d`y}{d`x}\delta`y - \frac{d`z}{d`x}\delta`z - S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right) = 0$: l'intégrale $S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right)$ étant priſe pour toute la longueur du fil. Cette équation étant vraie pour tous les inſtans du mouvement du fil, on peut la multiplier par dt, & en prendre l'intégrale rélativement au tems t; on aura donc en affectant tous les termes du ſigne $\int$

$$\int\left(\delta x' + \frac{dy'}{dx'}dy' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta`x - \frac{d`y}{d`x}\delta`y - \frac{d`z}{d`x}\delta`z\right)dt - \int S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right)dt = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (N)$$

Equation qui doit avoir lieu en même tems que l'équation générale (M) en faiſant $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta`x$, $\delta`y$, $\delta`z$

$= o$ conformément à l'hipotése, ce qui la réduit à $-\int S\,(d\cdot\frac{dy}{dx}\times\delta y + d\cdot\frac{dz}{dx}\times\delta z)\,dt = o$; je multiplie donc cette équation par un coéficient indéterminé k, & je l'ajoute à l'équation (M); j'ai (à cause de $\delta`x$, $\delta`y$, $\delta`z = o$)

$$\int S[(d\cdot\frac{V dt\, dy}{dx} + dm\, d\cdot\frac{dy}{dt} + dm\,\pi\, dt + d\cdot\frac{dy}{dx}\times k dt)\delta y$$
$$+ (d\cdot\frac{V dt\, dz}{dx} + dm\, d\cdot\frac{dz}{dt} + dm\,\Psi\, dt + d\cdot\frac{dz}{dx}\times k dt)\delta z]$$

$= o$; d'où je tire pour le mouvement du fil

$$d\cdot\frac{V dt\, dy}{dx} + dm\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\, dt) + d\cdot\frac{dy}{dx}\times k\, dt = o$$
$$d\cdot\frac{V dt\, dz}{dx} + dm\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\, dt) + d\cdot\frac{dz}{dx}\times k dt = o.$$

Et la troisiéme équation sera la même que dans *l'Art. préc.*

X X X I.

SCHOLIE 2. L'équation (N) étant multipliée par un coéficient indéterminé k, & ensuite ajoutée à l'équation (M), on a en général

$$\int[(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{k dt}{dx'} -$$
$$(d`x\delta`x + d`y\delta`y + d`z\delta`z)\frac{T+k}{d`x}dt]$$
$$-\int S[(d\cdot\frac{V dt\, dy}{dx} + d\cdot\frac{dy}{dx}\times k dt + dm\, d\cdot\frac{dy}{dt} + dm\,\pi\, dt)\delta y$$
$$+ (d\cdot\frac{V dt\, dz}{dx} + d\cdot\frac{dz}{dx}\times k dt + dm\, d\cdot\frac{dz}{dt} + dm\,\Psi\, dt)\delta z] = o.$$

Les termes affectés du double signe $\int S$ fourniront d'abord pour le mouvement général du fil les mêmes équations que dans *l'Art. préc.*; ensuite les autres termes affectés simplement du signe $\int$ donneront l'équation

$(dx'\delta x'$

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{k\,dt}{dx'} -$$

$$(d{}^\backprime x\,\delta{}^\backprime x + d{}^\backprime y\,\delta{}^\backprime y + d{}^\backprime z\,\delta{}^\backprime z) \times \frac{T+k}{d{}^\backprime x}\,dt = 0.$$

d' où l' on tire les conclusions suivantes.

1.° Si le fil est fixement arrêté à ses deux extrémités, les différences $\delta{}^\backprime x$, $\delta{}^\backprime y$, $\delta{}^\backprime z$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ sont nulles par elles mêmes, & l' équation, dont il s' agit ne fournit aucune condition nouvelle; c' est le cas de *l'Art. préc.*

2.° S' il n'y a qu'une des extrémités du fil, qui soit fixe, alors on aura simplement $\delta{}^\backprime x$, $\delta{}^\backprime y$, $\delta{}^\backprime z = 0$, ou $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z' = 0$; dans le premier cas, il restera l'équation $(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{k\,dt}{dx'} = 0$, à laquelle on ne peut satisfaire qu'en mettant $k = 0$; dans le second, l' équation restante sera $-(d{}^\backprime x\,\delta{}^\backprime x + d{}^\backprime y\,\delta{}^\backprime y + d{}^\backprime z\,\delta{}^\backprime z)\frac{k+T}{dx}dt = 0$, laquelle donnera nécessairement $k + T = 0$, savoir $T = -k$.

3.° Si le fil est attaché d'un côté à une verge fixe le long de laquelle il puisse couler par le moïen d'un anneau, & que l'équation de la verge soit en général $dz = m\,dx + n\,dy$; alors on supposera $\delta{}^\backprime z = {}^\backprime m\,\delta{}^\backprime x + {}^\backprime n\,\delta{}^\backprime y$, ou $\delta z' = m'\delta x' + n'\delta y'$, selon que ce sera le premier, ou le dernier point du fil, qui décrira la courbe donnée, & substituant dans l' équation ci-dessus la valeur de $\delta{}^\backprime z$ ou de $\delta z'$ on en tirera, pour le premier cas, les deux conditions $d{}^\backprime x + {}^\backprime m\,d{}^\backprime z = 0$, $d{}^\backprime y + {}^\backprime n\,d{}^\backprime z = 0$, & de plus $k = 0$, si l'autre bout du fil est libre, & pour le second cas on trouvera de même $dx' + m'dz' = 0$, $dy' + n'dz' = 0$, & de plus $T + k = 0$, si le premier point du fil est libre.

4.° Si les deux bouts du fil coulent le long de deux courbes représentées par les équations $d{}^\backprime z = {}^\backprime m\,d{}^\backprime x + {}^\backprime n\,d{}^\backprime y$, $dz' = m'dx' + n'dy'$, on mettra ${}^\backprime m\,\delta{}^\backprime x + {}^\backprime n\,\delta{}^\backprime y$ pour

$\delta'z$, & $m'\delta x' + n'\delta y'$ pour $\delta z'$, & l'on fera en conséquence $d'x + 'md'z = o$, $d'y + 'nd'z = o$, $dx' + m'dz' = o$, $dy' + n'dz' = o$.

5.° Si les deux bouts du fil sont attachés l'un à l'autre, ensorte qu'il en résulte une courbe rentrente en elle même on aura dans ce cas $x' = 'x$, $y' = 'y$, $z' = 'z$, & l'équation générale se réduira à $-(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z)\frac{Tdt}{d'x} = o$; d'où $T = o$ comme dans le premier cas du n. 1.

Toutes ces équations, au reste, devront se vérifier au moïen des constantes qui se trouveront dans les équations générales de *l'Art. préc.* après leur intégration.

XXXII.

SCHOLIE 3. Imaginons que le fil soit emporté par un corps de masse finie M' attaché à son extrémité, & animé par des puissances quelconques P', Q', R' *&c.* Il est clair que dans ce cas la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* ne sera plus simplement $S\,dm\int u\,ds$, mais $S\,dm\int u\,ds + M'\int u'\,ds'$ en nommant u' la vitesse du corps M', & ds' l'élément de la courbe qu'il décrit. Or cette derniére formule étant traitée comme celle du Prob. 1. donnera pour sa différentielle

$$-M'\int[(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi'dt)\delta x' + (d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi'dt)\delta y' + (d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi'dt)\delta z']$$; on ajoutera donc cette quantité au premier membre de l'équation générale de *l'Art. préc.*, & l'on aura celle-ci

$$-\int[(M'd\cdot\frac{dx'}{dt} + M'\Pi'dt - kdt)\delta x' +$$

(M'd-

$$(M' d \cdot \frac{dy'}{dt} + M' \pi' dt - \frac{dy'}{dx'} k\, dt)\, \delta y' +$$

$$(M' d \cdot \frac{dz'}{dt} + M' \Psi dt - \frac{dz'}{dx'} k\, dt)\, \delta z' +$$

$$(d'x\, \delta' x + d'y\, \delta' y + d'z\, \delta' z) \times \frac{T + k}{d'x} dt\,]$$

$$-\int S\,[(d \cdot \frac{V\, dt\, dy}{dx} + d \cdot \frac{dy}{dx} \times k\, dt + dm\, d \cdot \frac{dy}{dt} + dm\, \pi\, dt)\, \delta y$$

$$-(d \cdot \frac{V\, dt\, dz}{dx} + d \cdot \frac{dz}{dx} \times k\, dt + dm\, d \cdot \frac{dz}{dt} + dm\, \Psi\, dt)\, \delta z]$$

$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (P)$$

Les termes affectés du double signe $\int S$ donneront pour le mouvement du fil en général les mêmes équations de *l' Art. XXX.*, qu'il est inutile de répéter. Les autres termes fourniront l' équation

$$(M' d \cdot \frac{dx'}{dt} + M' \Pi' dt - k\, dt)\, \delta x' +$$

$$(M' d \cdot \frac{dy'}{dt} + M' \pi' dt - \frac{dy'}{dx'} k\, dt)\, \delta y' +$$

$$(M' d \cdot \frac{dz'}{dt} + M' \Psi' dt - \frac{dz'}{dx'} k\, dt)\, \delta z' +$$

$$(d'x\, \delta' x + d'y\, \delta' y + d'z\, \delta' z) \times \frac{T + k}{d'x} dt = 0.$$

Or si le corps M' est libre en sorte que les différences $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ demeurent indéterminées, on fera

$$M' (d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt) - k\, dt = 0$$

$$M' (d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt) - \frac{dy'}{dx'} k\, dt = 0$$

$$M' (d \cdot \frac{dz'}{dt} + \Psi' dt) - \frac{dz'}{dx'} k\, dt = 0.$$

Ce sont les équations qui serviront à déterminer le mouvement du corps M'.

Si ce corps étoit contraint de se mouvoir sur une surface donnée par l'équation $dz' = m'dx' + n'dy'$; on mettroit, comme à l'ordinaire, $m'\delta x' + n'\delta y'$ au lieu de $\delta z'$, & l'on en tireroit les équations

$$M'\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right) - k\,dt +$$

$$\left[M'\left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right) - \frac{dz'}{dx'}k\,dt\right]m' = 0$$

$$M'\left(d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right) - \frac{dy'}{dx'}k\,dt +$$

$$\left[M'\left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right) - \frac{dz'}{dx'}k\,dt\right]n' = 0.$$

A l'égard des termes $({d'x}\,{\delta'x} + {d'y}\,{\delta'y} + {d'z}\,{\delta'z}) \times \frac{T+k}{d'x}dt$ qui appartiennent au premier point du fil, ils fourniront les mêmes conditions que dans *l'Art. préc.*, selon les différentes circonstances du mouvement de ce point. Mais si l'on imaginoit de plus en ce point un autre corps $'M$, animé des puissances $'P$, $'Q$, $'R$ *&c.*, ensorte que le fil fût emporté par deux corps $'M$, M' fixement attachés à ses extrémités; alors on auroit, pour la formule du *maximum*, ou du *minimum*, $S\,dm\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + 'M\int 'u\,d's$; & l'on trouveroit, en faisant le calcul de la même maniére que ci-dessus, que le premier membre de l'équation (P) seroit augmenté des termes $-'M\int[(d\cdot\frac{d'x}{dt} + '\Pi\,dt)\delta'x$ $(d\cdot\frac{d'y}{dt} + '\pi\,dt)\delta'y + (d\cdot\frac{d'z}{dt} + '\Psi\,dt)\delta'z]$; ce qui ne changeroit rien aux formules trouvées pour le mouvement du fil, & de l'autre corps M'; mais on auroit de plus l'équation

$$\left['M d\cdot\frac{d'x}{dt} + 'M'\Pi\,dt + (T+k)\,dt\right]\delta'x +$$

$[\,{}'M d \cdot \frac{d'y}{dt} + {}'M'\pi\, dt + \frac{d'y}{d'x} \times (T + k)\, dt\,]\,\delta' y +$

$[\,{}'M d \cdot \frac{d'z}{dt} + {}'M'\Psi\, dt + \frac{d'z}{d'x} \times (T + k)\, dt\,\delta]\,\delta' z = 0;$

d' où l' on tireroit pour le mouvement du corps $'M$ des formules analogues à celles qu'on a trouvées pour le corps M'.

X X X I I I.

Probleme 7. Résoudre le Problême précédent, en supposant que le fil soit extensible & élastique.

Solution. Soit F le ressort, c' est-à-dire, la force de contraction de chaque élément du fil, on aura en général, par l'équation (V) de *l' Art. VIII.*, $S\, dm\, u\, \delta u = - S\, dm\, (P\, \delta p + Q\, \delta q + R\, \delta r + \&c.) - S\, F\, \delta f$; ce qui donne, en multipliant par dt, & mettant $\Pi\, \delta x + \pi\, \delta y + \Psi\, \delta z$ au lieu de $P\, \delta p + Q\, \delta q + R\, \delta r + \&c.$, & ds au lieu de f,

(Y) . . . . $S\, dm\, u\, \delta u\, dt = - S\, dm\, (\Pi\, dt\, \delta x + \pi\, dt\, \delta y + \Psi\, dt\, \delta z) - S\, F\, dt\, \delta\, ds$.

Or $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; donc

$$\delta\, ds = \frac{dx\, \delta\, dx + dy\, \delta\, dy + dz\, \delta\, dz}{ds}$$

$$= \frac{dx\, d\, \delta x + dy\, d\, \delta y + dz\, d\, \delta z}{ds};$$

donc, mettant cette valeur dans $S\, F\, dt\, \delta\, ds$, & intégrant par parties avec les constantes nécessaires, on aura

$$S\, F\, dt\, \delta\, ds = \frac{F'\, dt}{ds'}\, (dx'\, \delta x' + dy'\, \delta y' + dz'\, \delta z') -$$

$$\frac{'F\, dt}{d's}\, (d'x\, \delta' x + d'y\, \delta' y + d'z\, \delta' z) -$$

$$S\, (d \cdot \frac{F\, dx}{ds} \times \delta x + d \cdot \frac{F\, dy}{ds} \times \delta y + d \cdot \frac{F\, dz}{ds} \times \delta z)\, dt.$$

Main-

Maintenant, pour résoudre le Problême, il n'y a plus qu'à mettre dans l'équation (K) de *l'Art. XXIX.* au lieu de $S\,dm\,u\,\delta\,u\,dt$ la valeur qu'on vient de trouver, & l'on aura, en ordonnant les termes

$$-\int[(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{F'dt}{ds'} -$$

$$(d'x\delta' x + d'x\delta' y + d'z\delta' z)\frac{'F dt}{d's}] +$$

$$\int S[(d\cdot\frac{F\,dx}{ds}\times dt - dm\,\Pi\,dt - dm\,d\cdot\frac{dx}{dt})\delta x +$$

$$(d\cdot\frac{F\,dy}{ds}\times dt - dm\,\pi\,dt - dm\,d\cdot\frac{dy}{dt})\delta y +$$

$$(d\cdot\frac{F\,dz}{ds}\times dt - dm\,\Psi\,dt - dm\,d\cdot\frac{dz}{dt})\delta z] = 0;$$

d'où l'on tire pour les équations générales du mouvement du fil

$$d\cdot\frac{F\,dx}{ds}\times dt - dm\,(\Pi\,dt + d\cdot\frac{dx}{dt}) = 0$$

$$d\cdot\frac{F\,dy}{ds}\times dt - dm\,(\pi\,dt + d\cdot\frac{dy}{dt}) = 0$$

$$d\cdot\frac{F\,dz}{ds}\times dt - dm\,(\Psi\,dt + d\cdot\frac{dz}{dt}) = 0,$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans *l'Art. XXVII.* en mettant π, & $\Psi = 0$, & $-P$ au lieu de Π.

On aura de plus l'équation

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{F'dt}{ds'} -$$

$$(d'x\delta' x + d'y\delta' y + d'z\delta' z)\frac{'F dt}{d's} = 0$$

qu'on traitera qu'on a fait ci-devant l'équation (P), & qui donnera par conséquent des conclusions semblables sur le mouvement des deux extrémités du fil. J'en laisse le détail au Lecteur.

XXXIV.

PROBLEME 8. Trouver le mouvement d'un corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

SOLUTION. Soit nommée dm chaque particule du corps, u sa viteſſe, & ds l'eſpace qu'elle parcourt dans le tems dt; on aura comme dans *l'Art. XXIX.* $Sdm\int uds$ pour la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*.

En ſuivant la méthode expliquée dans cet *Article*, on parviendra de même à l'équation (L)

$$-\int S dm [(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\delta x + (d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt)\delta y +$$
$$(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt)\delta z] = 0,$$

& il n'y aura plus qu'à ſubſtituer dans cette équation les valeurs de dx, dy, dz, & δx, δy, δz convenables à chaque particule du corps donné.

Pour trouver ces valeurs je prens dans l'intérieur du corps un point quelconque fixe, que j'appelle le centre de rotation, & dont je ſuppoſe que la poſition ſoit repréſentée par les coordonnées rectangles X, Y, Z; je rapporte à ce centre chacun des autres points du corps par le moïen de trois nouvelles coordonnées p, q, r priſes dans les mêmes axes que les X, Y, Z; j'ai ainſi $x = X + p$, $y = Y + q$, $z = Z + r$; par conſéquent $dx = dX + dp$, $dy = dY + dq$, $dz = dZ + dr$, & de même $\delta x = \delta X + \delta p$, $\delta y = \delta X + \delta q$, $\delta z = \delta Z + \delta r$.

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des différences de p, q, r pour chaque point du corps; pour cela il faut conſidérer le mouvement du corps autour de ſon centre, & déterminer les variations qui en réſultent dans chacune des lignes p, q, r. Or il eſt facile de voir que, quel que ſoit ce mouvement, il peut toujours être regardé comme formé de trois mouvemens de rotation autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, & paſſant par le

centre

centre dont nous parlons; donc ſi on prend pour les axes de rotation ceux des coordonnées p, q, r; on trouvera par un calcul très-ſimple que, tandis que le corps tourne autour de l'axe des r d'un mouvement angulaire dR, la ligne p croîtra de la quantité $q\,dR$, & la ligne q décroîtra de la quantité $p\,dR$; que de même, en nommant dQ l'angle de rotation autour de l'axe des q, les lignes p & r deviendront par ce mouvement $p + r\,dQ$, $r - p\,dQ$; & qu'enfin l'angle de rotation autour de l'axe des p, étant dP, il en réſultera dans la ligne q un accroiſſement $= r\,dP$, & dans la ligne r un décroiſſement $= q\,dP$. Donc en ajoutant enſemble toutes ces différentes variations des lignes p, q, r, & exprimant les variations totales par dp, dq, dr, on aura en général

$$\left.\begin{aligned} dp &= r\,dQ + q\,dR \\ dq &= r\,dP - p\,dR \\ dr &= -q\,dP - p\,dQ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Q)$$

& par conſéquent auſſi, en changeant d en δ.

$$\begin{aligned} \delta p &= r\,\delta Q + q\,\delta R \\ \delta q &= r\,\delta P - p\,\delta R \\ \delta r &= -q\,\delta P - p\,\delta Q. \end{aligned}$$

On aura donc par-là

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta X + r\,\delta Q + q\,\delta R \\ \delta y &= \delta Y + r\,\delta P - p\,\delta R \\ \delta z &= \delta Z - q\,\delta P - p\,\delta Q; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dX}{dt} + r\frac{dQ}{dt} + q\frac{dR}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dY}{dt} + r\frac{dP}{dt} - p\frac{dR}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dZ}{dt} - q\frac{dP}{dt} - p\frac{dQ}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$d\cdot\frac{dx}{dt} = d\cdot\frac{dX}{dt} + r\,d\cdot\frac{dQ}{dt} + dr\frac{dQ}{dt} + q\,d\cdot\frac{dR}{dt} +$$

dq

$dq\frac{dR}{dt}$ savoir, en mettant pour dq, dr, leurs valeurs,

$$= d\cdot\frac{dX}{dt} + r\,d\cdot\frac{dQ}{dt} + q\,d\cdot\frac{dR}{dt} - q\frac{dP\,dQ}{dt} - p\frac{dQ^2}{dt} + r\frac{dP\,dR}{dt} - p\frac{dR^2}{dt};$$

on aura de la même maniére

$$d\cdot\frac{dy}{dt} = d\cdot\frac{dY}{dt} + r\,d\cdot\frac{dP}{dt} - p\,d\cdot\frac{dR}{dt} - q\frac{dP^2}{dt} - p\frac{dP\,dQ}{dt} - r\frac{dQ\,dR}{dt} - q\frac{dR^2}{dt};$$

$$d\cdot\frac{dz}{dt} = d\cdot\frac{dZ}{dt} - q\,d\cdot\frac{dP}{dt} - p\,d\cdot\frac{dQ}{dt} - r\frac{dP^2}{dt} + p\frac{dP\,dR}{dt} - r\frac{dQ^2}{dt} - q\frac{dQ\,dR}{dt}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L), & faisant sortir hors du signe S les quantités dX, dY, dZ, δX, δY, δZ, dP, dQ, dR, δP, δQ, δR, qui sont les mêmes pour chaque point du corps, enfin ordonnant les termes par rapport à δX, δY, δZ, δP, δQ, δR; on aura une équation de la forme suivante

$$\int([X]\delta X + [Y]\delta Y + [Z]\delta Z + [P]\delta P + [Q]\delta Q + [R]\delta R) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

dans laquelle

$$[X] = M d\cdot\frac{dX}{dt} + S r\,dm \times \left(d\cdot\frac{dQ}{dt} + \frac{dP\,dR}{dt}\right) + S q\,dm \times \left(d\cdot\frac{dR}{dt} - \frac{dP\,dQ}{dt}\right) - S p\,dm \times \frac{dQ^2 + dR^2}{dt} + S\Pi\,dm\,dt$$

$$[Y] = M d\cdot\frac{dY}{dt} + S r\,dm \times \left(d\cdot\frac{dP}{dt} - \frac{dQ\,dR}{dt}\right) + S q\,dm \times \frac{dP^2 + dR^2}{dt} - S p\,dm \times \left(d\cdot\frac{dR}{dt} + \frac{dP\,dQ}{dt}\right) + S\pi\,dm\,dt$$

 [Z]

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} - Srdm \times \frac{dP^2 + dQ^2}{dt} - Sqdm \times \left(d \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) - Spdm \times \left(d \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) + S\Psi\, dmdt.$$

(M exprime la valeur de Sdm, ſavoir la maſſe entiére du corps).

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times \frac{dQ^2 - dR^2}{dt} - Sprdm \times \frac{dPdQ}{dt} - Spqdm \times \frac{dPdR}{dt} + (Sq^2dm - Sr^2dm) \times \frac{dQdR}{dt} + S\pi rdmdt - S\Psi qdmdt$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sp^2dm) \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sprdm \times \frac{dP^2 - dR^2}{dt} - Sqrdm \times \frac{dPdQ}{dt} + Spqdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sr^2dm - Sp^2dm) \times \frac{dPdR}{dt} + S\Pi rdmdt - S\Psi pdmdt$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + (Sp^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times \frac{dP^2 - dQ^2}{dt} + Sqrdm \times \frac{dPdR}{dt} + Sprdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sp^2dm - Sq^2dm) \times \frac{dPdQ}{dt} + S\Pi qdmdt - S\pi pdmdt.$$

Cette

Cette équation donnera la solution du Problême en faisant, comme à l'ordinaire, les coéficiens des différences marquées par δ, chacun en particulier $= 0$; comme on va le voir dans les Corollaires suivans.

X X X V.

Remarque. On peut simplifier les expressions de $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, en faisant tomber le centre de rotation dans le centre de gravité du corps. Car alors les intégrales $S\,p\,dm$, $S\,q\,dm$, $S\,r\,dm$, qui expriment la somme des momens de toutes les particules du corps par rapport à ses trois axes de rotation, deviendront nécessairement égales à zéro, par la proprieté connue de ce centre.

A l'égard des autres intégrales Sp^2dm, Sq^2dm &c., il faut observer que leur valeur dépend de la position instantanée du corps, & qu'elle varie, par conséquent, avec le tems t.

En effet $d \cdot Sp^2dm = Sd \cdot p^2dm = 2\,Sp\,dp\,dm =$ (en mettant au lieu de dp sa valeur $r\,dQ + q\,dR$) $2\,Sprdm \times dQ + 2\,Spqdm \times dR$;
on trouvera de la même maniére

$d \cdot Sq^2dm = 2\,Sqrdm \times dP - 2\,Spqdm \times dR$,

$d \cdot Sr^2dm = -2\,Sqrdm \times dP - 2\,Sprdm \times dQ$;

$d \cdot Spqdm = Sprdm \times dP + Sqrdm \times dQ + (Sq^2dm - Sp^2dm)\,dR$

$d \cdot Sprdm = -Spqdm \times dP + (Sr^2dm - Sp^2dm)\,dQ + Sq^2dm \times dR$

$d \cdot Sqrdm = (Sr^2dm - Sq^2dm)\,dP - Spqdm \times dQ - Sprdm \times dR$.

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer les valeurs générales des quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$, qui entrent dans les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. de l'équation (S); mais c'est de quoi il ne pa-

roit pas facile de venir à bout à cause de la difficulté d'intégrer ces sortes d'équations.

XXXVI.

Corollaire 1. Or si le corps est entiérement libre, en sorte que les différences δx, δy, δz, δP, δQ, δR n'aïent entr'elles aucun rapport déterminé, il faut, pour vérifier l'équation (S), faire les coeficiens de ces différences chacun en particulier $= 0$; ce qui donne les six équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$; par où l'on peut connoître le mouvement du corps à chaque instant. Si on fait dans ces équations $Spdm = 0$, $Sqdm = 0$, $Srdm = 0$, selon l'hypotése de *l'art. préc.* les trois premiéres deviendront celles-ci

$$Md \cdot \frac{dX}{dt} + S\,\Pi\, dm\, dt = 0$$

$$Md \cdot \frac{dY}{dt} + S\,\pi\, dm\, dt = 0$$

$$Md \cdot \frac{dZ}{dt} + S\,\Psi\, dm\, dt = 0$$

lesquelles montrent, que le centre de gravité du corps se meut de la même maniére que si toute la masse du corps étoit réunie dans ce centre.

Les trois autres équations ne contiendront que les variables dP, dQ, dR, d'où dépend le mouvement de rotation du corps autour de centre de gravité; ainsi ce mouvement sera tout à fait indépendant de celui du centre de gravité.

Imaginons que le corps ne tourne, qu'autour d'un seul axe, on supposera, dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$ $[R] = 0$, deux quelconques des trois variables dP, dQ, dR, égales à zéro. Soient d'abord dQ, dR, $= 0$ on aura

$$(S\, r^2 dm + S\, q^2 dm)\, d \cdot \frac{dP}{dt}$$

+

$$+ S\pi r\,dm\,dt - S\Psi q\,dm\,dt = 0$$

$$S p q\,dm \times d\cdot\frac{dP}{dt} + S p r\,dm \times \frac{dP^2}{dt}$$

$$+ S\Pi r\,dm\,dt - S\Psi p\,dm\,dt = 0$$

$$- S p r\,dm \times d\cdot\frac{dP}{dt} + S p q\,dm \times \frac{dP^2}{dt}$$

$$+ S\Pi q\,dm\,dt - S\pi p\,dm\,dt = 0$$

On trouvera de plus, par les formules données à la fin de *l' art. prec.*, $d\cdot S r^2 dm + d\cdot S q^2 dm = 0$; $d\cdot S p q\,dm = S p r\,dm \times dP$, $d\cdot S p r\,dm = - S p q\,dm \times dP$; d' où 1.° $S r^2 dm + S q^2 dm =$ conſt. (j' appellerai cette conſtante A) 2.° $\frac{d\cdot S p q\,dm}{S p r\,dm} = \frac{d\cdot S p r\,dm}{S p q\,dm}$, ſavoir $S p q\,dm \times d\cdot S p q\,dm = - S p r\,dm \times d.\,S p r\,dm$, ce qui donne, en intégrant & réduiſant, $(S p q\,dm)^2 + (S p r\,dm)^2 =$ conſt.; ſoit cette conſtante $= B^2$, on aura $S p r\,dm = \surd[B^2 - (S p q\,dm)^2]$ donc $\frac{-d\cdot S p q.dm}{\surd[B^2 - (S p q\,dm)^2]} = dP$, d' où $S p q\,dm = B$ ſin. $(\alpha + P)$; α étant un angle conſtant tel que B ſin. $\alpha = S p q\,dm$, au commencement de la rotation du corps; par conſéquent $S p r\,dm = B$ coſ. $(\alpha + P)$; donc ſi on ſubſtitue ces valeurs dans les trois équations ci-deſſus on aura.

$$A\,d\cdot\frac{dP}{dt} + S\pi r\,dm\,dt - S\Psi q\,dm\,dt = 0$$

$$B \text{ ſin. } (\alpha + P)\,d\cdot\frac{dP}{dt} + B \text{ coſ. } (\alpha + P)\frac{dP^2}{d}$$

$$+ S\Pi r\,dm\,dt - S\Psi p\,dm\,dt = 0$$

$$- B \text{ cos. } (\alpha + P)\,d\cdot\frac{dP}{dt} + B \text{ ſin. } (\alpha + P)\frac{dP^2}{dt}$$

$$+ S\Pi q\,dm\,d - S\pi p\,dm\,dt = 0$$

La premiére de ces équations etant multipliée par $\frac{dP}{dt}$, & enſuite

ensuite intégrée donne $\frac{A\,d\,P^2}{2\,d\,t^2} + \int (S\,\pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m)\,d\,P$ $= \frac{A\,c^2}{2}$, c étant la valeur de $\frac{d\,P}{d\,t}$ lorsque $P = 0$, c'est à dire la viteſſe primitive de rotation; donc ſubſtituant dans la ſeconde, & dans la troiſiéme équation, au lieu de $d \cdot \frac{d\,P}{d\,t}$ & de $\frac{dP^2}{d\,t}$, leurs valeurs, on aura, après avoir diviſé par $d\,t$

$$- \frac{B}{A} \text{ ſin. } (\alpha + P) \times (S\,\pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m)$$
$$- \frac{2\,B}{A} \text{ coſ. } (\alpha + P) \times \int (S\,\pi\,r\,d\,m - \Psi\,q\,d\,m)\,d\,P$$
$$+ B\,c^2 \text{ coſ. } (\alpha + P) + S\,\Pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,p\,d\,m = 0$$
$$\frac{B}{A} \text{ coſ. } (\alpha + P) \times (S\,\pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m)$$
$$- \frac{2\,B}{A} \text{ ſin. } (\alpha + P) \times \int (S\,\pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m)\,d\,P$$
$$+ B\,c^2 \text{ ſin. } (\alpha + P) + S\,\Pi\,q\,d\,m - S\,\pi\,p\,d\,m = 0$$

& ces équations renfermeront les conditions néceſſaires pour que le corps tourne librement autour d'un axe immobile.

Si les forces Π, π, Ψ ſont nulles, ou conſtantes, ou bien, ſi elles ſont proportionelles à p, q, r, on a $S\,\pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m = 0$, $S\,\Pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,p\,d\,m = 0$, $S\,\Pi\,q\,d\,m - S\,\pi\,p\,d\,m = 0$; par conſéquent $\frac{d\,P^2}{d\,t^2} = c^2$, c'eſt à dire que le mouvement de rotation eſt uniforme; & les équations précédentes ſe réduiſent à $B\,c^2$ coſ. $(\alpha + P) = 0$, $B\,c^2$ ſin. $(\alpha + P) = 0$, ce qui donne $B = 0$; on aura donc $\sqrt{[(S\,p\,q\,d\,m)^2 + (S\,p\,r\,d\,m)^2]} = 0$, ce qui ne peut arriver à moins que l'on n'ait $S\,p\,q\,d\,m = 0$, $S\,p\,r\,d\,m = 0$. Voila donc les conditions par leſquelles on déterminera la poſition de l'axe de rotation au dedans du corps. Il eſt clair que ces conditions ſont ſuffiſantes pour une telle détermina-

tion

tion; puiſque on ſait que la poſition d'une droite qui paſſe par un point donné ne dépend que de deux variables.

Soient maintenant $dP = o$, $dR = o$, ou $dP = o$, $dQ = o$, dans les équations $[P] = o$, $[Q] = o$, $[R] = o$; on trouvera, par des procédés ſemblables à ceux que nous venons de pratiquer, les conditions de la rotation du corps autour de deux autres axes.

Dans la ſuppoſition de $S\,\pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m = o$, $S\,\Pi\,r\,d\,m - S\,\Psi\,q\,d\,m = o$, $S\,\Pi\,q\,d\,m - S\,\pi\,p\,d\,m = o$; les équations dont il s'agit ſeront

$$S\,p\,q\,d\,m \times d\cdot\frac{dQ}{dt} + S\,q\,r\,d\,m \times \frac{dQ^2}{dt} = o$$

$$(S\,r^2\,d\,m + S\,p^2\,d\,m)\,d\cdot\frac{dQ}{dt} = o$$

$$S\,q\,r\,d\,m \times d\cdot\frac{dQ}{dt} - S\,p\,q\,d\,m \times \frac{dQ^2}{dt} = o$$

pour le cas où $dP = o$, $dR = o$, &

$$-S\,p\,r\,d\,m \times d\cdot\frac{dR}{dt} - S\,q\,r\,d\,m \times \frac{dR^2}{dt} = o$$

$$S\,q\,r\,d\,m \times d\cdot\frac{dR}{dt} - S\,p\,r\,d\,m \times \frac{dR^2}{dt} = o$$

$$(S\,p^2\,d\,m + S\,q^2\,d\,m)\,d\cdot\frac{dR}{dt} = o$$

pour le cas où $dP = o$, $dQ = o$.

Dans le premier cas on aura donc $d.\frac{dQ}{dt} = o$ c'eſt à dire que la rotation ſera uniforme, & de plus $S\,q\,r\,d\,m = o$, $S\,p\,q\,d\,m = o$ pour la détermination de l'axe de rotation.

Le ſecond cas donnera pareillement $d\cdot\frac{dR}{dt} = o$, ſavoir la rotation uniforme, & $S\,p\,r\,d\,m = o$, $S\,q\,r\,d\,m = o$ pour la détermination de ſon axe.

On trouvera donc trois axes fixes, autour de chacun deſquels le corps M pourra tourner librement & uniformement,

en

en cherchant dans ce corps la position de trois droites, qui passent par son centre de gravité, & qui soient telles, que $Spqdm = o$, $Sprdm = o$, $Sqrdm = o$, $Spqdm = o$, $Sqrdm$, $Sprdm = o$, savoir $Spqdm = o$, $Sprdm = o$ $Sqrdm = o$; p, q, r, étant les coordonnées rectangles qui déterminent la position de chaque particule du corps par rapport à chacune de ces droites ; d'où il est aisé de conclure que les trois axes de rotation dont il s'agit sont nécessairement perpendiculaires entr'eux.

Au reste, quelque soit le mouvement du corps autour de son centre de gravité, il y aura toujours un axe instantané de rotation, qui passera pour ce centre, & qui sera facile à déterminer dès qu'on connoîtra les mouvemens angulaires dP, dQ, dR; soient p', q', r' les coordonnées qui répondent à chacun des point placés dans l'axe dont nous parlons ; il est clair que, ces points devant être immobiles pour un instant, on doit avoir $dp' = r'dQ + q'dR = o$, $dq' = r'dP - p'dR = o$, $dr' = -q'dP - p'dQ = o$; équations dont la troisiéme est, comme on le voit, une suite nécessaire des deux prémiéres ; c'est pourquoi on fera simplement $r'dQ + q'dR = o$, $r'dP - p'dR = o$: ce qui, en regardant p', q', r' comme variables, & dP, dQ, dR comme constantes, donne une droite, dont la position est aisée à déterminer par rapport aux axes des coordonnées p', q', r'.

Dans le premier instant du mouvement on a, en faisant $dP = o$, $dQ = o$, $dR = o$ dans les équations $[P] = o$, $[Q] = o$, $[R] = o$,

$$(Sr^2dm + Sq^2dm)\, d\cdot\frac{dP}{dt} + Spqdm \times d\cdot\frac{dQ}{dt}$$

$$- Sprdm \times d\cdot\frac{dR}{dt} + S\pi rdmdt - S\Psi qdmdt = o.$$

$$(Sr^2dm + Sp^2dm)\, d\cdot\frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d\cdot\frac{dP}{dt}$$

+

$$+ \, S q r \, dm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi r \, dm \, dt - S \Psi p \, dm \, dt = 0$$

$$(S p^2 dm + S q^2 dm) \, d \cdot \frac{dR}{dt} + S q r \, dm \times d \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$- \, S p r \, dm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + S \Pi q \, dm \, dt - S \pi p \, dm \, dt = 0$$

de plus les équations $r' dQ + q' dR = 0$, $r' dP - p' dR = 0$ étant diviſées par dt, & enſuite différentiées donnent (à cauſe de $dP = 0$, $dQ = 0$, $dR = 0$)

$$r' d \cdot \frac{dQ}{dt} + q' d \cdot \frac{dR}{dt} = 0; \; r' d \cdot \frac{dP}{dt} - p' d \cdot \frac{dR}{dt} = 0;$$

d' où l' on tire

$$d \cdot \frac{dQ}{dt} = - \frac{q'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt}; \; d \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{p'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt};$$

ces valeurs ſubſtituées dans les équations ci-devant, on a

$$\left[(S r^2 dm + S q^2 dm) \frac{p'}{r'} - S p q \, dm \times \frac{q'}{r'} - S p r \, dm \right]$$

$$\times \, d \cdot \frac{dR}{dt} + S \pi r \, dm \, dt - S \Psi q \, dm \, dt = 0,$$

$$\left[- (S r^2 dm + S p^2 dm) \frac{q'}{r'} + S p q \, dm \times \frac{p'}{r'} + S q r \, dm \right]$$

$$\times \, d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi r \, dm \, dt - S \Psi p \, dm \, dt = 0,$$

$$\left[S p^2 dm + S q^2 dm - S q r \, dm \times \frac{q'}{r'} - S p r \, dm \times \frac{p'}{r'} \right]$$

$$\times \, d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi q \, dm \, dt - S \pi p \, dm \, dt = 0,$$

& en éliminant $d \cdot \frac{dR}{dt}$,

$$\frac{(S r^2 dm + S q^2 dm) p' - S p q \, dm \times q' - S p r \, dm \times r'}{S p q \, dm \times p' - (S r^2 dm + S p^2 dm) q' + S q r \, dm \times r'}$$

$$= \frac{S \Psi q \, dm - S \pi r \, dm}{S \Psi p \, dm - S \Pi r \, dm}$$

$$\frac{(Sr^2dm + Sq^2dm)p' - Spqdm \times q' - Sprdm \times r'}{-Sprdm \times p' - Sqrdm \times q' + (Sp^2dm + Sq^2dm)r'} = \frac{S\Psi qdm - S\pi rdm}{S\pi pdm - S\Pi qdm};$$

Equations qui donnent le rapport des coordonnées p', q', r' entr'elles, & par conſéquent la poſition de l'axe de rotation au commencement du mouvement.

XXXVII.

Corollaire 2. Si le corps n'eſt pas abſolument libre, mais qu'un de ſes points quelconque ſoit obligé de ſe mouvoir ſur une ſurface donnée; alors, prenant ce point pour le centre de rotation, & ſuppoſant la ſurface exprimée par l'équation $dZ = m\,dX + n\,dY$, on ne fera que mettre, dans l'équation (S), $m\delta X + n\delta Y$ pour δZ, & l'on aura, au lieu des trois équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, ces deux-ci $[X] + m[Z] = 0$, $[Y] + n[Z] = 0$; les trois autres ne recevant aucun changement. Mais ſi pour ſimplifier les expreſſions de $[X]$, $[Y]$ *&c.*, on veut que le centre de rotation ſoit le centre de même de gravité du corps ſuivant la Remarque de *l'Art. XXXV.*; alors on ne doit plus prendre X, Y, Z pour les coordonnées de la ſurface propoſée, mais $X + p'$, $Y + q'$, $Z + r'$: p', q', r' étant les coordonnées qui déterminent la poſition du point qui ſe meut ſur cette ſurface par rapport au centre de gravité; on aura donc $dZ + dr' = m(dX + dp') + n(dY + dq')$; & mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs $r'dQ + q'dR$, $r'dP - p'dR$, $-q'dP - p'dQ$, & ordonnant les termes, $dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + (p' + mr')\,dQ + (mq' - np')\,dR$; On trouvera par un raiſonnement ſemblable

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

donc

donc ſubſtituant cette valeur de δZ dans l' équation (S), & faiſant les coéficiens de différences reſtantes chacun $= 0$, on aura les cinq équations
$[X] + m[Z] = 0$; $[Y] + n[Z] = 0$; $[P] + (q' + nr') \times [Z] = 0$; $[Q] + (p' + mr') \times [Z] = 0$; $[R] + (mr' - np') \times [Z] = 0$,
& pour la ſixiéme équation on prendra celle qu'on a trouvé ci-deſſus, ſavoir $dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP +$ &c.

Mais ſi on ſuppoſoit que le point qui répond aux coordonnées p', q', r', fût fixement attaché, alors on feroit $dX + dp' = 0$, $dY + dq' = 0$, $dZ + dr' = 0$; ce qui donneroit, en mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs, $dX = -r'dQ - q'dR$, $dY = -r'dP + p'dR$, $dZ = q'dP + p'dQ$; on auroit par la même raiſon $\delta X = -r'\delta Q - q'\delta R$, $\delta Y = -r'\delta P + p'\delta R$, $\delta Z = q'\delta P + p'\delta Q$; & ces valeurs ſubſtituées dans l'équation (S), on trouveroit, en faiſant les coéficiens de δP, δQ, δR chacun $= 0$, les trois équations

$$-r'[Y] + q'[Z] + [P] = 0$$
$$-r'[X] + q'[Z] + [Q] = 0$$
$$-q'[X] + p'[Y] + [R] = 0.$$

XXXVIII.

Corollaire 3. Imaginons que le corps ſoit poſé ſur un plan, ou ſur une ſurface quelconque, le long de laquelle il puiſſe gliſſer librement, en tournant ſur lui même d'une maniére quelconque; ſoient p', q', r' les coordonnées de la ſuperficie du corps, & $dr' = M\,dp' + N\,dq'$ ſon équation différentielle, il eſt clair; 1.° Que tandis que le corps à ſes divers mouvemens dX, dY, dZ, dP, dQ, dR, chaque point de ſa ſurface parcoura les eſpaces $dX + r'dQ + q'dR$, $dY + r'dP - p'dR$, $dZ - q'dP - p'dQ$; dans la direction des coordonnées X, Y, Z; 2.° Que

 le

le point d' attouchement étant mobile ſur cette ſurface ; parcoura de plus dans les mêmes directions les eſpaces dp', dq', dr', ſavoir dp', dq', $Mdp' + Ndq'$; d' où il s' enſuit que les eſpaces entiers parcourus par le point touchant ſeront $dX + r'dQ + q'dR + dp'$, $dY + r'dP - p'dR + dq'$, $dZ - q'dP - p'dQ + Mdp' + Ndq'$. Or ce point devant auſſi ſe mouvoir ſur une ſurface repréſentée par l' équation $dZ = mdX + ndY$, ou bien $dz = mdx + ndy$ (en appellant x, y, z les coordonnées de cette ſurface pour les diſtinguer des X, Y, Z qui appartiennent au centre de gravité du corps), il faudra mettre dans cette équation au lieu de dx, dy, dz les quantités qu'on vient de trouver; ce qui donnera après les réductions

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR + (m - M)dp' + (n - N)dq'.$$

Cette équation appartiendroit en général à tous les points, dans leſquels la ſuperficie du corps pourroit rencontrer la ſurface propoſée; mais dans notre cas, où l' on veut que les deux ſurfaces ſe touchent, il faudra de plus ſuppoſer qu'elles aïent les mêmes tangeantes dans leurs points de rencontre, c'eſt-à-dire que $m = M$, $n = N$; donc l'équation trouvée ſe réduira à

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR.$$

Par les mêmes raiſonnemens on trouvera, en conſidérant les différences marquées par δ,

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

Il n' y aura donc plus qu'à ſubſtituer cette valeur de δZ dans l' équation (S), & à égaler enſuite à zéro chacun des coéficiens des différences δX, δY, δP, δQ, δR ce qui donnera les cinq équations

$[X] + m[Z] = 0$, $[Y] + n[Z] = 0$; $[P] +$

(q'

$(q' + nr') \times [Z] = o$; $[Q] + (p' + mr') \times [Z] = o$; $[R] + (mq' - np') \times [Z] = o$, lesquelles étant jointes avec l'équation ci-dessus $dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP +$ &c. serviront à déterminer le mouvement du corps.

Si on vouloit que le corps n'eut à chaque instant qu'un mouvement autour du point touchant, c'est-à-dire, qu'il n'eut aucun mouvement pour glisser le long de la surface sur laquelle il se meut; alors il est clair que les espaces parcourus par le point d'attouchement sur la surface dont nous parlons, & sur celle du corps devroient être exactement les mêmes; il faudroit donc que $dX + r'dQ + q'dR + dp' = dp'$; $dY + r'dP - p'dR + dq' = dq'$; $dZ - q'dP - p'dR + dr' = dr'$; savoir $dX + r'dQ + q'dR = o$, $dY + r'dP - p'dR = o$, $dZ - q'dP - p'dR$, & pareillement $\delta X + r'\delta Q + q'\delta R, = o$, $\delta Y + r'\delta P - p'\delta R = o$, $\delta Z - q'\delta P - p'\delta R = o$; d'où l'on auroit pour δX, δY, δZ les mêmes valeurs que dans le second cas de *l'Art. XXXVII.*, & ces valeurs substituées dans l'équation (S) donneroient par conséquent aussi les mêmes équations pour le mouvement du corps; mais, avec cette différence, que les coordonnées p', q', r' répondroient ici non plus à un point fixe, mais à un point mobile, qui change continuellement de place tant sur la surface du corps, que sur celle le long de laquelle le corps se meut.

XXXIX.

SCHOLIE. Les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. sont en général

$$[X] = Md \cdot \frac{dX}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right) dm$$

$$[X] = Md \cdot \frac{dY}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right) dm$$

$[Z] =$

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right) dm$$

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} +$$
$$S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right) rdm - S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right) qdm$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} +$$
$$S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right) rdm - S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right) pdm$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$
$$S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right) qdm - S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right) pdm.$$

Dans les formules de *l'Art. XXXIV.* nous avons mis à la place de p, q, r leurs valeurs tirée de l'équation (Q), & cette ſubſtitution a introduit les quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$ qui ne peuvent être déterminées que par l' intégration des équations données dans *l'Art. XXXV.* Or, pour éviter cet embarras, il n'y aura qu'à exprimer les coordonnées p, q, r par d'autres variables, dont les unes dépandent uniquement de la ſituation du corps, & ſoient par conſéquent mêmes pour chacun de ſes points, & les autres au contraire ſoient différentes pour tous les points du corps, & demeurent toujours les mêmes pendant qu'il change de ſituation. Pour cela, aïant imaginé deux axes perpendiculaires l' un à l' autre, qui paſſent par le centre de rotation, & qui demeurent toujours fixes au dedans du corps. On remarquera, 1.° Que la poſition de ces deux axes rélativement à un plan fixe quelconque ne dépend que de trois variables qu'on peut nommer P, Q, R; 2.° Que la poſition de chaque point du corps, rélativement à ces axes, dépend encore de trois autres variables que j' appellerai ξ, φ, ζ; d' où il s'enſuit que la poſition de chaque

chaque point du corps par rapport à un plan fixe quelconque dépendra en tout de six variables P, Q, R, ξ, φ, ζ, & qu'ainsi les quantités p, q, r ne seront que des fonctions de ces mêmes variables; fonctions toujours faciles à déterminer par les élémens de Géométrie. Aïant donc trouvé les valeurs de p, q, r en P, Q, R, ξ, φ, ζ, on en tirera aisément celles de $d \cdot \frac{dp}{dt}$, $d \cdot \frac{dq}{dt}$, $d \cdot \frac{dr}{dt}$, en faisant varier P, Q, R; on substituera ensuite toutes ces valeurs dans les expressions ci-dessus, & l'on intégrera les termes affectés du signe S, en regardant ξ, φ, ζ comme variables, après quoi il ne restera plus de variables que les P, Q, R qui représentent la position du corps à chaque instant.

Au reste les expressions de p, q, r dont nous venons de parler, peuvent servir aussi à trouver les valeurs des différences δp, δq, δr. Soient en général

$dp = AdP + BdQ + CdR$, $dq = DdP + EdQ + FdR$, $dr = GdP + HdQ + IdR$; on aura également

$\delta p = A\delta P + B\delta Q + C\delta R$, $\delta q = D\delta P + E\delta Q + F\delta R$

$\delta r = G\delta P + H\delta Q + I\delta R$; & par conséquent

$$\delta x = \delta X + \delta p = \delta X + A\delta P + B\delta Q + C\delta R,$$
$$\delta y = \delta Y + \delta q = \delta Y + D\delta P + E\delta Q + F\delta R,$$
$$\delta z = \delta Z + \delta r = \delta Z + G\delta P + H\delta q + I\delta R.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L) on aura une équation de la même forme que la (S), dans laquelle les quantités $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ seront exprimées comme ci-dessus, & les $[P]$, $[Q]$, $[R]$ auront les valeurs suivantes

$$[P] = SAdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + SDdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$
$$SGdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S[(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt)A +$$
$$(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt)D + (d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt)G]dm$$

$$[Q] = S\,B\,dm \times d\cdot\frac{dX}{dt} + S\,E\,dm \times d\cdot\frac{dY}{dt} +$$
$$S\,H\,dm \times d\cdot\frac{dZ}{dt} + S[\,(d\cdot\frac{dp}{dt} + \Pi dt)\,B +$$
$$(d\cdot\frac{dq}{dt} + \pi dt)\,E + (d\cdot\frac{dr}{dt} + \Psi dt)\,H]\,dm$$
$$[R] = S\,C\,dm \times d\cdot\frac{dX}{dt} + S\,F\,dm \times d\cdot\frac{dY}{dt} +$$
$$S\,I\,dm \times d\cdot\frac{dZ}{dt} + S[\,(d\cdot\frac{dp}{dt} + \Pi dt)\,C +$$
$$(d\cdot\frac{dq}{dt} + \pi dt)\,F + (d\cdot\frac{dr}{dt} + \Psi dt)\,I]\,dm.$$

Je laiſſe au Lecteur le détail de l'application de cette Equation, qui n'aura aucune difficulté, après ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens.

X L.

Probleme 9. Trouver les loix du mouvement des fluides non élaſtiques.

Solution. Il eſt viſible que l'équation (L), qui a ſervi pour réſoudre le Problême précédent, a encore lieu ici ; cette équation étant générale pour une ſiſtème quelconque de corpuſcules dm, agités par des forces quelconque P, Q, R &c.

Soit D la denſité de chaque particule du fluide dm, on aura $dm = D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, & l'équation dont il s'agit ſera

$$(a)\ \ldots\ldots\ \int S^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,D\,[\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\,\delta x$$
$$+ (d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt)\,\delta y + (d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt)\,\delta z\,] = 0;$$

je met l'expoſant 3 au ſigne S, pour exprimer les trois intégrations que ce ſigne renferme, rélativement aux trois

variables

variables x, y, z intégrations que nous aurons souvent occasion dans la suite de considérer chacune en particulier.

Maintenant, comme le fluide est supposé incompressible, il faut que le volume de chaque particule dm, lequel est exprimé par $dx\,dy\,dz$, reste toujours le même; on aura donc $dy\,dz\,d\mathrm{d}x + dx\,dz\,d\mathrm{d}y + dx\,dy\,d\mathrm{d}z = 0$, savoir $\frac{d\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} + \frac{d\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = 0$, ou en mettant $\mathrm{d}d$ au lieu de $d\mathrm{d}$

$$\frac{\mathrm{d}dx}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}dy}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}dz}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (b).$$

On aura par la même raison $dy\,dz\,\delta dx + dx\,dz\,\delta dy + dx\,dy\,\delta dz = 0$, ou bien $dy\,dz\,d\delta x + dx\,dz\,d\delta y + dx\,dy\,d\delta z = 0$, ce qui donne $d\delta x = -dx\left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)$ & par conséquent

$$(c) \quad \ldots \quad S\,d\delta x = \delta x = \delta' x - S\,dx\left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right);$$

$\delta' x$ est la valeur de δx, quand l'intégrale $S\,dx\left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)$ est nulle; or, comme cette intégrale doit être prise en variant seulement x, il s'ensuit que la quantité $\delta' x$ sera constante par rapport à x, mais variable par rapport à y, & z, c'est à dire que cette quantité sera une fonction de y, & z.

Donc mettant dans l'équation (α) à la place de δx la valeur qu'on vient de trouver, l'expression intégrale $S^3\,dx\,dy\,dz\,D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta x$ se changera en celle-ci.

$$S^3\,dx\,dy\,dz\,D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta' x -$$

$$S^4\,dx\,dy\,dz\left[D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)S\,dx\left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)\right].$$

 J'écris

J'écris d'abord le premier membre transformée ainsi: $S^2 dy\, dz\, S dx\, D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\delta' x$, expression qu'on voit bien être équivalente à la proposée. Or soit la valeur totale de $S dx\, D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)$ exprimée par $T dt$, il est clair qu'on aura, à cause que $\delta' x$ est constant par rapport à x, $S dx\, D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\delta' x = \delta' x\, S dx\, D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)$ $= \delta' x\, T dt$; donc

$S^3 dx\, dy\, dz\, D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\delta' x = S^2 dy\, dz\, T dt\, \delta' x.$

Je mets de même le second nombre sous la forme suivante: $S^2 dy\, dz\, S dx\left[D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+dt\right) S dx\left(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)\right]$; j'opére sur l'intégrale $S dx\left[D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right) S dx\left(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)\right]$ suivant la méthode de *l'Art. IX. Mem. préced.* j'aurai en supposant, pour abréger, $V dt = T dt - S dx\, D\left(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)$ la transformée $S dx\, V dt\left(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)$, où il n'y à plus qu'un seul signe d'intégration; la formule proposée deviendra donc $S^2 dy\, dz\, S dx\, V dt\left(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)$, ou ce qui est la même chose $S^3 dx\, dy\, dz\, V dt\left(\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)$, dans laquelle il ne s'agit plus que de faire disparoître les différences de δy & δz.

Pour cela il est nécessaire de distinguer d'abord les integrations rélatives à la variabilité de y, & de z, en mettant cette intégrale sous la forme suivante

$$S^2 dx\, dz\, S dy\, \frac{V dt\, d\delta y}{dy} +$$

S^2

$$S^2 dx dy\ S d z \frac{V dt d\delta z}{dz}.$$

Or par la méthode ordinaire des intégrations par parties, on trouve $S\, d y \frac{V dt\, d\delta y}{d y} = V dt \delta y - S d y \frac{d V dt}{d y} \delta y$.

(J'écris $S d y \frac{d V d t}{d y} \delta y$, au lieu de $S d V d t \delta y$ qui lui est égal, pour dénoter que cette intégrale, de même que la différentielle $d V dt$, doit être prise, en ne considérant que la variabilité de y seul). Soit maintenant $'y$ la valeur de y lorsque l'intégrale $S d y (\frac{d V. d.t}{d y}) \delta y$ commence, & y' sa valeur, lorsque cette intégrale finit; & soit exprimé par $'V$ ce qui devient V, en y mettant $'y$ à la place de y, & par V' ce que la même quantité devient en faisant $y = y'$; on trouvera, par la Rémarque faite à la fin de *l'Art. I. Mem. prec.*, que la valeur complette du terme $V dt \delta y$ sera $V' dt \delta y' - 'V dt \delta 'y$.

Mais pour peu qu'on réflechisse sur la nature de nos formules, il est aisé de voir que quand, $V = 'V$, l'intégrale $S d x D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi \delta t)$ est nulle, & que quand $V = V'$, cette intégrale est précisément $= T$; c'est pourquoi l'on aura $'V = T$, & $V' = 0$; donc enfin

$$S d y \frac{V dt\, d\delta y}{d y} = -T \delta 'y - S d y \frac{d V d t}{d y} \delta y.$$

On trouvera par des opérations & des raisonnements sembables

$$S d z \frac{-V dt\, d\delta y}{d y} = -T \delta 'z - S d z \frac{d \cdot V d t}{d y} \delta z;$$

Donc $S^3 d x d y d z V d t (\frac{d \delta y}{d y} + \frac{d \delta z}{d z})$ se changera en

$$- S^2 d x d z T d t \delta 'y - S^2 d x d z S d y \frac{d V d t}{d y} \delta y$$

$- S^2 dx\,dy\, T\,dt\,\delta'z - S^2 dx\,dy\,S\,dz\,\frac{dV\,dt}{dz}\delta z$

$=$ (en réduiſant) $- S^2 dx\,dz\, T\,dt\,\delta'y - S^2 dx\,dz\,T\,dt\,\delta'z$
$- S^3 dx\,dy\,dz\,(\frac{dV\,dt}{dy}\delta y + \frac{dV\,dt}{dz}\delta z)$, donc

$S^3 dx\,dy\,dz\,D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\,\delta x = S^2 dy\,dz\,T\,dt\,\delta'x$
$- S^2 dx\,dz\,T\,dt\,\delta'y - S^2 dx\,dy\,T\,dt\,\delta'z + S^3 dx\,dy\,dz$
$(\frac{dV\,dt}{dy}\delta y + \frac{dV\,dt}{dz}\delta z)$, donc l'équation ($a$) deviendra

(d) . . . . $\int(S^2 dy\,dz\,T\,dt\,\delta'x$
$+ S^2 dx\,dz\,T\,dt\,\delta'y + S^2 dx\,dy\,T\,dt\,\delta'z) +$
$\int S^3 dx\,dy\,dz\,(\,[\frac{dV\,dt}{dy} + D\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\,dt)]\,\delta y$
$+ [\frac{dV\,dt}{dz} + D\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt)]\,\delta z) = 0;$

d'où l'on tire pour le mouvement de chaque particule du fluide en général

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dV\,dt}{dy} + D\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\,dt) = 0\\ \frac{dV\,dt}{dz} + D\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt) = 0.\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\,(e)$$

Enſuite pour ſatisfaire au reſte de l'équation, on fera

(f) . . . . $S^2 dy\,dz\,T\,dt\,\delta'x$
$+ S^2 dx\,dz\,T\,dt\,\delta'y + S^2 dx\,dy\,T\,dt\,\delta'z = 0.$

X L I.

Corollaire 1. La valeur de $V\,dt$ eſt $T\,dt - S\,dx\,D$ $(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)$, l'intégrale étant priſe en variant ſeulement x; on ſubſtituera donc cette valeur dans les équations (e); mais, pour pouvoir faire diſparoître le ſigne S, on prendra les différentielles de ces deux équations, en ſuppo-

supposant x seul variable; ce qui donnera, en mettant pour $\frac{dV\,dt}{dx}$ sa valeur $-D\,(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt)$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[D(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt)]}{dy}&=\frac{d[D(d\cdot\frac{dx}{dt}+\pi\,dt)]}{dx}\\ \frac{d[D(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt)]}{dz}&=\frac{d[D(d\cdot\frac{dz}{dt}+\Psi\,dt)]}{dx}\end{aligned}\right\}(g)$$

Deux équations qui jointes à l' équation (b) trouvée ci-dessus feront connoître les valeurs de x, y, z pour un tems quelconque.

XLII.

Corollaire 2. Telles sont les équations, par lesquelles on peut déterminer en général le mouvement d' un fluide non élastique sollicité par des forces quelconques P, Q, R *&c.* qui agissent suivant des directions quelconques, ou bien par des forces Π, π, Ψ dirigées suivant les lignes x, y, z; comme il est aisé le voir en examinant les valeurs de ces quantités Π, π, Ψ (*Art. I.*).

Pour mieux connoître les équations dont il s' agit, exprimons par α, β, γ les vitesses de chaque particule du fluide parallélement aux coordonnées x, y, z, c' est-à-dire les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on aura en divisant par dt,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(D\frac{d\alpha}{dt})}{dy}+\frac{d(D\,\Pi)}{dy}&=\frac{d(D\frac{d\beta}{dt})}{dx}+\frac{d(D\,\pi)}{dx}\\ \frac{d(D\frac{d\alpha}{dt})}{dy}+\frac{d(D\Pi)}{dz}&+\frac{d(D\frac{dy}{dt})}{dx}+\frac{d(D\,\Psi)}{dx}\end{aligned}\right\}.(h)$$

$\frac{d\alpha}{dx}$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

On, voit par ces équations, que les quantités α, β, γ sont nécessairement des fonctions, des variables x, y, z qui déterminent la position des particules à chaque instant, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; or dans l'instant dt, il est clair que les variables x, y, z deviennent $x + \alpha dt$, $y + \beta dt$, $z + \gamma dt$; donc les variations des quantités α, β, γ dans cet instant ne seront pas seulement $\frac{d\alpha}{dt}dt$, $\frac{d\beta}{dt}dt$, $\frac{d\gamma}{dt}dt$, mais

$$\frac{d\alpha}{dt}dt + \frac{d\alpha}{dx}\alpha dt + \frac{d\alpha}{dy}\beta dt + \frac{d\alpha}{dz}\gamma dt,$$
$$\frac{d\beta}{dt}dt + \frac{d\beta}{dx}\alpha dt + \frac{d\beta}{dy}\beta dt + \frac{d\beta}{dz}\gamma dt,$$
$$\frac{d\gamma}{dt}dt + \frac{d\gamma}{dx}\alpha dt + \frac{d\gamma}{dy}\beta dt + \frac{d\gamma}{dz}\gamma dt,$$

& telles seront les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$; donc si on substitue ces valeurs dans les équations (h), & qu'on suppose, pour plus de simplicité, les forces Π, π, Ψ nulles, ou telles que $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, & de plus la densité D constante, on aura, en divisant par D, & marquant toutes les différences par d (ce qui est absolument indifférent ici),

$$\frac{d^2\alpha}{dt\,dy} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dx\,dy} + \beta\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dy\,dz} + \frac{d\alpha}{dx}\times\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\times\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\times\frac{d\gamma}{dy} = \frac{d^2\beta}{dt\,dx} + \alpha\frac{d^2\beta}{dx^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dx\,dy} + \gamma\frac{d^2\beta}{dx\,dz} + \frac{d\beta}{dx}\times\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\times\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dz}\times\frac{d\gamma}{dx}.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt\,dz} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dx\,dz} + \beta\frac{d^2\alpha}{dy\,dz} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{d\alpha}{dx}\times\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}\times\frac{d\beta}{dz}$$

$\times \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dz} = \frac{d^2\gamma}{dt\,dx} + \alpha \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \beta \frac{d^2\gamma}{dx\,dy} + \gamma \frac{d^2\gamma}{dx\,dz}$
$+ \frac{d\gamma}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx}$.

Ces équations peuvent s' abréger en ſuppoſant $\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = \mu$; $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \nu$; ce qui les réduira à

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\mu}{dt} + \alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz} + \\ \mu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0, \\ \frac{d\nu}{dt} + \alpha \frac{d\nu}{dx} + \beta \frac{d\nu}{dy} + \gamma \frac{d\nu}{dz} + \\ \nu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0 \end{array}\right\} \cdot (k)$$

On peut ſatisfaire à ces deux équations, en faiſant $\mu = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 0$, $\nu = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0$, $\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = 0$, comme il eſt facile de s' en aſſurer; or la troiſiéme de ces conditions eſt évidemment une ſuite néceſſarire des deux premiéres; donc on n' aura réellement que deux conditions à remplir, leſquelles pourront s' emprimer plus ſimplement en diſant, que $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$ doit être une différentielle complette; & ces conditions jointes avec celle que donne l' équation (i), ſavoir, en changeant d en d, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$ ſerviront à déterminer les mouvement du fluide dans pluſieurs cas particuliers.

Ces cas ſe réduiſent à ceux, où l' on ſuppoſe que particules du fluide décrivent des courbes invariables; ce qui arrive quand les rapports des viteſſes α, β, γ ſont indépendants du tems t, c'eſt-à-dire quand les quantités α, β, γ ſont ſimplement des fonctions de x, y, z, multipliées par une même fonction de t. Car ſoit mis dans les équations géné-

générales (h), $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$, à la place de α, β, γ (θ étant une fonction quelconque de t, & α, β, γ étant maintenant regardées comme des fonctions indéterminées de x, y, z sans t) on trouvera après avoir divisé par θ^2,

$$\mu\frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha\frac{d\mu}{dx} + \beta\frac{d\mu}{dy} + \gamma\frac{d\mu}{dz} +$$

$$\mu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0$$

$$\nu\frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha\frac{d\nu}{dx} + \beta\frac{d\nu}{dy} + \gamma\frac{d\nu}{dz} +$$

$$\nu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Or, comme les termes $\mu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ sont les seuls qui renferment t, il faut nécessairement qu'ils soient $= 0$ séparément de tous les autres, pour que les équations puissent être identiques; on aura donc $\mu = 0$, $\nu = 0$; ce qui satisfait encore au reste de l'une & de l'autre équation, comme on l'a vû plus haut.

Il y a pourtant un cas, où les équations précédentes peuvent être vérifiées sans supposer $\mu = 0$ & $\nu = 0$; c'est celui où l'on aura $\frac{d\theta}{\theta^2 dt} = const.$; c'est-à-dire, où $\frac{1}{\theta} = a - bt$, & $\theta = \frac{1}{a - bt}$, a & b étant deux constantes quelconques; car alors les termes $\mu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu\frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ se trouveront entiérement indépendants du tems t, ainsi que tous les autres.

Au reste en combinant les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ avec l'équation (i), on peut séparer les indéterminées α, β, γ, & l'on aura

$\frac{d^2\alpha}{dx^2}$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d^2\gamma}{dz^2} = 0.$$

XLIII.

REMARQUE. Quand on aura trouvé par le moïen des équations de *l'Art. préc.* les valeurs générales de α, β, γ, il faudra de plus déterminer ces valeurs, en sorte que les particules contigues aux parois du vase, dans lequel le fluide se meut, puissent couler le long de ce parois; soient x', y', z' leurs coordonnées, & $dz' = p\,dx' + q\,dy'$ l'équation qui représente la figure du vase donné, en mettant, au lieu de dx', dy', dz' leurs valeurs $\alpha' dt$, $\beta' dt$, $\gamma' dt$, (α', β', γ' dénotent les valeurs de α, β, γ, lorsque x, y, z deviennent x', y', z') on aura l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$, qui devra être vraie indépendanment de t.

Dans le cas, où le tems t n'entre point dans le rapport des vitesses α, β, γ, il est clair qu'il n'entrera pas non plus dans l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$; mais alors les valeurs de α, β, γ étant beaucoup moins générales, il pourra arriver que cette équation ne se vérifiera qu'en supposant que les quantités p, q aient certaines conditions, c'est-à-dire, que le vase ait une certaine figure; c'est ce que M. d'Alembert a déja remarqué dans un excellent Mémoire *sur les Loix du mouvement des fluides*, imprimé dans le premier Volume de ses Opuscules Mathématiques. Mais ce savant Géomètre prétend de plus que, lorsque le vase aura une autre figure quelconque, le mouvement du fluide ne pourra plus être soumis au calcul; c'est de quoi je ne saurois tomber d'accord avec lui; car il me semble que tout ce qu'il faudroit conclure alors, c'est que la sup-

position particuliere de $\mu = o$, & $\nu = o$ cesseroit d'être exacte, & que par conséquent les valeurs de α, β, γ dependroient de la résolution générale des équations (k)

Il est vrai que M. d'Alembert prétend que les équations $\mu = o$, $\nu = o$ sont les seules vraiment exactes, pour déterminer les loix du mouvement des fluides; il se fonde sur ce que le rapport des vitesses α, β, γ doit être indépendant du tems t dans les particules, qui coulent le long des parois du vase; d'où il infére qu'il doit l'être aussi en général dans toutes les particules du fluide; mais cette conséquence, si j'ose le dire, ne me paroit point assez juste. En effet on peut très-bien imaginer, ce me semble, des fonctions de x, y, z, telles que la variable t ne disparoisse de l'expression de leur rapport, que lorsque x, y, z deviennent x', y', z', & sont liées par l'équation $dz' = p\,dx' + q\,dy'$.

En général il me paroit certain qu'en résolvant les équations (h), (i), par des méthodes analogues à celles que j'ai expliquées dans les *Récher. sur le Son* imprimées ci-devant, on aura une solution applicable à tous les cas possibles, & par laquelle on pourra déterminer le mouvement des fluides qui se meuvent dans des vases de figure quelconque, & qui ont reçu, au commencement, des impulsions quelconques.

Il ne pourra y avoir de difficulté que dans les seuls cas, où le fluide se divisera en se mouvant, & cessera de former une masse continue; mais alors, ayant trouvé par le calcul (ce qui est toujours possible) les endroits, où le fluide doit se diviser en plusieurs portions, on considérera ensuite chaque portion à part, & on en déterminera le mouvement en la regardant comme une masse isolée.

Nous avons observée dans *l'Art. préc.* qu'il y a un cas, où les équations $\mu = o$, $\nu = o$ ne sont pas indispensables dans l'hypotese, que les rapports des vitesses α, β, γ

soient

soient indépandants du tems t. M. d'Alembert a fait aussi cette remarque dans l'*Art. X. de son Mémoire* cité ci-dessus; mais il trouve, par ses formules, que le cas, dont il s'agit est celui, où $\theta = a c^t$, au lieu que suivant les nôtres, ce cas est celui, où $\theta = \frac{1}{a - b t}$. Or cette différence vient d'une légère méprise qui s'est glissée dans les calculs de M. d'Alembert, mais qui n'influe d'ailleurs en rien sur le reste de ses ingénieuses Recherches.

Pour faire sentir la vérité de ce que nous avançons ici, examinons les équations que M. d'Alembert donne dans l'*Art. I. du Mém. cité* pour les fluides pésants, qui se meuvent dans un plan. Ces équations sont 1.° $\frac{dp}{dz} = - \frac{dq}{dx}$, 2.° $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$, g est la gravité, θ est une fonction quelconque de t comme ci-dessus, θq, θp expriment les vitesses que nous avons nommées α & γ, & les quantités A, B, A', B', T sont telles que $d(\theta q) = qTdt + \theta A dx + \theta B dz$; $d(\theta p)$ $pTdt + \theta A' dx + \theta B' dz$.

La premiére de ces équations résulte de l'incompressibilité des particules du fluide, & revient par conséquent au même que l'équation (i) ci-dessus on y faisant $\beta = 0$. A l'égard de la seconde, l'Auteur la tire de cette considération, que les forces verticales, & orizontales perdues à chaque instant par les particules du fluide, doivent se faire équilibre; ces forces sont, selon lui, $g - B\theta p - A\theta q - qT$, $- \theta q A' - \theta p B' - pT$; ce qui donne par le loix générales de l'équilibre des fluides, l'équation dont nous parlons. Or je dis, que suivant les hypotéses de M. d'Alembert, il faut écrire θ^2 au lieu de θ dans les expressions des forces en question. Car il est facile de voir que ces forces

ſont en général $g - \frac{d\alpha}{dt}$, $- \frac{d\gamma}{dt}$ ſavoir $g - \frac{d(\theta q)}{dt}$, $- \frac{d(\theta p)}{dt}$, c'eſt à dire $g - qT - \frac{\theta A dx}{dt} - \frac{\theta B dz}{dt}$, $- pT - \theta A' dx - \theta B' dz$; mais $dx = \alpha dt = \theta q dt$, $dz = \gamma dt = \theta p dt$ donc ces quantités deviendront

$g - qT - \theta^2 A q - \theta^2 B p$, $- pT - \theta^2 A' q - \theta^2 B' p$.

Ainſi l'on aura à la rigueur l'équation

$$\frac{d(g - B\theta^2 p - A\theta^2 q - qt)}{dz} = \frac{d(-\theta^2 q A' - \theta^2 p B' - pT)}{dx}$$

de laquelle le tems t ne diſparoit, que quand θ^2 eſt proportionel à T, c'eſt à dire, $\frac{T dt}{\theta^2} = \frac{d\theta}{\theta^2} = const.$; d'où l'on tire, comme ci-deſſus, $\theta = \frac{1}{a - bt}$; au lieu que ſelon l'équation de M. d'Alembert, cela doit arriver lorſque $\frac{T}{\theta} = const.$ ce qui donne, en intégrant, $\theta = a c$, comme cette Auteur l'a trouvé.

X L I V.

Corollaire 3. Si au lieu de conſidérer les viteſſes α, β, γ on veut conſidérer les variables x, y, z elles-mêmes, on rémarquera que ces variables ne peuvent être que des fonctions du tems t & des valeurs que elles avoient au commencement du mouvement quand $t = 0$, valeurs qui doivent être entiérement arbitraires, pour que la ſolution du problême ait toute la généralité poſſibile.

Dénotons ces valeurs par X, Y, Z, c'eſt à dire ſuppoſons que les variables x, y, z qui repréſentent la poſition de chaque particule du fluide, après un tems quelconque t, ſoient, au commencement du mouvement, X, Y, Z; les

dif-

differences de x, y, z s'exprimeront en géneral de la maniere suivante

$$dif.\ x = L\,dX + M\,dY + N\,dZ + \alpha\,dt$$
$$dif.\ y = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ + \beta\,dt$$
$$dif.\ z = S\,dX + T\,dY + V\,dZ + \gamma\,dt$$

de ſorte que $dx = \alpha\,dt$, $dy = \beta\,dt$, $dz = \gamma\,dt$ & $\mathrm{d}x = L\,dX + M\,dY + N\,dZ$, $\mathrm{d}y = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ$ $\mathrm{d}z = S\,dX + T\,dY + V\,dZ$.

Subſtituant dans les équations (*h*), (*i*), α, β, γ au lieu $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, & ſuppoſant d'ailleurs, pour ſimplifier le calcul, D conſtant, & $\frac{\mathrm{d}(D\Pi)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}(D\pi)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}(D\Pi)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}(D\Psi)}{\mathrm{d}x}$; on trouvera, aprés avoir diviſé les deux premiéres par $D\,dt$, & la troiſiéme par dt

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\mathrm{d}\cdot\frac{d\beta}{dt}}{\mathrm{d}x} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}\cdot\frac{d\gamma}{dt}}{\mathrm{d}x} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}y}$ exprime, comme on ſait, le coéficient qu'auroit y dans la différentiation de $\frac{d\alpha}{dt}$, ſuppoſé que α fût exprimée par une fonction de x, y, z, t; & ainſi des autres expreſſions ſemblables. Donc, puiſque les quantités α, β, γ ſont (*hip.*) des fonctions de X, Y, Z, il faudra ſubſtituer dans α, β, γ, à la place des variables, X, Y, Z, leurs valeurs en x, y, z, & différentier enſuite, en prenant x, y, z

pour

pour variables; ou bien ce, qui revient au même, différentier d'abord les quantités α, β, γ en faisant varier X, Y, Z, & substituer ensuite, au lieu de dX, dY, dZ, leurs valeurs en dx, dy, dz.

Des expressions de dx, dy, dz donneés ci-dessus on tire par les régles communes de l'algébre.

$$dX = \frac{(QV - RT)\,dx + (NT - MV)\,dy + (MR - NQ)\,dz}{K}$$

$$dY = \frac{(RS - PV)\,dx + (LV - NS)\,dy + (NP - LR)\,dz}{K}$$

$$dZ = \frac{(PT - QS)\,dx + (MS - LT)\,dy + (LQ - MP)\,dz}{K}$$

K étant mis, pour abréger, au lieu de $LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT$

Or $d\alpha$ est la différence de α, qui nait des différences dx, dy, dz, ou bien des différences dX, dY, dZ; donc on aura en général $d\alpha = \frac{d\alpha}{dX}dX + \frac{d\alpha}{dY}dY + \frac{d\alpha}{dZ}dZ$; on aura de plus à cause que *dif.* x, est une différentielle complette, $\frac{d\alpha}{dX} = \frac{dL}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dY} = \frac{dM}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dZ} = \frac{dN}{dt}$; donc

$$d\alpha = \frac{dL}{dt}dX + \frac{dM}{dt}dY + \frac{dN}{dt}dZ;$$

on trouvera de même

$$d\beta = \frac{dP}{dt}dX + \frac{dQ}{dt}dY + \frac{dR}{dt}dZ$$

$$d\gamma = \frac{dS}{dt}dX + \frac{dT}{dt}dY + \frac{dV}{dt}dZ.$$

substituant, au lieu de dX, dY, dZ, les valeurs trouvées ci-devant, il viendra

$$d\alpha = \frac{(QV - RT)\frac{dL}{dt} + (RS - PV)\frac{dM}{dt} + (PT - QS)\frac{dN}{dt}}{K}\,dx$$

(N

$$+ \frac{(NT-MV)\frac{dL}{dt} + (LV-NS)\frac{dM}{dt} + (MS-LT)\frac{dN}{dt}}{K}\,\mathrm{d}y$$

$$+ \frac{(MR-NQ)\frac{dL}{dt} + (NP-LR)\frac{dM}{dt} + (LQ-MP)\frac{dN}{dt}}{K}\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\beta = \frac{(QV-RT)\frac{dP}{dt} + (RS-PV)\frac{dQ}{dt} + (PT-QS)\frac{dR}{dt}}{K}\,\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{(NT-MV)\frac{dP}{dt} + (LV-NS)\frac{dQ}{dt} + (MS-LT)\frac{dR}{dt}}{K}\,\mathrm{d}y$$

$$+ \frac{(MR-NQ)\frac{dP}{dt} + (NP-NL)\frac{dQ}{dt} + (LQ-MP)\frac{dR}{dt}}{K}\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\gamma = \frac{(QV-RT)\frac{dS}{dt} + (RS-PV)\frac{dT}{dt} + (PT-QS)\frac{dV}{dt}}{K}\,\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{(NT-MV)\frac{dS}{dt} + (LV-NS)\frac{dT}{dt} + (MS-LT)\frac{dV}{dy}}{K}\,\mathrm{d}y$$

$$+ \frac{(MR-NQ)\frac{dS}{dt} + (NP-LR)\frac{dT}{dt} + (LQ-MP)\frac{dV}{dt}}{K}\,\mathrm{d}z$$

Donc prenant, dans l' expreſſion de $\mathrm{d}\alpha$, le coéficient de $\mathrm{d}x$, dans celle de $\mathrm{d}\beta$ le coéficient de $\mathrm{d}y$, & dans celle de $\mathrm{d}\gamma$ le coéficient de $\mathrm{d}z$, on aura les valeurs de $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}$ & l' équation (m) deviendra

$$(QV-RT)\frac{dL}{dt} + (RS-PV)\frac{dM}{dt} + (PT-QS)\frac{dN}{dt} +$$
$$(NT-MV)\frac{dP}{dt} + (LV-NS)\frac{dQ}{dt} + (MS-LT)\frac{dR}{dt} +$$
$$(MR-NQ)\frac{dS}{dt} + (NP-LR)\frac{dT}{dt} + (LQ-NP)\frac{dV}{dt} = 0;$$

ou

ou, (ce qui eſt la même choſe) $\frac{dK}{dt} = 0$, d'où l'on tirera $K = const.$, ſavoir

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = H$,
H étant une fonction de X, Y, Z, ſans t, ſavoir la valeur de K, lorſque $t = 0$.

A l'égard des deux équations (l), on remarquera que $d \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ eſt la même choſe que $\frac{d \cdot d\alpha}{dt}$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à différentier la valeur de $d\alpha$ trouvée ci-deſſus, en ne faiſant varier que t, & l'on aura

$$d \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2L}{dt^2} dX + \frac{d^2M}{dt^2} dY + \frac{d^2N}{dt^2} dZ$$

de la même maniére on trouvera

$$d \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} dX + \frac{d^2Q}{dt^2} dY + \frac{d^2R}{dt^2} dZ,$$

$$d \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} dX + \frac{d^2T}{dt^2} dY + \frac{d^2V}{dt^2} dZ.$$

On ſubſtituera donc dans ces expreſſions, comme on a fait ci-deſſus dans celles de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, les valeurs de dX, dY, dZ en dx, dy, dz, & prenant les coéficiens de dy & dz dans la différentielle $d\frac{d\alpha}{dt}$, & ceux de dx dans les deux différentielles $d\frac{d\beta}{dt}$, $d\frac{d\gamma}{dt}$, on aura les valeurs de $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dy}$, $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dz}$, $\frac{d \cdot \frac{d\beta}{dt}}{dx}$, $\frac{d \cdot \frac{d\gamma}{dt}}{dx}$; leſquelles étant miſes à la place de ces quantités dans les équations (l), il nous viendra, en ôtant le dénominateur commun K les deux équations

(NT

$$(NT - MV)\frac{d^2L}{dt^2} + (LV - NS)\frac{d^2M}{dt^2} + (MS - LT)\frac{d^2N}{dt^2} =$$
$$(QV - RT)\frac{d^2P}{dt^2} + (RS - PV)\frac{d^2Q}{dt^2} + (PT - QS)\frac{d^2R}{dt^2};$$
$$(MR - NQ)\frac{d^2L}{dt^2} + (NP - LR)\frac{d^2M}{dt^2} + (LQ - MP)\frac{d^2N}{dt^2} =$$
$$(QV - RT)\frac{d^2S}{dt^2} + (RS - PV)\frac{d^2T}{dt^2} + (PT - QS)\frac{d^2V}{dt^2}.$$

Si on met dans ces deux équations auſſi bien que dans celle qui a été trouvé précédemment, pour $L, M, N, P, Q, R, S, T, V$, leurs valeurs $\frac{dx}{dX}, \frac{dx}{dY}, \frac{dx}{dZ}, \frac{dy}{dX}, \frac{dy}{dY}, \frac{dy}{dZ}, \frac{dz}{dX}, \frac{dz}{dY}, \frac{dz}{dZ}$, on aura trois équations générales qui ne renfermeront que les changeantes x, y, z avec leurs différences rélatives à X, Y, Z, t, & par leſquelles on pourra déterminer la poſition de chaque particule du fluide à chaque inſtant de ſon mouvement.

X L V.

SCHOLIE. Les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, que nous avons ſuppoſées dans l'*Art. XLII.* pour ſimplifier les formules (h), ont lieu quand toutes les forces Π, π, Ψ font telles que leurs actions ſur les particules du fluide ſe détruiſent mutuellement, c'eſt-à-dire, que les particules du fluide animées par ces forces ſe ſont équilibre. En effet ſi le fluide eſt en répos les viteſſes α, β, γ ſont nulles, & les équations (h) ſe réduiſent à celles que nous venons de rapporter.

Au reſte pour pouvoir faire uſage des équations dont il s'agit, il n'eſt pas néceſſaire que les quantités D, Π,

 π,

π, Ψ ſoient uniquement des fonctions de x, y, z comme il ſemble qu'on pourroit le conclure de la forme même de ces équations.

Suppoſons par exemple que les quantités D, Π, π, Ψ renferment, outre les variables x, y, z, encore une quatriéme variable s repréſentée par une ligne quelconque ; il eſt clair que quelle que ſoit la nature & la poſition de cette ligne, on pourra toujours exprimer ſa différentielle ds de cette maniére $A\,dx + B\,dy + C\,dz$; par conſéquent la valeur complette de l'expreſſion $\frac{d(D\Pi)}{dy}$, qui n'eſt autre choſe que le coéficient de dy dans la différentiation de $D\Pi$, ſera $\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds}$; on trouvera de même $\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds}$, $\frac{d(D\pi)}{dx} + A\frac{d(D\pi)}{ds}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds}$, pour les valeurs complettes des expreſſions $\frac{d(D\Pi)}{dz}$, $\frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx}$; ſubſtituant ces valeurs dans les équations ci-deſſus elles deviendront

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\pi)}{dx} + A\frac{d(D\pi)}{ds}$$

$$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds}.$$

Equations, dans leſquelles les différentielles qui dépendent de chacune des variables x, y, z, s ſe trouvent ſéparées.

Je fais cette remarque rélativement à un endroit de l'excellent Traité de *la Réſiſtance des fluides* (*Art.* 164.)

Si la denſité D eſt conſtante, les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$ deviennent, en di-

viſant

visant par D, $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$, lesquelles renferment les conditions de l'équilibre des fluides homogènes.

Supposons que le fluide soit composé de différentes couches, dont chacune soit d'une densité uniforme, & qu'on en cherche l'équation; soient x, y, z les coordonnées de chacune de ces couches, on aura (*hypoth.*) $\frac{dD}{dx}dx + \frac{dD}{dy}dy + \frac{dD}{dz}dz = 0$. Or les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, donnent

$$\Pi\frac{dD}{dy} + D\frac{d\Pi}{dy} = \pi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\pi}{dx},$$

$$\Pi\frac{dD}{dz} + D\frac{d\Pi}{dz} = \Psi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\Psi}{dx},$$

substituant dans l'équation ci-dessus les valeurs de $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$ tirées de celles-ci, & ordonnant les termes il viendra

$$\frac{dD}{dx}\left(dx + \frac{\pi}{\Pi}dy + \frac{\Psi}{\Pi}dz\right) + \frac{D}{\Pi}\left[\left(\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}\right)dz\right] = 0,$$ savoir en multipliant par $\frac{\Pi}{D}$,

$$\frac{dD}{D\,dx}(\Pi dx + \pi dy + \Psi dz) + \left(\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}\right)dz = 0.$$

Equation qui exprimera la figure de chaque couche où la densité est uniforme.

Si

Si l' on a $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$ c' eſt-à-dire ſi les forces Π, π, Ψ ſont par leur nature telles, qu'elles puiſſent tenir en équilibre une maſſe fluide homogéne, alors l' équation précédente ſe réduit à $\frac{dD}{Ddx}(\Pi dx + \pi dy + \Psi dz) = 0$ ce qui donne

$$\Pi dx + \pi dy + \Psi dz = 0$$

Equation générale des couches de niveau, comme il eſt aiſé de le voir, d' où il s' enſuit que dans ce cas chaque couche de niveau ſera néceſſairement d' une denſité uniforme dans toute ſon étendue.

Tel devroit donc être l' arrangement de différentes parties de la terre ſi elle avoit été primitivement fluide; car il eſt aiſé de prouver par le calcul, & M. Clairant l'a démontré à *l'Art. LIV.* de ſa Théorie *de la figure de la Terre*, que les forces Π, π, Ψ réſultantes de toutes les attractions que les particules exercent les unes ſur les autres ont d'elles mêmes les conditions $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$.

Cependant un grand Géométre a crû que il n' étoit pas toujours néceſſaire que les ſurfaces des différentes couches fuſſent de niveau, & il a donné un autre Principe pour connoître la figure de ces ſurfaces. Voyés l'Appendice qui eſt à la fin de l' *Eſſai ſur la réſiſtence des fluides* cité ci-deſſus, & la III. Partie des *Recherches ſur le ſiſteme du Monde* pag. 226. & ſuiv. Mais les équations, que ſon Principe fournit ne ſont elles mêmes dans le fond, que celles des couches de niveau. Pour le démontrer d' une maniére générale, ſoit un ſphéroïde composé de couches de différentes denſités, & dont le rayon ſoit exprimé généralement par $r + \alpha Z$, r étant une quantité conſtante dans la même couche, Z étant une fonction quelconque de r, & d' un angle z variable pour tous les points de chaque couche, & α marquant une

petite

petite quantité conſtante. Qu' on réduiſe l' attraction totale que ce ſphéroïde exerce ſur chaque particule d' une couche quelconque, à deux forces, l'une verticale, c' eſt à dire perpendiculaire à la couche, & qui pourra ſans erreur ſenſible être ſuppoſée égale à la péſanteur qui tend au centre du ſphéroïde; l' autre horizontale, ſavoir dans la direction même de la couche, laquelle eſt à peu près perpendiculaire au rayon; & ſoit nommée la premiere Π, & la ſeconde π. Par le Principe de l' illuſtre Auteur dont nous venons de parler, il faudra multiplier la force horizontale π par $\Delta\, r\, d\, z$ (Δ marque la denſité du fluide qu'on ſuppoſe être une fonction de r ſeulement) enſuite la différentier en ne faiſant varier que r; de même il faudra multiplier la force verticale Π par $\Delta\,(dr + \alpha \frac{dZ}{dr}\, dr,)$ & différentier enſuite en ne faiſant varier que z; après quoi on égalera les deux différentielles, ce qui donnera l' équation

$$\frac{d(\Delta r \pi)}{dr}\, dr\, dz = \frac{d(\Delta \Pi + \Delta \Pi \frac{dZ}{dr})}{dz}\, dz\, dr,\ \text{ſavoir}$$

$$\frac{d\Delta}{dr} \times r\pi + \frac{d(r\pi)}{dr} \times \Delta = \frac{d(\Pi + \Pi \frac{dZ}{dr})}{dz} \times \Delta.$$

Or, en faiſant le calcul, on trouvera toujours que les quantités Π, π, Z ſeront telles que $\frac{d(\Pi + \Pi \frac{dZ}{dr})}{dz} = \frac{d(r\pi)}{dr}$; donc il ne reſtera que l' équation $\frac{d\Delta}{dr} \times r\pi = 0$, qui donne $\pi = 0$, ſavoir la force horizontale nulle, & par conſéquent chaque couche de niveau.

XLVI.

X L V I.

Corollaire 4. Je viens mainténant à l' équation (f). Par la nature des expreſſions dont cette équation eſt composée, il eſt manifeſte qu' elle appartient uniquement à la ſurface poſtérieure du fluide. Or ſi l'on ſuppoſe qu'il n'y ait point de parois qui ſoutiennent le fluide, les valeurs de $\delta`x$, $\delta`y$, $\delta`z$ demeureront abſolument arbitraires, & l' équation (f) ne pourra ſe vérifier qu' en faiſant généralement $T = 0$, ſavoir la valeur totale de l' intégrale $S\,dx\,D\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)$ nulle.

Soient rapportées les équations (e) à la ſurface poſterieure du fluide en y mettant $`x$, $`y$, $`z$ au lieu de $x$, $y$, $z$, & ſuppoſant l'intégrale $S\,dx\,D\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right) = 0$, ce qui rend $V = T$, on aura $\frac{dT\,dt}{d`y} = `D\left(d\cdot\frac{d`y}{dt} + `\Pi\,dt\right)$, $\frac{dT\,dt}{d`z} = `D\left(d\,\frac{d`z}{dt} + `\Psi\,dt\right)$; donc

$$dT = \frac{dT}{d`x}\,d`x + \frac{dT}{d`y}\,d`y + \frac{dT}{d`z}\,d`z =$$

$`D\left[\left(d\cdot\frac{d`x}{dt} + `\Pi\,dt\right)d`x + \left(d\cdot\frac{d`y}{dt} + `\pi\,dt\right)d`y + \left(d\cdot\frac{d`z}{dt} + `\Psi\,dt\right)d`z\right)$. C'eſt la valeur de la différentielle de T priſe dans la ſurface dont nous parlons; donc puiſque la quantité T y doit être généralement $= 0$, ſa différentielle le ſera auſſi, & l' on aura par conſéquent l' équation

$$\left(d\cdot\frac{d`x}{dt} + `\Pi\,dt\right)d`x + \left(d\cdot\frac{d`y}{dt} + `\pi\,dt\right)d`y$$
$$+ \left(d\cdot\frac{d`y}{dt} + `\Psi\,dt\right)d`z = 0,$$

qui ſera celle que la ſurface poſtérieure du fluide doit avoir.

On

On trouvera une équation ſemblable pour la ſurface antérieure du fluide; car nommant x', y', z' les coordonnées pour cette ſurface, & V' ce que devient V quand x, y, z, deviennent x', y', z', on aura en général, comme on l'a déja remarqué (*Art.XL.*) $V' = 0$; donc auſſi $\mathrm{d}V'$ ou $\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x'}\mathrm{d}x' + \frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}y'}\mathrm{d}y' + \frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}z'}\mathrm{d}z' = 0$. Or $\frac{\mathrm{d}V dt}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -D\mathrm{d}x\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$, & $\frac{\mathrm{d}V dt}{\mathrm{d}y} = -D\left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt\right)$, $\frac{\mathrm{d}V dt}{\mathrm{d}z} = -D\left(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right)$; donc $\mathrm{d}V' = -\frac{D'}{dt}\left[\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right)\mathrm{d}x' + \left(d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right)\mathrm{d}y' + \left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right)\mathrm{d}z'\right] = 0$. Donc en général, quand le fluide eſt libre de tous cotés ſa ſurface extérieure doit être déterminée par l'équation

$$\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)\mathrm{d}x + \left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt\right)\mathrm{d}y + \left(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right)\mathrm{d}z = 0.$$

Suppoſons maintenant que le fluide ſoit ſoutenu par des parois fixes de figure quelconque, & dont l'équation ſoit $\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y$. Si l'on conſidére les trois expreſſions intégrales de l'équation (*f*) on voit qu'elles renferment chacune deux intégrations, qui ſe rapportent à y & z dans la premiére, à x & z dans la ſeconde, à x & y dans la troiſiéme. Or puiſque la rélation des trois variables x, y, z eſt donnée par l'équation $\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y$ ces différentes intégrales pourront être ramenées toutes à la même forme, c'eſt-à-dire être rapportées à deux ſeules changeantes x, & y; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans la premiere au lieu de $\mathrm{d}z$ ſa valeur en x, $m\,\mathrm{d}x$,

&

& dans la ſeconde, ſa valeur en y, $n\,dy$; par-là l'équation (f) deviendra celle-ci
$S^2\,dx\,dy\,(m\,\delta x + n\,\delta y + \delta z)\,T\,dt = 0$.
Mais puiſque $dz = m\,dx + n\,dy$, on doit avoir auſſi $\delta z = m\,\delta x + n\,\delta y$; donc l'équation ſera identique, & ne fournira aucune condition; ainſi tout ſe reduira à faire enſorte que les équations generales (b), (e), ſatisfaſſent, après leur intégration, à l'équation donnée $dz = m\,dx + n\,dy$.

XLVIII.

RÉMARQUE. Je ne m'étends pas d'avantage ſur cette matiere pour ne point paſſer les bornes que je me ſuis preſcites dans le préſent Mémoire. Au reſte par les formules méthodes données dans ce Problême, & dans les précedents, on pourroit encore trouver la ſolution de pluſieurs queſtions qui concernent les fluides: comme le mouvement d'un fluide enfermé dans un vaſe mobile, les oſcillations d'un corps qui flotte ſur un fluide, la réſiſtance qu'un fluide fait à un corps qui s'y meut; & d'autres Problêmes de cette eſpece.

XLIX.

PROBLEME 10. Trouver les lois du mouvement des fluides élaſtiques.

SOLUTION. Par nôtre Principe général il faut que la quantité $S^3\,d\,m\int u\,d\,s$ ſoit un *maximum*, ou un *minimum*; donc en faiſant les mêmes raiſonnemens que dans le Prob. 6., on trouvera l'équation

$$\int S^3\,dm\left(u\,\delta u\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta x - d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta y - d\cdot\frac{dz}{dt}\times\delta z\right) = 0.$$

Or

Or si aucune force n' agissoit entre les corpuscules dm, on auroit, conformement à la formule (X) du même Prob. $S^3 dm u \delta u dt = S^3 dm (\Pi dt \delta x + \pi dt \delta y + \Psi dt \delta z)$; mais le fluide étant supposé élastique, on doit regarder chaque particule comme un ressort qui agit de tous côtés sur les particules contigues. Nommant F la force du ressort, & f l' espace par lequel il tend à se dilater, on trouvera en applicant ici la formule (V) de l' *Art. VIII.* $S^3 dm u \delta u = - S^3 dm (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.) - S^3 F \delta f$, ou (en mettant $\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z$ au lieu de $P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.$, & prenant F négativement, à cause que cette force tend ici à éloigner les particules) $S^3 dm u \delta u = - S^3 dm (\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z) + S^3 F \delta f$.

Substituant cette valeur dans l' équation ci-dessus, & mettant au lieu de dm sa valeur $D \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$, on aura donc

$$-\int S^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z D \left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta x + \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt\right) \delta y + \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt\right) \delta z \right] + \int S^3 F \delta f dt = 0 \quad . \quad . \quad (n).$$

Or comme l' action du ressort F consiste à augmenter le volume de chaque particule $d\, m$, il est clair il faudra prendre ce volume même pour la valeur de l' espace f, donc $f = \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$, par conséquent $\delta f = \mathrm{d}y \mathrm{d}z \delta \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \mathrm{d}z \delta \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \mathrm{d}y \delta \mathrm{d}z$, $=$ (en transposant les signes δ, d) $\mathrm{d}y \mathrm{d}z \mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x \mathrm{d}z \mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}\delta z$; donc $S^3 F \delta f = S^3 (F \mathrm{d}y \mathrm{d}z \mathrm{d}\delta x + F \mathrm{d}x \mathrm{d}z \mathrm{d}\delta y + F \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}\delta z) = S^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \left(\frac{F}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}\delta x + \frac{F}{\mathrm{d}y} \mathrm{d}\delta y + \frac{F}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}\delta z \right)$; formule, qu' on peut mettre sous cette forme

$$S^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}z \, S \mathrm{d}x \frac{F}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}\delta x + S^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}z \, S \mathrm{d}y \frac{F}{\mathrm{d}y} \mathrm{d}\delta y$$

$$+ S^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, S \mathrm{d}z \frac{F}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}\delta z.$$

Or $S\,dx\,\frac{F}{dx}\,d\delta x$ se réduit, en intégrant par parties, à $F\delta x - S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x$ (j'écris $dx\,\frac{dF}{dx}$ au lieu de dF pour dénoter que cette différentielle doit être prise en ne variant que x), & complettant l'intégrale, suivant la remarque que nous avons faite à la fin de *l'Art. I. du Mém. préced.* $F'\delta x' - {}'F\delta{}'x - S\,dx\,\frac{dF}{dx}\delta x$; on changera de même $S\,dy\,\frac{F}{dy}\,d\delta y$, en $F'\delta y' - {}'F\delta{}'y - S\,dy\,\frac{dF}{dy}\,\delta y$; & $S\,dz\,\frac{F}{dz}d\delta z$, en $F'\delta z' - {}'F\delta{}'z - S\,dz\,\frac{dF}{dz}\,\delta z$; donc $S^3 F\delta f = S^2\,dy\,dz\,(F'\delta x' - {}'F\delta{}'x) + S^2\,dx\,dz\,(F'\delta y' - {}'F\delta{}'y) + S^2\,dx\,dy\,(F'\delta z' - {}'F\delta{}'z) - S^2\,dy\,dz\,S\,dx\,\frac{dF}{dx}\delta x - S^2\,dx\,dz\,S\,dy\,\frac{dF}{dy}\,\delta y - S^2\,dx\,dy\,S\,dz\,\frac{dF}{dz}\delta z$

$$= S^2 dy\,dz\,F'\delta x' + S^2 dx\,dz\,F'\delta y' + S^2 dx\,dy\,F'\delta y' - S^2 dy\,dz\,{}'F\delta{}'x - S^2 dx\,dz\,{}'F\delta{}'y - S^2 dx\,dy\,{}'F\delta{}'z + S^3 dx\,dy\,dz\,(\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\,\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z);$$

donc substituant dans l'équation (n), au lieu de $S^3 F\delta f$, l'expression qu'on vient de trouver on aura enfin

$$\int(S^2 dy\,dz\,F'\delta x' + S^2 dx\,dz\,F'\delta y' + S^2 dx\,dy\,F'\delta z' - S^2 dy\,dz\,{}'F\delta{}'x - S^2 dx\,dz\,{}'F\delta{}'y - S^2 dx\,dy\,{}'F\delta{}'z)$$
$$-\int S^3 dx\,dy\,dz\,(D\,d\cdot\frac{dx}{dt} + D\,\Pi\,dt + \frac{dF}{dx}\,dt)\,\delta x$$
$$+ (D\,d\cdot\frac{dy}{dt} + D\,\pi\,dt + \frac{dF}{dy}\,dt)\,\delta y$$
$$+ (D\,d\cdot\frac{dz}{dt} + D\,\Psi\,dt + \frac{dF}{dz}\,dt)\,\delta z] = 0$$

équa-

Equation réduite à l'état qu'exige notre Méthode; supposant donc les coéficiens des différences δx, δy, δz chacun $= 0$; on aura

$$\left.\begin{aligned} D\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\, dt\right) + \frac{dF}{dx}\,dt = 0 \\ D\left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\, dt\right) + \frac{dF}{dy}\,dt = 0 \\ D\left(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\, dt\right) + \frac{dF}{dz}\,dt = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (p)$$

& le reste de l'équation donnera

$$S^2 dy\, dz\, F'\delta x' + S^2 dx\, dz\, F'\delta y' + S^2 dx\, dy\, F'\delta z' -$$
$$S^2 dy\, dz\, {}^{\backprime}F\, \delta {}^{\backprime}x + S^2 dx\, dz\, {}^{\backprime}F\, \delta {}^{\backprime}y + S^2 dx\, dy\, {}^{\backprime}F\, \delta {}^{\backprime}z = 0 \;.\, (q)$$

L.

Corollaire 1. Les trois équations (p) renferment les loix générales du mouvement des fluides élastiques. Pour faire usage de ces équations on supposera comme dans *l'Art. XLII.*, $\frac{dx}{dt} = \alpha$, $\frac{dy}{dt} = \beta$, $\frac{dz}{dt} = \gamma$, on mettra au lieu de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ leurs valeurs trouvées dans le même *Article*, & marquant, pour plus de simplicité, toutes les différences par d, on trouvera, après avoir divisé par $D\,dt$, les trois équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dy} + \gamma\frac{d\alpha}{dz} + \Pi = -\frac{dF}{D\,dx}. \\ \frac{d\beta}{dt} + \alpha\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dy} + \gamma\frac{d\beta}{dz} + \pi = -\frac{dF}{D\,dy}. \\ \frac{d\gamma}{dt} + \alpha\frac{d\gamma}{dx} + \beta\frac{d\gamma}{dy} + \gamma\frac{d\gamma}{dz} + \Psi = -\frac{dF}{D\,dz}. \end{aligned}\right\} (r)$$

dans lesquelles il ne faudra plus que substituer au lieu de F, & de D leurs valeurs en x, y, z, t.

Voici comment on trouvera ces valeurs; F exprime la force du ressort de chaque particule du fluide, laquelle est

 ordi-

ordinairement proportionelle à la densité; suppòsons donc, pour plus de généralité, que cette force soit comme une fonction quelconque donnée de la densité, ensorte que $dF = E\,dD$; on aura $\frac{dF}{dx} = E\frac{dD}{dx}$, $\frac{dF}{dy} = E\frac{dD}{dy}$, $\frac{dF}{dz} = E\frac{dD}{dz}$. Ensuite pour trouver D, on observera que la masse dm de chaque particule du fluide est $D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, & que cette masse reste toujours la même quelque mouvement que le fluide reçoive; dont sa différentielle en faisant varier t, doit être nulle; ce qui donne $\frac{d(D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)}{dt} = 0$, savoir $\frac{dD}{dt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}D\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$, ou

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}}{\mathrm{d}x} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}}{\mathrm{d}y} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}}{\mathrm{d}z} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (s)$$

Or $\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt} = \mathrm{d}\cdot\frac{dx}{dt} = \mathrm{d}\alpha$; donc $\frac{\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$; on trouve de même $\frac{\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}$, & $\frac{\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}$; de plus $\frac{dD}{dt}dt$ exprime la variation de D dans l'instant dt; donc si on suppose que D soit représenté par une fonction quelconque de x, y, z, t, on trouvera que la valeur complette de $\frac{dD}{dt}dt$ sera $\frac{dD}{dt}dt + \frac{dD}{dx}\alpha\,dt + \frac{dD}{dy}\beta\,dt + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}\gamma\,dt$; on mettra ces valeurs dans l'équation ci-dessus, & changeant les lettres d en d, & multipliant le tout par

D on aura

$$\frac{dD}{dt} + \alpha\frac{dD}{dx} + \beta\frac{dD}{dy} + \gamma\frac{dD}{dz} +$$
$$D\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) = 0, \text{ ou}$$
$$\frac{dD}{dt} + \frac{d(D\alpha)}{dx} + \frac{d(D\beta)}{dy} + \frac{d(D\gamma)}{dz} = 0.$$

Equation par laquelle on connoîtra D, & par conſéquent F.

L I.

Corollaire 2. Soit, ſuivant l'hypotéſe ordinaire, $F = D$, par conſéquent $E = 1$; & qu'on mette les équations (r) ſous cette forme

$L = -\frac{dF}{D\,dx}$, $M = -\frac{dF}{D\,dy}$, $N = -\frac{dF}{D\,dz}$, on aura

$$L = -\frac{dD}{D\,dx},\ M = -\frac{dD}{D\,dy},\ N = -\frac{dD}{D\,dz}.$$

Suppoſons encore, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = V$, on aura (*Artic. précédent*) l'équation $\frac{dD}{dt} + \alpha\frac{dD}{dx} + \beta\frac{dD}{dy} + \gamma\frac{dD}{dz} + DV = 0$; donc, chaſſant les quantités $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, par le moïen des équations préc.; diviſant par D, & tranſpoſant, on aura $\frac{\frac{dD}{dt}}{D}$, ou $\frac{d\cdot lD}{dt} = \alpha L + \beta M + \gamma N - V$, ou, pour abréger, $\frac{d\cdot lD}{dt} = T$. Or les équations ci-deſſus ſe réduiſent à $L = -\frac{d\cdot lD}{dx}$; $M = -$

$\frac{d \cdot lD}{dy}$, $N = - \frac{d \cdot lD}{dz}$, donc comparant ces équations avec celle qu'on vient de trouver on aura $\frac{dL}{dt} = - \frac{dT}{dx}$; $\frac{dM}{dt} = - \frac{dT}{dy}$; $\frac{dN}{dt} = - \frac{dT}{dz}$; équations, où la lettre D ne se trouve plus. On trouvera encore en combinant ensemble les équations ci-devant $\frac{dL}{dy} = \frac{dM}{dx}$, $\frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}$, deux équations qui reviennent au même que les équations (k) de *l' Art. XLII.* L' on aura donc cinq équations toutes délivrées de la lettre D, dont trois prises à volonté suffiseront pour résoudre le Problême.

Si on suppose que le mouvement du fluide soit parvenu à un état permanant; alors on aura $\frac{dD}{dt} = 0$, & par conséquent $T = 0$.

L I I.

Corollaire 3. On peut encore représenter le mouvement du fluide par les variables X, Y, Z, t, comme dans *l'Art. XLIV.* Pour cela on cherchera d'abord la valeur de D au moïen de l'équation (s), laquelle en introduisant les lettres α, β, γ, devient celle-ci, $\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$. Or, par les formules de *l' Art. cité*, on trouve $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\frac{dK}{dt}}{K}$, par conséquent $\frac{\frac{dD}{dt}}{D}$

dK

$+ \frac{\frac{dK}{dt}}{K} = o$, d'où l'on tire $lD + lK = const.$, savoir $DK = h$, & $D = \frac{h}{K}$. Pour déterminer la constante h, on remarquera, qu'au commencement du mouvement, $dx = dX$, $dy = dY$, $dz = dZ$; donc $L = 1$, $M = o$, $N = o$, $P = o$, $Q = 1$, $R = o$, $S = o$, $T = o$, $V = 1$; ce qui donne $K = 1$; d'où il s'ensuit que h doit être égale à la densité D que le fluide a au premier instant de son mouvement.

Aïant trouvé l'expression de D il n'y aura plus qu'à la substituer dans les équations (p); or D étant une fonction de X, Y, Z, t; sa différentielle, en prenant t constant, sera représentée par $EdX + FdY + GdZ$; ainsi pour avoir les valeurs de $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, il faudra encore substituer au lieu de dX, dY, dZ leurs expressions en dx, dy, dz trouvées dans *l'Art.XLIV.*, ce qui donnera, en supposant

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C,$$

$dD = \frac{Adx + Bdy + Cdz}{K}$, d'où l'on tire $\frac{dD}{dx} = \frac{A}{K}$, $\frac{dD}{dy} = \frac{B}{K}$, $\frac{dD}{dz} = \frac{C}{K}$; & par conséquent suivant l'hyp. de *l'Art. L.* $\frac{dF}{dx} = \frac{EA}{K}$, $\frac{dF}{dy} = \frac{EB}{K}$, $\frac{dF}{dz} = \frac{EC}{K}$.

On substituera donc ces valeurs dans les équations (p), & l'on aura, en divisant par D qui est $= \frac{h}{K}$,

$$d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt + \frac{EA}{h} dt = o$$

$d \cdot dy$

$$d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi\, dt + \frac{EB}{b}\, dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi\, dt + \frac{EC}{b}\, dt = 0.$$

Si on ſuppoſe dans ces équations $\Pi = 0$, $\pi = 0$, $\Psi = 0$, $\frac{E}{b} = 2\,g$, elles reviennent au même que celles que M. Euler a trouvé par une voie différente, *pag.* 6. *ci-deſſus*.

LIII.

Scholie. A l'égard de l'équation (q) qui reſte encore à examiner, on prouvera par un raiſonnement ſemblale à celui de *l'Art. XLVI.* que, ſi le fluide appuïe contre des parois fixes, les trois termes $S^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, 'F\, \delta\, 'x + S^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\, 'F \delta\, 'y + S^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, 'F\, \delta\, 'z$ ſont toujours $= 0$ auſſi bien que les trois autres $S^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, F' \delta\, x' + S^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\, F' \delta\, y' + S^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, F' \delta\, z'$. Mais ſi on ſuppoſe le fluide libre de toutes parts, ou ſeulement de quelque côté; alors la quantité F devra être nulle à la ſurface extérieure du fluide dans les endroits, où il eſt libre; on aura donc, pour cette ſurface, l'équation $\mathrm{d}F = 0$, ſavoir $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\, \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z = 0$; ou, en mettant, au lieu de $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ leurs valeurs, tirées des équations (p) $\left(d \cdot \frac{dx}{dx} + \Pi\, dt\right) \mathrm{d}x + \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi\, dt\right) \mathrm{d}y + \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi\, dt\right) \mathrm{d}z = 0$, précifément comme on a trouvé dans *l'Art. cité* pour les fluides non élaſtiques.

Fautes

Fautes à corriger.

Pag. 196., *lign.* 5. qui a pour titre: *Methodus maximorum &c.*; *lisez* qui a pour titre: *Methodus inveniendi lineas curvas &c.*

Cet Ouvrage est le même que celui que nous avons déja cité dans le Mémoire précédent.

Pag. 201. *ligne antépénultiéme* les mêmes substitutions, *lisez* les mêmes suppositions.

Pag. 203. *lign.* 4. multipliant par $\frac{\delta\phi}{V}$, *changez* le δ en d.

Pag. 204. *lign.* 17. un raport tel que $P\,dp\,\delta$, *mettez* $\delta P . dp$.

lign. 24. $A\delta p + B\delta q + R\delta r$, *lisez* $A\delta p + B\delta q + C\delta r$.

Pag. 209. *lign.* 9. & 10. de *l'Art.* X., *changez* P', P'' en P; Q', Q'' en Q; R', R'' en R.

Pag. 215. *lig. pénultiéme* $\delta ds = 0$, *lisez* $\delta ds'' = 0$.

Pag. 216. *lign. premiére* $(Mu\delta u + M'\delta u' + M''\delta u'' + \&c.)\,dt$ *lisez* $(Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.)\,dt$.

Pag. 217. *lig.* 18. $M'\int \delta ds'$, *lisez* $M'\int u'\delta ds'$.

Pag. 223. *lign. seconde*, *mettez le signe* — *avant le premier membre de l'équation* (*H*).

Pag. 225. *lign. derniére*, & $\delta\phi$ pour $\delta\phi$, *lisez* & $\delta\phi$ pour $\delta\phi'$.

Pag. 231. *lign.* 4. $\frac{d \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$, *lisez* $d \cdot \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$.

lign. 14., $P\,s\,dt$, étant la longueur &c., *lisez* $P\,s\,dt$, s étant la longueur &c.

Pag. 240. *lign.* 6. *au lieu de* $+ d \cdot \frac{dy}{dx} \times k\,dt$, *lisez* $+ d \cdot \frac{dy}{dx} \times k\,dt$.

Pag. 249. *lign.* 9. dans l'équation (*L*), *lisez pour plus de clarté* dans l'équation (*L*) ci-dessus.

Pag. 261. *lign. dernière, changez* [*X*] *en* [*Y*].

Pag. 263. *lign.* 15. Soient en général, *lisez pour plus de clarté* Soient en général pour chaque point du corps, c'est-à-dire, en regardant ξ, φ, ζ comme constantes.

lign. 22. $H\delta q$, *lisez* $H\delta Q$.

Pag. 266. *lign.* 9. Je mets de même le second nombre, *lisez* Je mets de même le second membre.

Pag. 267. *lign.* 11. devient en fatigant, *lisez* devient en faisant.

lign. 19. est précisément $= T$, *lisez* $= T dt$.

Pag. 270. *dans les trois formules des lignes* 10. 11. 12., *changez par-tout la lettre* d *en* d.

Pag. 272. *lign.* 11. pour que les équations puissent être identiques, *lisez* pour que les équations soient possibles.

Pag. 276. *lign.* 2. *au lieu de* $-pT - \theta A' dx - \theta B' dz$, *lisez* $-pT - \frac{\theta A' dx}{dt} - \frac{\theta B' dz}{dt}$.

lign. 7. *Dans le premier membre de l'équation de cette ligne, lisez* qT *au lieu de* qt.

lign. 12., en intégrant $\theta = ac$, *lisez* en intégrant $\theta = ac^t$.

Pag. 277. *lign.* 2. dans les équations (*h*), (*i*), *lisez* dans les équations (*g*), (*h*).

dans la ligne qui suit l'équation (*m*) α comme on fait, *effacez* α.

Pag. 285. *Dans les équations des lign.* 17., 18., 20. *au lieu de* $\Pi \frac{dZ}{dr}$, *lisez* $\alpha \Pi \frac{dZ}{dr}$.

Pag. 290. *lig.* 19. *ajoutez* dt *à la fin de la ligne*.

Pag. 291. *dans la ligne* (*q*) *changez les deux signes* $+$ *en* $-$.

SUR

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MECHANIQUE.

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

Un très-grand Géomètre qui s'est appliqué avec un égal succès à reculer les bornes de la Méchanique & à en éclaircir les principes, les a réduit à la Force d'inertie, la Composition des forces, & l'Equilibre: je vais tâcher dans cet Ecrit de démontrer ces Principes d'une maniére exacte & rigoureuse, & de satisfaire ainsi à la question si souvent agitée parmi les Géomètres & les Philosophes, *si les loix de la Méchanique sont de vérité nécessaire ou contingente.*

L'homme Célébre dont je viens de parler remarque à ce sujet, dans l'excellent discours préliminaire qu'il a mis à la tête de son Traité de Dynamique, que la question dont il s'agit se réduit à savoir si les loix de l'équilibre, & du mouvement qu'on observe dans la nature sont différentes de celles que la matiére abandonnée à elle même auroit suivie: qu'on me permette cependant ici quelques réflexions qui pourront peut-être servir à répandre un plus grand jour sur cette matiére. Il paroit d'abord que l'action du Créateur sur les corps ne rend en aucune façon hipotétique l'exécution des loix de la Méchanique dans l'univers, comme M. d'Alembert semble le supposer dans cet endroit; puisqu'il nous sera toujours permis de considérer cette action de Dieu comme une nouvelle force qui agit sur les corps: quels que soient alors les mouvemens qui en résultent, ils ne seront

jamais contraires aux principes de la Méchanique qui doivent être immuables par eux mêmes.

En effet les objets des différentes parties des Mathématiques pures, ſont également abſtraits, & par conſéquent ſuſceptibles d'un même dégré d'évidence: car pendant qu'on ne conſidére les corps dans l'algébre que comme capables de former des nombres, & que la Géométrie ne s'occupe que de leur étendue: on ne leur conſerve dans la méchanique que la ſeule impénétrabilité: & quoique cette ſcience emprunte de l'algébre la réplicabilité de ces points impénétrables, & qu'elle ait recours à la Géométrie pour en apprecier les mouvemens; il eſt toujours viſible que ces notions étant également ſimples & abſtraites, les concluſions qu'on peut en déduire devront toujours être marquées au ſceau de la certitude & de l'évidence.

Si nous parvenons donc à fonder les loix de la Méchanique ſur ces ſeules conſidérations purement abſtraites & intellectuelles, non ſeulement elles ſeront d'une vérité auſſi néceſſaire que les propoſitions de la Géométrie, mais il ſera encore certain que ces loix ſeront obſervées dans la nature: car, comme il eſt indubitable qu'un cercle aura toujours les propriétés que la Géométrie lui aſſigne, ſi réellement il eſt tel qu'on l'a ſuppoſé; de même quand deux ou pluſieurs corps agiront les uns ſur les autres d'une maniére quelconque, il en réſultera néceſſairement l'effet qui appartient à cette maniére d'agir, & que la méchanique nous enſeigne. Il eſt vrai qu'il eſt toujours aſsès difficile de s'aſſurer dans la pratique, de la maniére dont les corps agiſſent les uns ſur les autres; ou pour me ſervir du langage des Méchaniciens, il eſt moralement impoſſible de connoître exactement toutes les forces qui agiſſent ſur les corps qui nous environnent; mais la Méchanique, proprement dite, n'en eſt pas moins certaine, & même moins utile; & c'eſt encore ici comme dans la Géométrie,

ou

ou l'on transporte avec succès les théorêmes qu'on démontre sur les figures exactes, à celles qui ne sont qu'en approcher sensiblement. Enfin l'Etre Suprème peut sans doute alterer à son gré la configuration des corps, comme leur mouvement; mais les loix qu'ils suivront dans leurs nouveaux mouvemens, & les propriétés de leurs nouvelles figures, pourront toujours se déduire de la quantité de ces changemens, conformément aux principes immuables de la Méchanique & de la Géométrie.

En voilà asès pour faire connoître à mes Lecteurs le point de vue, sous lequel j'ai cru devoir considérer cette Science, & la route que j'ai tâché de suivre pour en établir les principes d'une maniére qui ne souffrit aucune difficulté. Les trois principes que j'ai indiqué plus haut m'ont fournit la division naturelle de ces Recherches: j'y ai joint une démonstration du principe de l'équilibre du lévier absolument indépendante des précédens; ce que j'ai fait d'autant plus volontiers, qu'il paroit assés difficile de décider, si l'on doit plus tôt faire dépendre l'équilibre du lévier de la composition des forces, que déduire au contraire ce dernier principe de celui de l'équilibre du lévier. La démonstration toute analytique que j'en ai trouvé m'a d'ailleurs paru par sa singularité digne de trouver place ici.

I.

De la Force ou Loi d'inertie.

SI l'on réfléchit sur la maniére dont les hommes se forment les idées de l'extension & du mouvement, & sur la méthode qu'ils suivent pour leur donner plus de précision: on verra bien-tot que comme nous sommes obligés de rapeller toutes les espéces d'extension à la seule ex-

extenſion linéaire & rectiligne, ſi nous voulons en évaluer les raports; de même quand il s'agit de fixer les rélations, qui ſe trouvent entre les différents mouvements, que nous obſervons dans la nature, il eſt d'abord néceſſaire de les raporter à une unité commune & déterminée. Déja accoutumés en Géométrie à conſidérer la ligne droite comme la plus ſimple des extenſions linéaires, nous nous ſommes déterminés pour le mouvent rectiligne & nous avons préféré le mouvement uniforme à cauſe de l'égalité des eſpaces décrits en tems égaux, qui nous l'a fait regarder comme toujours ſemblable à lui même.

Après avoir choiſi le mouvement uniforme pour la meſure commune de tous les autres, il a fallu pour en faciliter la comparaiſon raporter a des cauſes vraies, ou imaginaires, les changemens continuels qui arrivent dans l'uniformité du mouvement des corps: ſi à préſent on fait abſtraction de ces cauſes quelles quelles ſoient, le mouvement ſera uniforme, & rectiligne par la definition même, & c'eſt ſi je ne me trompe dans cette ſeule abſtraction purement mathématique que conſiſte la loi d'inertie, dont l'énoncé ſe reduira à dire, que tous les corps, ſoit qu'ils ſoient en repos, ou en mouvement, doivent être conſidérés comme perſévérant dans l'état où ils ſont, ſi l'on fait abſtraction de tous les changemens qui pourroient arriver dans leurs viteſſes & dans leurs directions.

Il eſt viſible qu'un pareil principe n'a pas beſoin de démonſtration, puiſque ce n'eſt qu'une propoſition identique; & pour peu qu'on y réfléchiſſe, on s'appercevra aiſément qu'il eſt ſuffiſant pour la méchanique, & que cette ſcience n'exige pas qu'on lui donne plus d'extenſion, & de réalité. En effet quand même les corps ſeroient capables d'accélérer, ou de retarder d'eux mêmes leurs mouvemens, il eſt évident que cela ne pourroit ſe faire que ſelon quelque loi déterminée, à laquelle il ſeroit toujours facile d'avoir

égard

égard, dès que l'experience nous l'auroit apprise, de la même façon qu'on calcule les effets de l'attraction, & de la résistance des fluides. En un mot c'est une chose fort indifférente pour la Méchanique, que le mouvement des corps soit altéré par la nature même de ces corps, ou par quelques causes étrangères; sur tout si ces causes nous sont inconnues, comme on sait qu'il en est plusieurs, qui le sont encore pour nous, & le seront peut-être toujours.

Il est donc inutile de donner plus d'étendue à la loi d'inertie, & il paroit même qu'elle n'en est pas susceptible. Plusieurs Philosophes ont prétendu à la vérité que c'est une propriété essentielle à la matiere de conserver son état, c'est à dire de continuer à se mouvoir avec la même vitesse, & dans la même direction; mais sans examiner ici si c'est mieux conserver son état de se mouvoir uniformément & en ligne droite, que suivant une autre loi & dans une courbe: il me suffira de remarquer que, dans l'entiére ignorance où nous sommes sur la nature des corps, le seul moïen qui nous reste pour établir une pareille assertion, seroit de faire voir que cette propriété est une conséquence de l'étendue & de l'impénétrabilité; or je ne pense pas que cela nous soit jamais possible.

En vain dira-t-on qu'on n'aperçoit rien dans l'idée que nous avons de la matiére qui puisse lui donner du mouvement, ou le ralentir si elle en a déja: il suffit que cette propriété n'ait rien de contradictoire pour nous autoriser à penser qu'elle peut en être doüée; or je ne vois pas en quoi il seroit plus absurde d'assurer qu'un corps a, ou peut avoir en lui même de quoi retarder son mouvement, que de dire que cet effet est produit par la seule présence d'un autre corps, quoique fort éloigné, comme le pense une secte de Philosophes fort acréditée aujourd'hui.

Je suis au reste très persuadé que la force d'inertie telle qu'on la conçoit communement, a réellement lieu dans la

nature

nature; la régularité du mouvement des Planettes, & une infinité d'autres faits ſemblent ne pas permettre d'en douter; mais c'eſt là une vérité d'experience, une des premiéres ſans doute de celles qui doivent ſervir de fondement aux ſciences phyſico-mathématiques, mais inutile à la Mèchanique, & d'un genre différent de celles qu'il eſt permis d'admettre dans cette ſcience, à moins qu'on ne veuille, avec quelques Philoſophes, la ranger dans la claſſe des ſciences expérimentales.

M. d'Alembert ſemble ſe rapprocher de ce ſentiment au mot *Force* dans l'Encyclopédie. *La force d'inertie* (dit cet illuſtre Ecrivain) *n'a lieu, comme l'experience le prouve, que dans la matiére brute, c'eſt-a-dire dans la matiére qui n'eſt pas unie à une principe intelligent*: or après un pareil aveu, nôtre Auteur n'a ſans doute pas prétendu que cette loi fût démontrée même pour le corps abſtraits qui ſont l'objet de la Méchanique; puiſqu'alors la matiére y ſeroit aſtreinte ſans réſtriction. La démonſtration qu'il donne au commencement du Traité de Dynamique tend donc uniquement à établir qu'on ne trouve dans l'idée du mouvement d'un corps aucune raiſon de variabilité, ce que j'accorderai ſans peine, quoique pluſieurs Philoſophes croient avoir de bonnes raiſons pour être d'un ſentiment contraire; mais il me ſemble que l'idée d'une viteſſe conſtante n'y eſt pas plus compriſe que celle d'une viteſſe retardée. Je le répete encore: la ligne droite, & le mouvement uniforme ne ſont pas plus ſimples en eux mêmes, que toute autre ligne, & toute autre loi de mouvement: ainſi quand même il ſeroit certain que les corps ne ſont pas capables de ſe donner le mouvement à eux mêmes, il ne s'en ſuivroit pas encore qu'ils fuſſent incapables de retarder celui, qu'ils auroient déja, comme un grand Géomètre l'a crû; puiſque cette concluſion ſuppoſe que le mouvement uniforme eſt celui que les corps ſuivent d'eux mêmes, & que, s'il eſt variable, il en faut chercher la cauſe dans une force active.

II.

I I.

De la compoſition des forces.

DE quelle nature que ſoient les cauſes du mouvement des corps, qu'on comprend ſous le nom général de *forces*: il eſt au moins certain qu'elles n'ont par rapport à nous aucune réalité, que par leurs effèts, & que les mouvemens qu'elles produiſent, étant les ſeuls moyens que nous aions pour nous aſſurer de leur exiſtence, c'eſt dans ces mouvemens ſeuls que nous devons chercher la meſure de leurs rapports. Les forces ſont donc à nôtre égard toujours proportionelles à leurs effets, puiſque nous entendons par cette expreſſion bien moins la cauſe du mouvement que le mouvement même. Mais comment doit-on eſtimer le rapport des mouvemens de pluſieurs corps différens? On voit d'abord qu'on ne peut conſidérer dans un mouvement quelconque, que le corps en mouvement, & la viteſſe, avec laquelle il ſe meut: tout ſe réduit donc à ſavoir ſi l'on doit dire qu'une force eſt double d'une autre, quand agiſſant toutes les deux ſur une même maſſe, celle-ci lui donne une viteſſe double; ou bien ſi pour cela elle doit imprimer une viteſſe égale à une maſſe double. Il eſt évident qu'on peut indifféremment choiſir celle qu'on voudra de ces deux definitions, & j'eſpére de faire voir dans l'article ſuivant qu'elles ont lieu toutes les deux en même tems; je me contenterai, en attendant, d'obſerver ici que ce que j'ai à dire dans cet article ſur la compoſition de forces, ſera également vrai dans l'un & dans l'autre cas.

LEMME. Si deux forces égales dont la quantité, & les directions ſont exprimées par les lignes CA, CB agiſſent (*fig.* 1. *plan.* 4.) ſur un corps quelconque C, il eſt évident

que le corps ne pourra pas obeir à ces deux forces en même tems: car il ne peut pas se mouvoir en même tems selon CA, & selon CB; il prendra donc une direction CM différente de CA & de CB, & la ligne CM doit nécessairement diviser l'angle ABC en deux également, puisque les forces CA, CB étant égales par la supposition, tout ce qui tend à raprocher CM de CA tend également à la raprocher de CB. Cela posé, il est encore évident qu'on peut imaginer une troisiéme force CM, qui fasse seule sur le corps C le même effet, que CA, CB conjointément. D'autre part la quantité de la force CM ne peut dépendre que de la quantité de CA ou CB, & de la valeur de l'angle ACB; & par conséquent si l'on fait $CA = CB = a$, $CM = z$, $ACB = \varphi$, on aura $z = fonct. (a, \varphi)$.

Or la force CM étant de même nature, que la CA, il faut qu'elles contienent un même nombre de dimensions; ce qui donne $z = CM = fonct. (a, \varphi) = a\, fonct.\, \varphi$, parceque la dimension de φ est nulle. *

Au reste si quelqu'un n'étoit pas content de ces sortes de raisonnemens, on pourroit d'abord poser comme un principe incontestable & évident par lui même, que pour le même angle φ, la force z est toujours proportionelle à a, ensuite faisant $\frac{dz}{da} = y$, on trouveroit y constant, & par consequent $z = ay$ ou bien $z = a\, fonct.\, \varphi$.

PROBLÉME *Trouver la valeur de y ou de* fonct. φ.

Soient menées les lignes (*fig. 2. plan. 4.*) Cm, Cm, Ca, Ca', Cb', Cb, telles que $ACB = \varphi$, $mCM = ACa = aCa' = BCb = bCb' = \frac{d\varphi}{2}$ on aura $mCm = ACa' = BCb' = d\varphi$, $aCb = \varphi + d\varphi$, $a'Cb' = \varphi + 2d\varphi$, & la

* Il suit de là que, l'angle φ demeurant constant, z est toujours proportionel à a; on pourroit de même démontrer par cette méthode d'une maniére directe & fort naturelle plusieurs théorêmes sur la proportionalité des côtés des figures, & un grand nombre d'autres propositions de Géomètrie, & de Méchanique.

valeur de y qui appartient à l'angle ACB, deviendra $y + dy = y'$ pour l'angle aCb, & $y + 2dy + d^2y = y''$ pour l'angle $a'Cb'$. Soit $dy = ud\varphi$, & $u = V$ lorsque $\varphi = 0$, on aura pour l'angle mCm, $y = 2 + Vd\varphi$; car l'on sait que quand l'angle mCm s'évanoüit tout à fait, z devient $= 2a$, ce qui donne $y = 2$.

Tout ceci posé, & bien entendu, imaginons que les quatre forces Ca', CA, Cb', CB, dont chacune est $= a$, agissent en même tems sur le point C: il est clair (*lemme*) que la force composée de ces quatre forces sera suivant CM, & $= a(y + y'')$. Or les deux forces CA, Ca' sont équivalentes à une troisiéme Ca, qui doit être égale à celle qui résulte suivant CM de l'action simultanée des Cm, Cm, cette force sera donc $= a(2 + Vd\varphi)$: on reduira de même les forces CB, Cb' à un troisiéme selon Cb, & $= a(2 + Vd\varphi)$. On pourra donc substituer aux quatre forces Ca', CA, Cb', CB deux autres forces chacune $= a(2 + Vd\varphi)$, & agissant dans les directions Ca, Cb; or si ces forces étoient $= a$ elles auroient pour force composée une troisiéme force dans la direction CM & $= ay'$, donc (*lemme*) cette force composée sera $= ay'(2 + Vd\varphi)$: d'autre part cette force devra, comme nous l'avons vû plus haut, être $= a(y + y'')$. De là résulte l'équation $y'(2 + Vd\varphi) = y + y''$, & substituant les valeurs de y' & de y'', $(y + dy) \times (2 + Vd\varphi) = 2y + 2dy + d^2y$, & ôtant ce qui se détruit $yVd\varphi + Vdyd\varphi = d^2y$, ou bien $yVd\varphi = d^2y$. On voit de là que puisque y doit être une quantité finie, il faut que V soit infiniment petite & du même ordre que $d\varphi$.

Supposons donc $V = Hd\varphi$, on aura $d^2y = yHd\varphi^2$, dont l'intégrale est généralement $y = Ae^{\varphi\sqrt{H}} + Be^{-\varphi\sqrt{H}}$: si dans cette équation, & dans sa différentielle, qui est $dy = \sqrt{H} \cdot d\varphi\,(Ae^{\varphi\sqrt{H}} - Be^{-\varphi\sqrt{H}})$, on fait $\varphi = 0$, cette supposition, qui rend $y = 2$, nous donnera premiérement

$A + B = 2$ ensuite $dy = \sqrt{H}\, d\varphi\, (A - B)$: Or quand $\varphi = 0$ on a $dy = V d\varphi = H d\varphi^2$, donc $H d\varphi = A - B$, ou $A - B = 0$, & par conséquent $A = B = 1$; donc $y = e^{\varphi\sqrt{H}} + e^{-\varphi\sqrt{H}} = 2\, cos.\, \varphi\sqrt{-H}$. Maintenant lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire quand l'angle φ est égal à la demi-circonférence, on a $y = 0$ donc $cos.\, \frac{\pi}{2}\sqrt{-H} = 0$ & par conséquent $\frac{\pi}{2}\sqrt{-H} = \frac{\pi}{4}(2\mu + 1)$; ($\mu$ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif). On tire de cette équation $\sqrt{-H} = \frac{2\mu + 1}{2}$ & enfin $y = 2\, cos.\, \frac{(2\mu + 1)}{2}\varphi$.

Or il est visible que tant que l'angle φ est moindre que deux droits, la force z, & par conséquent la valeur de y doit toujours être positive: condition qui ne sauroit avoir lieu à moins que μ ne soit $= 0$, on aura donc enfin y ou *fonct.* $\varphi = 2\, cos.\, \frac{\varphi}{2}$. C. Q. F. T.

Corollaire. De là il est aisé de déduire cette conclusion générale, sçavoir que la force composée de deux forces quelconques égales entre elles & inclinées comme que ce soit, est toujours déterminée quant à sa quantité, & à sa direction par la diagonale du rhombe qu'on peut faire sur les lignes qui exprimeroient la quantité & les directions de ces forces.

Probléme 2. *Trouver la quantité, & la direction de la force CG qu'on suppose équivalente à deux autres forces CD, CB qui forment entre elles un angle droit.*

Soit tirée par le point C la ligne droite (*fig.* 3. *plan.* 4.) EFC, en sorte que $GCB = BCE$, on aura encore $DCG = DCF$: qu'on imagine à présent la force CB divisée

vifée en deux forces égales felon CG & felon CE, & la force CD en deux autres dans les directions CF, CG: les deux premiéres feront (*prop. précéd.*) $= \frac{CB}{2\,cof.BCG}$, & les deux fecondes $= \frac{CD}{2\,cof.DCG}$; nous aurons donc, au lieu de CD, & CB, quatre autres forces: fçavoir deux dans les directions CE, CF, & deux confpirantes dans la direction CG; or par la fuppofition toute l'action doit fe faire dans la ligne CG, donc les deux forces felon CE, & CF, qui font directement oppofées doivent être égales, ce qui donne $\frac{CB}{2\,cof.BCG} = \frac{CD}{2\,cof.DCG}$: & celles qui font felon CG devant être égales à CG, on a, $CG = \frac{CB}{2\,cof.BCG} + \frac{CD}{2\,cof.DCG}$. Si à préfent on fubftitue dans la feconde équation la valeur de $CB = \frac{CD \times cof.BCG}{cof.DCG}$ prife dans la primiére. elle deviendra $CG = \frac{CD}{cof.DCG}$: on aura donc les analogies fuivantes $cof.\ BCG : cof.DCG = CB : CD$, $CG\ CD : = 1 : cof.DCG$; & à caufe de l'angle DCB qui eft droit, $cof.DCG : fin.\ DCG = CD : CB$, $CD : CG = fin.\ BCG : 1$. La premiére de ces analogies détermine la direction de la force CG & la feconde la quantité. C. Q. F. T.

PROBLÉME 3. *Trouver la quantité & la direction de la force* CM *compofée de deux autres forces* CE, CD, *qui forment entre elles un angle quelconque.*

Après avoir tirée la ligne FCG perpendiculaire à CM, qu'on divife CD en deux autres CG, CB, on aura (*prop. prec.*) $CB = CD \times cof.DCB$, $CG = CD \times fin.DCB$ (*fig. 4. plan.* IV.) & en divifant de même CE on trouvera $CQ = CF \times cof.\ ECB$; $CF = CE \times fin.\ ECB$; l'oppofition des forces CF, CG, nous donnera l'équation

C

$CD \times \mathit{sin}.\, BCD = EC \times \mathit{sin}.\, ECB$, qui détermine la direction : les deux autres forces CQ, CB, qui agissent dans la direction CM donneront $CM = CD \times \mathit{cos}.\, DCB + CE \times \mathit{cos}.\, ECB$, valeur de la force composée.

Si dans cette équation on substitue au lieu de CD sa valeur $\frac{CE \times \mathit{sin}.\, ECB}{\mathit{sin}\, DCB}$, tirée de la premiére, on a

$$CM = CE \frac{(\mathit{cos}.\, BCD \times \mathit{sin}.\, ECB + \mathit{cos}.\, ECB \times \mathit{sin}\, BCD)}{\mathit{sin}.\; BCD}$$

$$= \frac{CE \times \mathit{sin}.\, ECD}{\mathit{sin}.\, DCB}, \text{ à cause de } ECB + BCD = ECD,$$

Donc $CE : CD : CM$ sont entre elles comme $\mathit{sin}.\, BCD : \mathit{sin}.\, ECB : \mathit{sin}.\, ECD$, ou comme le sinus des angles opposées. C. Q. F. T.

Corollaire. Les équations qui determinent CM, sont comme on voit les mêmes que celles, qui expriment le rapport de la Diagonale d'un paralellogramme quelconque à ses côtés ; nous avons donc démontré généralement que la force composée de deux forces quelconques, est toujours exprimée quant à sa quantité ; & à sa direction par la diagonale du paralellogramme qu'on peut faire sur les lignes qui représentent la direction, & la quantité des forces composantes.

Scholie i. La démonstration du Prob. 1., dont les deux autres ne sont que des Corollaires assez simples, est comme on voit directe, & fort courte : je n'ai pas fait difficulté d'y faire usage dès le commencement, des calculs differentiel, & intégral ; parceque l'expression de la force composée de deux forces données, & qui forment entre elles un angle quelconque, contient toujours implicitement ces principes, puisque le rapport de cette force aux composantes peut-être incommensurable. Il est vrai que l'application de

de ces calculs à la fonction indéterminée qui exprime ce raport, ſuppoſe qu'elle eſt aſſujettie à la loi de continuité; mais il eſt viſible qu'on ne ſauroit raiſonablement en douter, & que puiſque les accroiſſemens de cette force dépendent de celle de l'angle, ces accroiſſemens ne ſe font pas par ſauts. Cependant, comme je veux prévenir jusqu'aux difficultés les moins fondées, voici un autre démonſtration de la même propoſition, entiérement délivrée de ces calculs, & qui ne dépend en aucune façon de cette ſuppoſition d'ailleurs ſi légitime.

Soit (*fig.* 2. *plan. IV*) $m\,C\,M$ un angle, qui ſoit à l'angle droit comme $1 \; \nu$, ν étant un nombre entier quelconque, & ſoit $A\,C\,M = B\,C\,M$ un angle multiple de $m\,C\,M$, & $= n \times m\,C\,M$; & après avoir tiré les lignes $C\,a$, $C\,a'$, $C\,b$, $C\,b'$, telles que $A\,C\,a = a\,C\,a' = B\,C\,b = b'C\,b' = m\,C\,M$, qu'on ſuppoſe que la force compoſée de deux forces $= a$, ſoit $= k\,a$ pour l'angle $m\,C\,m$; $= p\,a$ ou $p^n\,a$ pour l'angle $A\,C\,B$; $= p^{n+1} a$ pour l'angle $a\,C\,b$, & enfin que la force compoſée pour l'angle $a'\,Cb'$ ſoit $= p^{2+2}\,a$. (on voit que dans ces expreſſions les nombres n, $n + 1$, $2 + 2$, n'expriment pas des puiſſances de p, mais ſervent ſeulement à dénoter que les forces $q^n\,a$, p^{n+1} &c. répondent aux angles $2\,n \times m\,C\,M, = A\,C\,B$, $2\,(n + 1) \times m\,C\,M = a\,C\,b$, $2\;(n + 2) \times m\,C\,M = a'\,C\,b'$.

Puiſque $a'\,C\,A = b'\,C\,B = m\,C\,m$, les deux forces $a'C$, AC ſeront équivalentes (*hyp.*) à une ſeule $= k\,a$ ſelon $a\,C$ & par la même raiſon deux autres forces égales $B\,c$, $b'\,c$ équivaudront à une troiſiéme ſuivant $b\,C$ & $= k\,a$: or deux forces $= a$ ſuivant $a\,C$, $b\,C$ donnent pour force compoſée $p^{n+1}\,a$, donc les deux $= k\,a$ donneront $k\,p^{n+1}\,a$ dans la direction MC. D'un autre côté (*hip.*) les deux forces $A\,C$, $B\,C$ donnent $p^n\,a$ ſelon $B\,C$, & les deux autres $a'\,C$, $b'\,C$ agiſſent comme $p^{n+2}\,a$ dans la même direction: on aura donc $(p^n + p^{n+2})\,a, = k\;p^{n+1} a$, ſçavoir, $p^{n+2} - k\,p^{n+1}$

+

$+ p^n = 0$; d'où l'on voit que les quantités p forment une suite recurrente, dont l'echelle de relation est $k - 1$; donc on aura généralement $p^n = D x^n + E y^n$, D & E étant des constantes, n étant ici exposant de x & y à la maniére ordinaire, & x & y étant les racines de l'équation $u^2 - k u + 1 = 0$, ce qui donne $u = \frac{k}{2} \pm \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, & par conséquent $x = \frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{2} - 1)}$, $y = \frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$ on aura donc en substituant ces valeurs ,

$p^n = D[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^n + E[\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^n$.

Or soit $k = 2 \cos. \alpha$, on sait que $[\cos. \alpha + \sqrt{(\cos. \alpha^2 - 1)}]^n = \cos. n\alpha + \sqrt{-1} \times \sin. n\alpha$ & $[\cos. \alpha - \sqrt{(\cos. \alpha^2 - 1)}]^n = \cos. n\alpha - \sqrt{-1} \sin. n\alpha$; donc $p^n = (E + E) \cos. n\alpha + \sqrt{-1} \times (D - E) \times \sin. n\alpha$ &, changeant les constantes, $p^n = F \cos. n\alpha + G \sin. n\alpha$.

Or si $n = 0$, on a $p^n = 2$, puisqu'alors l'angle $n \times mCM$ devient $= 0$; donc on a $2 = F$; si $n = 1$, p^n devient par l'hipotése $= k = 2 \cos. \alpha$, donc $2 \cos. \alpha = 2 \cos. \alpha + D \sin. \alpha$, & $D = 0$; donc nôtre formule devient généralement $p^n = 2 \cos. n\alpha$; de plus si $n = \nu$ c'est-à-dire si l'angle $n \times mCM$, auquel répond la force composée p^n est égal à deux droits, on doit avoir $p^\nu = 0$, & par consequent $2 \cos. \nu\alpha = 0$, ce qui fait voir que $\nu\alpha = \frac{\pi}{4}$, & donne finalement $\alpha = \frac{\pi}{4\nu}$ donc $p^n = \cos. \frac{n\pi}{4\nu} = 2 \cos. \frac{ACB}{2}$ Voila donc nôtre proposition démontrée à la rigueur pour tous les angles commensurables avec la demicirconférence, & en faisant voir, ce qui est très-facile qu'on peut toujours prendre l'angle mCm tel que, n & ν restant des nombres entiers, l'angle $\frac{n\pi}{4\nu}$ ne differe que d'une quantité aussi peti-

te

te qu'on voudra d'un angle donné, on pourra prouver sans restriction & avec la derniere exactitude la vérité de cette proposition, par une méthode trop familiére aux Géomêtres & surtout dans les Ecrits des Anciens, pour que je m'arrête à la déveloper ici.

Remarque. Le Savant M. Daniel Bernoulli à le premier démontré ce principe en 1726. dans les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, d'une maniére exacte, & fort ingénieuse: mais la longue suite de raisonnemens, & de théorêmes géométriques, & algébriques, par lesquels il est obligé de passer semble ne pas assès répondre à la simplicité si désirable dans la démonstration d'un principe aussi important. C'est sans doute ce qui a engagé M. d'Alembert à traiter de nouveau cette matiére dans une dissertation particuliére qu'on trouve parmi ses Opuscules imprimés derniérement. Sa démonstration déja un peu plus courte & plus simple que celle de M. Bernoulli, exige cependant encore sept, ou huit théorêmes assès compliqués: & si, comme je n'en doute pas, la méthode syntetique que ces habiles Géomêtres y ont emploié, n'est pas susceptible d'une plus grande simplification; il faudra convenir que l'analyse dont je me suis servi contient seule le double avantage d'abréger & de faciliter la solution de ce Problême, & de nous y conduire en même tems d'une maniére toujours directe, & lumineuse.

Scholie 2. J'ai averti au commencement de cet Article que la démonstration que j'allois donner de la composition des forces étoit également concluante, & rigoureuse, soit qu'on estimât les forces proportionelles aux masses aux quelles elles impriment des vitesses égales, ou qu'on voulût les estimer par les vitesses qu'elles feroient capables d'imprimer à une même masse: il suffira pour s'en convaincre de re-

lire cette démonstration, en substituant au mot *Force* ceux de *Masse*, ou de *Vitesse*.

En effet si on a deux masses $= a$, animées de vitesses égales (*fig.* 1. *plan.* IV.) dans les directions CA, CB, & qu'on cherche la quantité & la direction de la masse qui animée de la même vitesse leur feroit équilibre, on trouvera (comme dans le *lemme*) que cette direction sera MC, & que la quantité de la masse sera exprimée par a *fonct.* φ. On verra ensuite que le raisonnement du Prob. 1. n'est apuié, que sur ces deux principes, savoir que $y = 2$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$: or ces deux propositions sont évidentes pour le cas dont il s'agit, puisque la premiére ne signifie autre chose, sinon que deux masses $= a$ animées d'une vitesse quelconque font équilibre à deux autres masses aussi $= a$, & animées de la même vitesse dans une direction opposée: & la seconde que deux corps égaux animés de vitesses égales en sens contraire n'ont besoin de l'action d'aucun autre corps pour se faire équilibre.

On verra de même (*lemme*) que si un corps quelconque C est sollicité en même tems par deux vitesses $= a$, dans les directions CA, CB, il restera en repos si on lui suppose en même tems une autre vitesse $= a$ *fonct.* φ dans la direction MC, & qu'enfin on a posé avec raison dans le prob. 1, $y = 2$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$; puisqu'il est évident que le corps restera en repos, s'il est animé de vitesses égales en sens contraire, savoir des vitesses $2a$ dans le premier cas, & des vitesses a dans le second.

Si l'on fait les mêmes réflexions sur le raisonnement géométrique du prob. 2., on verra qu'il prouve aussi en toute rigueur, (*fig.* 3. *planche* IV.);

Que si, l'angle DCB étant droit, on fait $DCG = \theta$, &

qu'on

qu'on imagine une masse $= m \times cos. \theta$ animée d'une vitesse quelconque dans la direction DC, & une autre masse $= m\, sin. \theta$ animée de la même vitesse selon BC, & finalement une masse $= m$, qui ait encor cette même vitesse dans la direction CG, ces trois masses se feront équilibre.

2° Qu' un corps quelconque C restera en repos, s'il est en même tems sollicité par trois vitesses différentes u, $u \times cos. \theta$, $u \times sin. \theta$ dans les directions CG, DC, BC.

III.

Du principe de l'équilibre.

Soit qu' on considére les forces comme les causes du mouvement des corps, ou simplement comme l' expression abrégée de ces mouvemens mêmes: il est toujours visible que nous ne saurions les exprimer que par une fonction du corps mû, & de la vitesse avec laquelle il se meut; la force, ou le mouvement d' une masse m animée d' une vitesse u sera donc *fonct.* (m, u); il s' agit dans cet article de trouver la valeur de cette fonction, ou ce qui revient au même, étant donnée une masse m animée de la vitesse u, il faut trouver la vitesse dont une autre masse M devroit être animée en sens contraire pour qu'il y eut équilibre.

LEMME. Si un corps C (*fig.* 5.) est animé en même tems de la vitesse V dans la direction AC, & d'une autre vitesse $= u$ selon BC perpendiculaire à AC, & que deux autres corps D & E lui résistent en même tems, savoir D selon DC avec la vitesse $= d$, & E dans la direction EC avec une vitesse $= e$, je dis que le corps C agit sur D avec toute sa vitesse u, & fait sur lui le même effet que s'il étoit animé de la seule vitesse u, & que E n'existât pas; c'est à

à dire que si ces trois corps étoient en équilibre, cet équilibre subsistoit encor entre D & C, si on anéantisoit le corps E, & la vitesse V de C. En effet la vitesse V du corps C étant dans la direction $A\ C$ perpendiculaire à $D\ B$, elle ne sollicite pas plus le corps C dans la direction $C\ B$ que selon $C\,D$, & est par conséquent incapable d' augmenter ni d'altérer son action sur D: On en dira de même du corps E qui tend aussi à donner à C une vitesse perpendiculairement à $D\,Q$

Probléme. *Trouver le rapport des vitesses de deux masses qui se sont équilibre.*

Soient deux corps P, Q (*fig.6.*) chacun de masse $= m$, & animés de la vitesse $= u$ dans les directions contraire $P\,C$, $Q\,C$. il est évident que ces corps se feront équilibre en C. Qu'on fasse à présent l' angle $A\,C\,P = \theta$, & $A\,C\,B$ droit: on pourra substituer (*Art. II. Sch. 2. n. 1*) au lieu du corps P deux autres corps, savoir A de masse $= m \times cos.\ \theta$, agissant avec la vitesse u dans la direction $A\,C$, & B dont la masse $= m \times sin.\ \theta$ soit animée selon $B\ C$ d'une vitesse $= u$. On pourra de même imaginer (*Art. II. schol. 2. n. 2.*) que le corps Q au lieu de la vitesse u selon $C\,Q$ soit sollicité par une vitesse $= u \times cos.\ \theta$ selon $E\,C$, & par une autre vitesse $= u \times sin\ \theta$ dans la direction $D\,C$, sans que l'équilibre soit dérangé par l'une, ni par l' autre de ces suppositions; or (*lemme précédent.*) le corps C agit sur le corps A avec sa seule vitesse $u \times cos.\ \theta$, & l' équilibre subsistera entre m & $m \times cos.\ \theta$, si on suppose $m \times sin.\ \theta$ & $u \times sin.\ \theta$ annéantis; donc une masse $= m$ animée de la vitesse $u \times cos.\ \theta$ fait équilibre à une masse $m \times cos.\ \theta$ animée d'une vitesse $= u$ dans une direction contraire, & par conséquent, puisque $cos.\ \theta$ peut représenter une fraction quelconque, il il y aura toujours équilibre entre deux corps s'ils sont animés de vitesses réciproques à leurs masses. C. Q. F. T.

Co-

Corollaire. Il ſuit de là qu'une maſſe A animée de la viteſſe a fait équilibre aux maſſes B, C, D, &c. animées en ſens contraire des viteſſes b, c, d, &c., ſi $Aa = Bb + Cc. + Dd +$ &c. Car ſi on diviſe A dans les parties x, y, z, &c. proportionelles à Bb, Cc, Dd, &c. on trouvera $ax = Bb$, &c. On voit encore que pourvû que le produit MV de la maſſe d' un corps quelconque par ſa viteſſe demeure conſtant, ſon action, ou ſa force reſtera la même quelles que ſoient M & V, & que par conſéquent cette force que nous avons dit être une fonction de M & V ſera néceſſairement une fonction de MV. Donc pour le cas préſent la force de A ſera $\Psi\, Aa = \Psi(Bb + Cc + Dd +$ &c.) comme nous l'avons fait voir: or l' action des corps B, C, D, &c. doit encore s' exprimer par $\Psi\, Bb + \Psi\, Cc + \Psi\, Dd +$ &c. on aura donc l'équation $\Psi\,(Bb + Cc + Dd) = \Psi\, Bb + \Psi\, Cc + \Psi\, Dd +$ &c. qui ne ſauroit ſe vérifier en général à moins que la fonction Ψ ne ſoit telle que $\Psi\, MV = MV$. D' où l' on tire que la force d' un corps en mouvement eſt toujours comme le produit de ſa maſſe par la viteſſe: conclusion que le dévélopement de la formule générale $\Psi\,(m, u\, cof.\, \theta) = \Psi\,(u, m\, cof.\, \theta)$ tirée du Problême précédent nous auroit également fourni.

Scholie I. La démonſtration que je viens de donner du principe de l' équilibre, pourroit paroître indirecte, & défecteuſe, parceque je la déduis d' une propoſition en apparence plus compoſée; mais peut-être en jugera-t-on autrement; ſi l' on réfléchit qu'une vérité ne ſauroit être ſimple à nôtre égard, qu' autant que nous la concevons moins confuſement, & avec plus de facilité, & que ce n'eſt que dans le cas ſeul, où un corps eſt animé de deux viteſſes dans des directions perpendiculaires entr' elles, qu' on voit clairement (*lemme*) qu'elles ne ſont pas modifiées l' une par l' autre. On rencontre d' ailleurs trés-fréquemment en géométrie

métrie des exemples de paſſages ſemblables, & (pour citer ici quelque choſe d'analogue à mon ſujet) de très-grands hommes n'ont pas fait difficulté de tirer l'équilibre du levier droit de celui du levier courbe. Quoiqu'il en ſoit au reſte de la méthode que j'ai ſuivie, il eſt au moins certain qu'elle eſt à l'abri de toutes les difficultés qu'on pouvoit former contre les preuves, ſur les quelles cette propoſition étoit apuïée juſqu'à préſent; preuves qui ont paru ſi peu convaincantes, que pluſieurs habiles Géomêtres leur on préféré celles qu'on tire de l'expérience; & que quelques Philoſophes ont oſé avancer avec confiance que la méthode des Géomêtres étoit abſolument inſuffiſante pour fournir une démonſtration de ce principe. *

SCHOLIE 2. Il eſt viſible que, puiſque deux maſſes animées de viteſſes en raiſon réciproque ſe font équilibre, ſi une maſſe A animée de la viteſſe a ſoutient un effort quelconque, comme par exemple celui d'un reſſort, la maſſe B avec la viteſſe $\frac{Aa}{B}$ fera équilibre à la même force: & que par conſéquent l'effet d'une force p ſur deux corp A & B ſera de leur donner des viteſſes réciproques à leurs maſſes. C'eſt ſur cette propoſition qu'eſt fondée la formule générale $p\,d\,t = m\,d\,u$; car quoiqu'il ſoit très permis de ne conſidérer, avec M. d'Alembert, la quantité p que comme un ſimple coéficient de dt, ce n'eſt cependant que d'après le principe que nous venons d'établir qu'on peut s'aſſûrer que ce coéficient doit être le même à chaque inſtant, quand une même force agit ſur deux maſſes différentes.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. On peut conclure de tout ce que nous venons de démontrer, que les propoſitions qui font l'objet de la Méchanique ne ſont pas moins certaines, &
moins

* *Recherches ſur les élémens de la matière par M. Formey, &c.*

moins évidentes que celles que la Géométrie, où l'Algébre nous enseignent: Car cette science n'a aucun Probléme, auquel on ne puisse appliquer avec succès le principe général qu'on trouve à la tête de la seconde partie du Traité de Dynamique de M. d'Alembert; or il est visible que ce théoréme ne suppose absolument que les principes que nous avons établi ci-dessus d'une maniére exacte, & entiérement rigoureuse.

IV.

Du Levier.

LA composition des forces suffit comme l'on sait pour démontrer l'équilibre du levier, & réciproquement cette derniére proposition une fois prouvée, on peut facilement en déduire la composition des forces. Elle nous fournit d'ailleurs une démonstration fort-simple du principe des vitesses virtuelles, qu'on peut avec raison considérer comme le plus fécond & le plus universel de la Méchanique: tous les autres en effet s'y reduisent sans peine, le principe de la conservation des forces vives, & généralement, tous ceux que quelques Géomètres ont imaginés pour faciliter la solution de plusieurs Problêmes, n'en sont qu'une conséquence purement géométrique, ou plus tost ne sont que ce même principe réduit en formule. La démonstration de l'équilibre du levier que je vais donner ici, sera donc une nouvelle preuve des principes que j'ai démontré directement dans les Articles précédens.

Lemme. Si (*fig.* 7.) deux forces égales $= p$, (comme par exemple deux poids égaux) agissent dans des directions paralélles sur le levier AB aux points A & B également éloignés du point fixe C. Il est d'abord évident que le

le-

levier sera en équilibre autour du point C, puisque toutes choses sont égales de part, & d'autre: je dis de plus que le point C soutiendra le même effort, que si les forces $p + p$ étoient immédiatement appliquée en C; car cet effort, ou la force qui leur feroit équilibre si elle agissoit en C dans une direction contraire, ne peut dépendre que de la quantité p, & si l'on veut de la distance CA que j'appelle x; cette force sera donc exprimée par *fonct.* (p, x), qu'on démontrera $= p$ *fonct.* x, comme dans le lemme de *l'Art. I.*

Qu'on fasse à présent $CA = AE = BD$, & qu'on imagine quatre forces $= p$ appliquées en E, D, C, C, l'action de deux premiéres sur le point C sera $= p$ *fonct.* $2x$ par l'hipotése, & l'action des deux derniéres sera évidemment $= 2p$; or (*hip.*) les forces E & C sont équivalentes à une force p *fonct.* x appliquée en A; & C, D sont la même chose que p *fonct.* x agissant en B, & par conséquent les forces A, B font sur C l'effort $= p$ (*fonct.* $x)^2$: on a donc l'équation p (*fonct.* $x)^2 = 2p + p$ *fonct.* $2x$, qui ne sauroit se vérifier en général à moins que *fonct.* x ne soit constante, comme il est aisé de s'en convaincre par le calcul, & puisque quand $x = 0$ on doit avoir *fonct.* $x = 2$, on aura généralement *fonct.* $x =$ *fonct.* $2x =$ *const.* $= 2$; il suit de là qu'une force $2p$ fait sur une verge quelconque le même effet que deux forces p appliquées sur la même verge à quelles distances que ce soit du point où elle agit pourvu que ces distances soient égales:

PROBLEME. *Trouver l'action d'une force quelconque* p *appliquée en* A *pour mouvoir le levier* E C, *autour de* C (*fig.* 8. *planche* IV.).

Cette action ne peut être exprimée que par une fonction de p & de la distance $AC = x$, j'appelle cette fonction $\xi\,(p, x)$ & on verra comme ci-devant qu'elle sera $= p\,\xi\,x$: qu'on

qu' on faſſe à préſent $AD = AE = z$, il eſt viſible (*lemme*) que deux forces $= \frac{p}{2}$ appliquées en E & D font ſur la verge le même effet que p appliquée en A: or (*hip.*) l'action de la premiére ſur C, ſera $\frac{p}{2} \xi (x + z)$, & l'action de la ſeconde $\frac{p}{2} \xi (x - z)$: on aura donc l'équation

$$p \xi x = \frac{p}{2} \xi (x + z) + \frac{p}{2} \xi (x - z), \text{ ou}$$

$2 \xi x = \xi (x + z) + \xi (x - z)$ qui doit être vraie quelle que ſoit z: ſi l'on fait donc z infiniment petit, & qu' on dévélope la fonction ξ par les méthodes connues, on trouvera ($\xi' x$, $\xi'' x$, $\xi''' x$ *&c.* dénotant ſelon l'uſage ordinaire les différences ſucceſſives de ξx diviſées par dx)

$$\xi (x + z) = \xi x + \frac{z \xi' x}{2} + \frac{z^2 \xi'' x}{2 \cdot 3} + \frac{z^3 \xi''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

$$\xi (x - z) = \xi x - \frac{z \xi' x}{2} + \frac{z^2 \xi'' x}{2 \cdot 3} - \frac{z^3 \xi''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

& par conſéquent $2 \xi x = \xi (x + z) + \xi (x - z)$

$$= 2 \xi x + \frac{z^2 \xi'' x}{3} + \frac{z^4 \xi^{IV} x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^6 \xi^{VI} x}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

& réduiſant, $\frac{z^2 \xi'' x}{3} + \frac{z^4 \xi^{IV} x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^6 \xi^{VI} x}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c. = 0$: diviſant cette équation par $\frac{z^2}{3}$, on trouvera ſéparément $\xi'' x = 0$, $\frac{z^2 \xi^{IV} x}{4 \cdot 5} = 0$, &c.: la premiére donne en multipliant par dx, & intégrant $\xi' x = H$, & multipliant, & intégrant de nouveau $\xi x = Hx + K$: or comme la force p n'agit point ſur le levier pour le mouvoir quand elle eſt appliquées en C, ξx doit être $= 0$ quand $x = 0$: on

 a donc

a donc généralement $K = 0$, & $\xi x = Hx$, & par conſéquent ſi deux forces p & P ſont appliquées aux deux extrémités du levier AB, ſçavoir p en A à la diſtance $CA = x$ du point d'apui, C & P à la diſtance $CB = y$ du même point, leurs actions pour mouvoir le levier en ſens contraire, que nous avons exprimées par $p \xi x$, & $P \xi y$, ſeront HPx, & Hpy, & il y aura par conſéquent équilibre, quand $Hpx = HPy$, ou $px = Py$, ou bien $p : P = y : x$. C. Q. F. D.

ADDITION

A LA PREMIERE PARTIE DES

Recherches sur la nature et la propagation du Son

Imprimées dans le Volume précédent.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. D'Alembert aïant fait l'honneur à ma solution du Problême des *Cordes vibrantes*, de l'attaquer sur quelques points, par un Ecrit particulier imprimé dans le premier Tome de ses *Opuscules Mathématiques* ; je vais ajouter ici de nouveaux éclaircissemens sur l'analise de cette solution, qui serviront en même tems de réponse aux objections de cet illustre Géomètre, & de confirmation à ma Théorie.

I.

La solution en question n'est qu'une application de la formule trouvée dans le Chap. III., pour le mouvement d'un fil chargé d'un nombre quelconque $m-1$ de poids, au cas ou l'on suppose ce nombre infini ; c'est cette application qui a paru à M. d'Alembert susceptible de plusieurs difficultés.

1.° La formule, dont je viens de parler, étant composée d'une suite de termes qui renferment successivement les *sinus* de tous les arcs $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ *&c.* jusqu'à $\frac{(m-1)\pi}{4m}$; j'ai pris dans le cas de $m=\infty$ ces arcs mêmes pour les valeurs de leurs *sinus*. M. d'Alembert m'objecte que cela n'est permis que pour tout angle

$\frac{r\pi}{4m}$, r étant un nombre fini, & nullement pour les angles $\frac{(m-1)\pi}{4m}$, $\frac{(m-2)\pi}{4m}$ *&c.* Cette objection prise en elle-même est solide & sans réplique; mais elle perd toute sa force si on la considére par rapport à la formule dont il s'agit; car je vais prouver directement & invinciblement que les expressions sin. $\frac{\pi}{4m}$, sin. $\frac{2\pi}{4m}$ *&c.* sin. $\frac{(m-1)\pi}{4m}$ doivent être changées en $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, *&c.* $\frac{(m-1)\pi}{4m}$ dans le cas de $m = \infty$.

En remontant à l'analise du Chap. cité, il est aisé de trouver que toutes ces expressions viennent de l'expression générale $\pm 2\sqrt{e} \times$ sin. $\frac{v\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$ (*Art. XXI.*), qui est celle du coéficient R (*Art. XIX.*), v étant un nombre quelconque entier depuis o jusqu'à m. Tout se réduit donc à prouver que, quand $m = \infty$, $R = \pm 2\sqrt{e} \times \frac{v\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$.

Pour y parvenir je remarque d'abord que $R^2 = e(k-2)$, (*Art. XIX.*); je vois de plus que la valeur de k dépend de cette condition que $M^\mu = \frac{a^\mu - b^\mu}{a-b}$ soit $= 0$, lorsque $\mu = m$, a étant $= \frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, & $b = \frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, (*Art. cité*); c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m - [\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m}{2\sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}} = 0$$

ou

ou ſimplement

$$\left[\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}\right]^m - \left[\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}\right]^m = 0.$$

Or $\sqrt{e} = m \times \frac{H}{T}$, (*Art.* XXXV.), $\frac{H}{T}$ étant une quantité finie ; donc $k = 2 + \frac{R^2}{e} = 2 + \frac{R^2 T^2}{m^2 H^2}$; mais R doit étre auſſi une quantité finie, comme il eſt aiſé de le voir par la nature même du calcul, donc $\frac{R^2 T^2}{m^2 H^2}$ ſera une quantité infiniment petite du ſecond ordre dans le cas où $m = \infty$.

Qu'on ſuppoſe $\frac{RT}{H} = f\sqrt{-1}$, enforte que $k = 2 - \frac{f^2}{m^2}$, & qu'on mette cette valeur de k dans l'équation ci-deſſus, il viendra

$$\left[1 - \frac{f^2}{m^2} + \sqrt{\left(-\frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4}\right)}\right]^m -$$
$$\left[1 - \frac{f^2}{m^2} - \sqrt{\left(-\frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4}\right)}\right]^m = 0;$$

équation, qui, en négligeant ce qui ſe doit négliger à cauſe de $m = \infty$, ſe réduit à celle-ci

$$\left(1 + \frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m - \left(1 - \frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m = 0.$$

Or on ſait qu'une expreſſion telle que

$\frac{\left(1 + \frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m - \left(1 - \frac{f}{m}\sqrt{-1}\right)^m}{2\sqrt{-1}}$ devient, dans le cas de $m = \infty$, égale à ſin. f; donc l'équation qu'on vient de trouver eſt équivalente à $2\sqrt{-1} \times$ ſin. $f = 0$, ſavoir à ſin. $f = 0$; ce qui donne $f = \frac{\nu\pi}{2}$, ν étant un

nombre

nombre quelconque entier ; donc $\frac{RT}{H} = \frac{\nu\pi}{2} \times \sqrt{-1}$,

donc $R = \frac{H}{T} \times \frac{\nu\pi}{2} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{e} \times \frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$.

2.° M. d'Alembert prétend que j'ai tort de regarder en général l'expreſſion ſin. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} \pm \frac{mHt}{T}\right)$ comme égale à zéro, lorſque $m = \infty$ (*Voïés Art. XXXVIII.*).

Je conviens que je ne me ſuis pas exprimé aſsès exactement, en diſant que $m\left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T}\right)$ eſt toujours égal à un nombre entier, parceque $m = \infty$; mais ma propoſition n'en eſt pas moins vraie pour cela. Car on voit par l'*Art. XXXVI.* que $\frac{mx}{a}$ eſt mis au lieu de μ qui eſt de lui même un nombre entier ; & à l'égard de $\frac{mHt}{T}$, il ſera auſſi un nombre entier, en regardant $\frac{Ht}{T}$ comme commenſurable avec $\frac{x}{a}$; c'eſt-à-dire en ſuppoſant $\frac{Hdt}{T} = \frac{dx}{a}$; ſuppoſition qui eſt évidemment permiſe, & qui n'apportera pas la moindre limitation à ma ſolution.

3.° M. d'Alembert attaque auſſi les calculs que j'ai fait dans le Chap. VI. pour trouver d'une maniére directe & générale la ſomme d'une ſuite infinie, telle que ſin. $\varphi \times$ ſin. $\theta +$ ſin. $2\varphi \times$ ſin. $2\theta +$ *&c.*

La méthode que j'ai emploïée dans cette recherche eſt très-ſimple ; après avoir transformé la ſuite propoſée en deux autres compoſées de ſimples *coſinus*, j'ai mis à la place de chacun de ces *coſinus* ſon expreſſion exponentielle imaginaire, & j'ai cherché la ſomme de ſuites réſultantes, par la méthode ordinaire de la ſommation des ſeries géo-

géométriques, en ſuppoſant le dernier terme nul comme on le fait communement lorſque la ſerie va à l'infini. M. d'Alembert m'objecte que cette ſuppoſition n'eſt point exacte, parceque dans la ſuite $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}}$ *&c.* le dernier terme eſt $e^{\infty\sqrt{-1}}$ quantité qui eſt infinie au lieu d'être zéro.

Or je demande ſi toutes les fois que dans une formule algébrique, il ſe trouvera par exemple une ſerie géométrique infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 +$ *&c.* on ne ſera pas en droit d'y ſubſtituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité ne ſoit réellement égale à la ſomme de la ſerie propoſée qu'en ſuppoſant le dernier terme x^∞ nul. Il me ſemble qu'on ne ſauroit conteſter l'exactitude d'une telle ſubſtitution ſans renverſer les Principes les plus communs de l'Analiſe.

M. d'Alembert apporte encore un argument particulier pour prouver que la ſomme de la ſuite coſ. x + coſ. $2x$ + coſ. $3x$ + *&c. à l'infini* ne peut pas être $-\frac{1}{2}$ comme je l'ai trouvée par mon calcul. Il ſuppoſe $x = 45°$, & il trouve que cette ſuite devient $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{2}}, +1$ *&c.* après quoi elle recommence: or (dit-il) *la ſomme de cette ſuite finie eſt, ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ſelon qu'on y prendra plus ou moins de termes. Donc la ſomme de la ſuite entiére eſt auſſi ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ſelon le nombre des termes qu'on y prendra, quel que ſoit d'ailleurs ce nombre de termes fini ou infini, & cette ſomme ne ſera point* $= 0$,

$=0$, *à moins que* m $\times$ 45° *ne soit* $=$ *à une infinité de fois la circonférence*, *ou* 135° $+$ *une infinité de fois la circonférence*.

Je répons qu'avec un pareil raisonnement on soutiendroit aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la somme de la suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 + \&c.$ parcequ'en faisant $x = 1$ on a $1 - 1 + 1 - 1 + \&c$ ce qui est ou 0, ou 1, selon que le nombre des termes qu'on prend est pair, ou impair, tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. Or je ne crois pas qu'aucun Géométre voulût admettre cette conclusion.

I I.

Quand même les objections auxquelles nous venons de répondre seroient fondées, M. d'Alembert ne pourroit pas se dispenser de convenir que les résultâts de ma Théorie sont nécessairement exacts dans les cas où ces résultâts s'accordent avec ceux qu'il a trouvés par la sienne; ce qui arrive quand la corde a une certaine figure au commencement du mouvement. Or toutes les objections que M. d'Alembert m'a faites jusqu'ici sont absolument indépendantes de la figure initiale de la corde; donc, puisque ses objections n'empêchent point ma solution d'être exacte lorsque cette figure a certaines conditions, elles ne l'empêcheront pas non plus d'être exacte en général, quelle que soit la figure initiale de la corde.

Ce raisonnement est simple, & ne peut pas avoir echappé au savant Géometre dont nous parlons; aussi s'est-il attaché dans la suite à combattre seulement la généralité de ma solution, & à la borner comme la sienne aux courbes assujetties à la loi de continuité. Il se fonde sur ce que

j'ai

j' ai fait uſage de la méthode de M. Bernoulli pour trouver la valeur d' une quantité qui dans certains cas eſt $\frac{0}{0}$, méthode qui ſuppoſe que la quantité propoſée ſoit une fonction algebrique.

Mais je le prie de faire attention, que dans ma ſolution, la détermination de la figure de la corde à chaque inſtant dépend uniquement des quantités Z & V, leſquelles n' entrent point dans l' opération dont il s' agit. Je conviens que la formule à laquelle j' applique la méthode de M. Bernoulli eſt aſſujettie à la loi de continuité; mais il ne me paroit pas s' enſuivre, que les quantités Z & V qui conſtituent le coéficient de cette formule le ſoient auſſi, comme M. d' Alembert le prétend.

I I I.

Je viens maintenant aux difficultés que M. d' Alembert a faites contre la Théorie de M. Euler, & qui peuvent auſſi s' appliquer à la mienne: ce ſont celles qui regardent la conſtruction que M. Euler a donnée pour trouver la figure de la corde à chaque inſtant; conſtruction qui eſt préciſément la même que celle qui réſulte de ma Théorie. *Voïés l' Art. XL.*

1.° M. d' Alembert prétend que cette conſtruction ne peut ſatisfaire à l' équation de la corde vibrante $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ à moins que la courbe initiale AMB (*fig. A plan.* 3.) ne ſoit telle que les fleches $r''\omega$, $r'o'$ de deux arcs conſécutifs, & infiniment petits $\rho''R'$, $R'\rho'$, ſoient égales; où, ce qui eſt la même choſe, que la courbure au point r'' ſoit la même que le courbure au point r' infiniment proche; ce qui exclut déja toutes le courbes dans leſquelles le rayon

 oſcu-

osculateur change brusquement en quelque point. Voici le raisonnement de M. d' Alembert.

Soit pris (dit-il dans le §. VII. du Mémoire *sur les vibrations de Cordes sonores* imprimé dans le même volume) *AP* = *x* (fig. citée) *PT* = *t sur l'axe* AB; *donc regardant* x *comme constante*, & *faisant* $PT' = PT$, $Tt = t\theta = T't' = t'\theta' = dt$, *on aura* $AT = x + t$, $At = x + t + dt$, $A\theta = x + t + 2dt$, $AT' = x - t$, $At' = x - t - dt$, $A\theta' = x - t - 2dt$. *Or* y *étant égale, suivant la construction de M. Euler, à la demie ordonnée* TR *qui répond à* $x + t$ *plus à la demie ordonnée* T'R' *qui répond à* $x - t$, *il s' ensuit que* d^2y *en ne faisant varier que* t *est* $\frac{\theta\rho - tr - (tr - TR)}{2} + \frac{\theta'\rho' - t'r' - (t'r' - T'R')}{2}$; *donc* $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{\theta'\rho' + T'R' - 2t'r'}{2Tt^2} =$ (*en menant les cordes* $R\rho$, $R'\rho'$) $\frac{-ro - r'o'}{Tt^2}$. *Maintenant faisons* t *constante* & $= PT$, & x *variable*; *prenons* $Pp = p\pi = dx$, & *supposons* $dx = Tt$, *ce qui est évidemment permis*, *nous aurons* 1.° $At = x + t + dx$, $A\theta = x + t + 2dx$; 2.° *Faisant* $T't'' = t''\theta'' = Pp = Tt$, *nous aurons* $At'' = x + dx - t$, $A\theta'' = x + 2dx - t$; *donc*, *menant la corde* $R'\rho''$, *on trouvera que* d^2y, *en ne faisant varier que* x, *est* $-ro - r''\omega$; *donc* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro - r''\omega}{Pp^2}$. *Il faut donc*, *pour que* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *soit égal à* $\frac{d^2y}{dt^2}$, *que* $r'o' = r''\omega$.

Je répons que, dans l'équation générale $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, d^2y (en ne faisant varier que *x*) est la différence seconde de trois ordonnées consécutives, dont l'une répond à l'abscisse

$x - dx$, l' autre à l' abſciſſe x, la troiſiéme à l' abſciſſe $x + dx$, & que d^2y (en ne faiſant varier que t) eſt la différence ſeconde de trois ordonnées répondantes à la même x, la premiére pour le tems $t - dt$, la ſeconde pour le tems t, la derniére pour le tems $t + dt$; comme M. d' Alembert lui même le dit dans le §. X.; qu' ainſi la valeur de d^2y (en ne faiſant varier que t) ſera, ſuivant la conſtruction de M. Euler & la mienne, $\frac{tr - TR - (TR - yz)}{2}$ [en tirant l'ordonnée yz telle que $yT = Tt$] $+ \frac{t'r' - T'R' - (T'R' - t''r'')}{2} = \frac{tr + yz - 2TR}{2} + \frac{t'r' + t''r'' - 2T'R'}{2} =$ (en menant les cordes zr, $r''r'$) $\frac{-Rx - R'x'}{2}$; & que la valeur de d^2y (en ne faiſant varier que x) ſera $\frac{tr - TR - (TR - zy)}{2} + \frac{t''r'' - T'R' - (T'R' - t'r')}{2} = \frac{-Rx - R'x'}{2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Pp^2} =$ (en ſuppoſant $Tt = Pp$) $\frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}$; & l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ devient identique.

2.° M. d' Alembert prétend enſuite que la courbure doit être nulle aux extrémités *A* & *B*. *Car ſoit* (*dit-il*, dans le §. VIII.) PT, *&* PT′ = AP, *on a* (*en ne faiſant varier que* t) $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2} = \frac{-ro + Q'q'}{Tt^2}$, *&* *non pas* $\frac{-ro - Q'q'}{T^2t^2}$ *parceque* $l's' - 2Q'L' = -2Q'q'$, *&* *que* l's′ *&* Q′L′ *doivent être priſes négativement par leur poſition, & par la conſtruction de M. Euler.*

 Main-

Maintenant, en ne faiſant varier que x, *on aura* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro - Qq}{dt^2}$; *donc* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ne ſera pas* $= \frac{d^2y}{dt^2}$, *ſi la courbure n' eſt pas nulle en* A.

Ce raiſonnement eſt ſemblable à celui, auquel je viens de répondre, & ſe refute par conſéquent de la même maniére. En effet la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ au point A n' eſt pas $\frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2}$, comme le ſuppoſe M. d' Alembert, mais $\frac{tr + zy - 2TR}{2Tt^2} + \frac{L'Q' + QL}{2Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, parceque $L'Q'$ étant égale, & de poſition contraire à QL, ſuivant la conſtruction de M. Euler & la mienne, on a $L'Q' + LQ = 0$; de même la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ eſt $\frac{tr + zy - 2TR}{2Tt^2} + \frac{LQ + L'Q'}{Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, & non pas $\frac{-ro - Qq}{Tt^2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2}$ eſt toujours $= \frac{d^2y}{dx^2}$ quelle que ſoit la courbure en A.

3.° Autre argument de M. d'Alembert pour prouver que la courbure doit être uniforme dans chaque portion infiniment petite de la courbe AMB. Il donne à la différence dt deux valeurs différentes à volonté, & il trouve que pour que la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ ſoit toujours la même & égale à celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut que les fléches ro, qui appartiennent à différens arcs infiniment petis $Rr\rho$ ſoient toujours proportionelles aux quarrés des portions correſpondantes $T\theta$ de l'axe; ce qui ne peut avoir lieu, que dans des arcs de courbure uniforme, comme M. d' Alembert le démontre fort au long dans le §. X. de ſon Mémoire.

A cela je répondrai qu'il n'eſt nullement nèceſſaire, pour la généralité de ma ſolution, que les différences dt demeurent indeterminées & puiſſent être ſuppoſées quelconques ; comme je l'ai déja remarqué plus haut (*n.* 2 *Art. I.*). Il me ſuffit qu'on prenne toujours $dt = \frac{T}{Ha}dx$, ou, en ſuppoſant avec M. d'Alembert $\frac{Ha}{T} = 1, dt = dx$; car, comme dx peut être pris auſſi petit qu'on voudra, il eſt évident qu'on n'en trouvera pas moins la figure de corde au bout d'un tems quelconque donné t.

4.° M. d'Alembert apporte de plus une raiſon métaphyſique pour faire voir en géneral que le mouvement de la corde ne peut être repréſenté par aucune conſtruction quand la courbure fait un ſaut en quelque point M de la courbe initiale. *C'eſt* (dit-il dans le §. *XI.*) *que dans ce cas il y a proprement au point* M *deux rayons oſculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe* MR, *& l'autre à la portion de courbe* M A. *Or la force accéleratrice en chaque point de la corde étant en raiſon inverſe du rayon oſculateur, lequel de deux rayons communs au point* M *doit ſervir à déterminer la force en ce point* M? *C'eſt ce qu'il eſt impoſſible de fixer, & il l'eſt par conſéquent auſſi de réſoudre le Probleme dans ce cas-là. En effet ſuppoſons que la figure initiale de la corde ſoit compoſée de deux différentes courbes ainſi reunies en* M; *je demande quelle eſt la force acceleratrice du point M, lorſque la corde commence à ſe mouvoir?*

La réponſe eſt bien ſimple ; la courbe AMB étant continue, il eſt clair qu'on peut toujours prendre, à quelque point R que ce ſoit, trois ordonnées conſécutives, & infiniment proches zy, RT, rt; or les différences de ces trois ordonnées conſtituent la valeur de d^2y, à laquelle la force accélératrice du point du milieu R eſt néceſſairement pro-

por-

portionelle par la nature du Problême, quel que ſoit d'ailleurs le rayon oſculateur en ce point.

5.° M. d'Alembert fait voir dans le même §., que ſi la courbure n' etoit pas nulle en *B*, il s'enſuivroit de la conſtruction de M. Euler, & de la mienne qu' il y auroit un ſaut dans le $\frac{d^2y}{dt^2}$ qui répond a un point quelconque *M* lorſque $t = PT$, ſavoir que ſa force accélératrice paſſeroit bruſquement, & ſans dégrés de la valeur qu'elle a en cet inſtant à une autre valeur, qui différeroit de celle-là d' une quantité du même ordre; ce qui ſeroit contraire à la nature de la force accélératrice.

Je réponds que cet inconvénient auroit lieu en effet, ſi les forces accélératrices qui agiſſent ſur chaque point de la corde à chaque inſtant avoient une valeur finie; mais dans nôtre cas ces forces ſont toujours infiniment petites, puiſque on ſuppoſe dy infiniment petit, par raport à dx; par conſéquent l' accroiſſement de la force du point *M* ſera auſſi infiniment petit; ce qui n' a plus rien de choquant.

6.° M. d' Alembert ajoute encore une nouvelle conſidération, pour prouver que le mouvement de la corde ne peut être ſoumis à aucun calcul analitique quand la courbure eſt finie en *A*, & *B*. *Qu' on ſe repréſente* (dit-il §. XII.) *la corde au commencement de ſon mouvement; ſi la courbure n'eſt pas nulle en* B *le rayon oſculateur y ſera donc fini; par conſéquent la force accélératrice y ſera auſſi finie, & tendra à donner du mouvement au point* B; *cependant ce point étant fixement arrêté, eſt incapable de ſe mouvoir; ainſi d'un côté* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *eſt finie lorſque* $x = AB$, *& lorſque* $t = 0$, & *de l'autre* $\frac{d^2y}{dt^2}$ *eſt toujours* $= 0$ *au point* B *quelle que ſoit la valeur de* t...;... *La nature en ce point arrête, pour ainſi dire, bruſquement le calcul; on a deux forces accélératrices voiſines, & infini-*

infiniment peu différentes ; l'une au point B, l'autre au point infiniment proche de celui-là ; la seconde de ces forces produit un mouvement, la première n'en sauroit produire, quoique par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ *elle paroisse devoir en produire un, lorsque* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *n'est pas* $= 0$ *; ainsi la loi du mouvement n'étant pas continue pour tous les points de la courbe ne peut être représentée avec exactitude par l'équation dont il s'agit.*

A cela je réponds 1.° Qu'il ne me paroit nullement exact de dire que la force accélératrice est finie en *B*, & tend à donner du mouvement à ce point. Car il est facile de voir que les points *A* & *B*, par où la corde est attachée, ne sont réellement sollicités par aucune force accélératrice perpendiculaire à l'axe ; mais simplement tirés par la force de tension de la corde ; laquelle agit presque dans la direction même de l'axe, & qui doit être détruite par l'hypotése du probléme. 2.° Sans m'embarrasser de la valeur, quelle qu'elle soit, du rayon osculateur en *A* & *B* je considére que le $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répond exactement à ces points est toujours nul de lui même, suivant ma construction, comme on l'a fait voir plus haut. D'où je conclus que le calcul est parfaitement d'accord avec la nature.

Voilà les principales objections de M. d'Alembert sur la construction que M. Euler & moi avons donnée pour le mouvement des cordes vibrantes. Il me paroit d'y avoir pleinement satisfait, & d'avoir montré en même tems que cette construction a toute la généralité dont la question est susceptible.

Quant aux autres difficultés que M. d'Alembert propose dans le même *Mémoire* contre la Théorie de M. Euler, & qui sont tirées de la considération des fonctions algébriques ; il est clair qu'elles ne touchent point à ma solution ; mais ser-

servent seulement à confirmer ce que j' avois déja avancé (*Art.* XV.) sur l' insuffisance de la méthode de ces deux grands Géomètres, pour conduire à une Théorie exacte & complette du mouvement des cordes sonores.

Au reste, quelque générale que soit la solution que j' ai trouvée de cet important Problême, je suis bien éloigné de penser qu' elle puisse donner le vrai mouvement de la corde, quand sa figure initiale est composée de deux, ou plusieurs lignes qui font des angles entr' elles; car il est évident que l' équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ne sauroit avoir lieu dans ces cas. Mais il est certain d' autre part, & l' on peut même s' en assurer par l' expérience, que la roideur de la corde, & l' action réciproque de toutes ses parties l' obligeront de prendre aussi-tôt une figure courbe continue, à laquelle on pourra par conséquent appliquer notre construction générale de l' *Art.* XLV. Les vibrations qui suivront les premiers instants, & qui sont les seules qu' il nous importe de connoître, seront donc toujours réguliéres & isochrones, & leur durée ne dépendra en aucune maniére de la figure primitive, mais seulement de la tension, de la longueur, & de la grosseur de la corde, comme on l'a démontré (*Art.* XLVI.); ce qui suffit pour expliquer, pourquoi une corde frappée d'une maniére quelconque rend toujours le même son.

ÉCLAIR-

ÉCLAIRCISSEMENS

Pour le Mémoire ſur les quantités imaginaires inſéré dans le premier Volume

PAR MR. DE FONCENEX.

J'Ai donné dans le premier Volume un Ecrit, où je traite aſsès au long des logarithmes des quantités négatives. Cette matiére, qui avoit déja été le ſujet d'une controverſe fort-vive entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli, a été ſavamment approfondie par le célébre Mr. Euler dans le *Mémoires de l'Académie Royale de Pruſſe pour l'année* 1749. Cet habile Géomètre y fait voir par une méthode, dont j'ai taché de donner un précis dans l'écrit dont il s'agit, que les nombre poſitifs ont non ſeulement un logarithme réel, mais encore une infinité d'autres qui ſont imaginaires & ſemblables à ceux qu'il trouve pour les nombres négatifs corréſpondans : c'eſt ainſi que ce grand Géomètre ſatisfait à pluſieurs objections très-fortes que Mr. Bernoulli faiſoit contre le ſentiment de Mr. Leibnitz, & que ce dernier avoit plutôt éludées que réſolues.

Cependant la plus grande preuve de Mr. Bernoulli, tirée de la quadrature de l'hyperbole, étoit encore dans toute ſa force : c'eſt pourquoi, quand j'entrepris de traiter cette matiére, je crus devoir chercher dans l'hyperbole même une formule générale qui donnât tout d'un coup les logarithmes des quantités poſitives & négatives : un calcul aſſès ſimple me la fit découvrir, & elle s'eſt trouvée parfaitement ſemblable à celle de Mr. Euler ; mais les concluſions que j'ai tiré de cette formule, & de pluſieurs autres conſidérations que j'ai détaillé dans mon Mémoire, ſont un peu différentes de celles de Mr. Euler. D'abord il me paroiſſoit

prouvé que les logarithmes des nombres négatifs pouvoient à la rigueur être considérés comme réels de même que ceux des nombre positifs; & que par conséquent la logarithmique a deux branches, l'une au-dessus, & l'autre au-dessous de l'axe; mais il me sembloit que ces deux branches n'étoient pas liées par la loi de continuité, ou au moins que les raisons qui l'auroient pût faire croire n'étoient pas convaincantes.

J'apprens qu'avant que Mr. Euler eusse publié ses recherches sur cette matiére, elle avoit déja été le sujet d'une dispute par lettres entre Mr. D'Alembert & lui. Dans les Opuscules que ce grand Géomètre vient de donner au Public, on trouve un savant Mémoire, dans lequel il établit sur de nouvelles preuves, que les logarithmes des quantités négatives sont réels, contre le sentiment de Mr. Euler: enfin il m'a fait l'honneur d'examiner dans une Ecrit particulier la théorie que j'avois proposée dans mon Mémoire. Les réflexions de cet illustre Matématicien ont réveillé ma curiosité sur cette matiére que des occupations d'un genre absolument différent, m'avoient empêché de suivre: & je soumets ici au jugement des Géomètres les nouvelles considérations que la briéveté du tems m'a permis de faire sur ce sujet assès délicat par lui-même.

On entend communément par *logarithmes* une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, répondant chacun à chacun, à ceux d'une autre suite de nombres qui forment entr' eux une progression géométrique aussi quelconque; mais comme on peut toujours réduire les logaritmes à être les exposans des puissances successives d'un nombre e pris à volonté, en leur ajoûtant seulement une quantité constante, ou en changeant l'origine des x dans la courbe qui exprime le rapport des nombre à leurs log.: il est visible que ce n'est rien lever à la généralité de la définition que nous venons de donner, que de dire simplement que x sera le log. de y quand on aura l'équation $y = e^x$.

Et

Et il paroit d'ailleurs que c'eſt la ſeule façon dont on les conſidére dans le calcul.

Cela poſé il eſt néceſſaire de bien diſtinguer la queſtion Arithmétique de la queſtion Géométrique : car il me paroit évident que l'origine des log. numériques ne permet pas d'en donner aucun aux nombres négatifs, puiſqu'à quelle puiſſance qu'on éleve le nombre e il ne ſauroit réſulter $= -e$.

Je ſais bien qu'en faiſant que e^{2m} répréſente un nombre quelconque on trouve $\sqrt{e^{2m}} = \pm e^m$, d'où l'on conclud que $2m$ étant le log. de e^{2m}, m doit auſſi bien être le log. de $-e^m$, que de $+e^m$, mais ſi l'on s'en tient à la premiére origine de e^{2m}, comme nous le ſuppoſons ici, & qu'on veuille faire attention à la théorie des quantités négatives que Mr. D'Alembert a fort-bien dévélopé dans ſon Ecrit ſur les logaritmes & dans l'Encyclopédie, on verra aiſément que, puiſque e^{2m} vient par la génération même des log. de la quantité $+e$ élevée à la puiſſance $2m$, & non pas de $-e$ élevé à cette puiſſance, on ne peut pas dire que $-e^m$ ſoit réellement la racine quarré de e^{2m}, mais ſeulement que $-e^m$ élevé au quarré produit une quantité égale au même nombre e^{2m} : ce qui ne ſuffit pas pour la queſtion arithmétique, où on s'eſt contenté de raporter tous les nombre à l'indéterminé poſitif $+e$.

Cette théorie recevra encor un plus grand jour ſi on conſidére les logarithmes comme des nombres en progréſſion arithmétique répondant à une progréſſion géométrique : car après avoir choiſi, par exemple la progréſſion decuple 1, 10, 100 pour les nombres, & la progréſſion naturelle 0, 1, 2, &c. pour leurs log. ; il eſt viſible que la progréſſion géométrique prolongée tant qu'on voudra ne nous fera jamais parvenir à des nombres négatifs. Envain diroit-on que les nombre négatifs peuvent entrer en proportion avec les nombres poſitifs ; car il eſt évident que la proportion ne ſauroit affecter que la ſeule quantité, & que le ſigne

$+$ ou $-$ ne lui appartient point, mais ſignifie ſeulement la différente poſition des quantités qui en ſont affectées, comme Mr. d'Alembert lui-même l'a remarqué. Les nombres $1, -1, -1, 1$ ne forment donc pas plus une proportion que ceux-ci $-1, 1, 1, 1$, & toute la différence qu'on y voit, c'eſt que dans la premiére ſuite le produit des extrémes eſt égal au produit des moïens, & non pas dans la ſeconde, ou pour m'exprimer plus exactement, ces produits ſont égaux dans toutes les deux, mais affectés de ſignes contraires dans la ſeconde, ce qui ne change rien à la quantité, ni par conſéquent à la proportionalité, dans les principes de Mr. d'Alembert même. Enfin quand même on voudroit que le produit des extrêmes étant égal au produit des moïens, les quantités formaſſent une proportion, cela ne ſerviroit pas encore au cas préſent, où le premier terme de la progreſſion doit être poſitif $= + e$, & le dernier, le nombre négatif dont on cherche le log., puiſqu'il eſt viſible qu'alors le quarré du terme moïen n'eſt pas même égal au produit des extrêmes.

Quant à la preuve qu'on prétend déduire de ce que les deux progréſſions peuvent être quelconques, elle ne me paroit pas pouvoir s'appliquer ici, puiſqu'il s'agit de déterminer le log. de -2: les log. de $1, 2, 3, 4$, &c. étant déja donnés, c'eſt-à-dire la progréſſion dans laquelle on doit le trouver étant déja déterminée. C'eſt ainſi, par exemple, qu'on ne peut pas dire qu'à la même ordonnée d'une parabole, il réponde différentes abſciſſes x, $x + a$, $x + b$ &c., quoiqu'on puiſſe toujours les lui rapporter en prenant l'origine de x à volonté.

On voit donc qu'à conſidérer les logatithmes arithmétiquement, & en les rapportant toujours à un nombre déterminé e, les nombres négatifs ne ſauroient en avoir, & je crois devoir remarquer ici que c'eſt ſous ce point de vüe que Mr. Leibnits, & même Mr. Euler les avoient conſidérés.

Telle

Telle étoit, dans leur premiére origine, la nature des logarithmes; mais les Géomètres ont bien-tôt cherché à transporter ces notions dans la Géométrie : or l'on sait qu'en pareil cas l'expréssion algébrique devient souvent plus générale qu'on ne le veut, & notre question se réduit à examiner s'il en a été ainsi dans la logarithmique.

L'équation de cette courbe est, comme on sait, $dx = \frac{dy}{y}$. Je crois d'avoir assès bien prouvé dans mon Mémoire que cette équation nous fait voir que la logarithmique a deux branches, & qu'elles sont même liées par leur expression transcendante, ce qui s'accorde avec le sentiment de Mrs. Bernoulli & d'Alembert; mais les raisonnemens par lesquels le premier de ces grands Géomètres prétendoit prouver l'entiére continuité de cette courbe, & même les nouvelles raisons que le dernier y a ajouté pour fortifier ce sentiment ne me paroissent pas entiérement concluantes.

En effet l'argument tiré de la quadrature de l'hyperbole que Mr. Bernoulli regardoit comme démonstratif, & sur lequel Mr. d'Alembert se fonde aussi le plus, pourroit servir également à établir une théorie contraire : car si on considére la courbe dont l'équation est $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, il est évident qu'elle ne s'étendra point du côté des x négatives, puisqu' alors $y = \frac{1}{\sqrt{-x}}$: qu'on suppose à présent que cette courbe fasse une révolution sur son axe, elle formera un solide dont l'élément sera $\frac{dx}{x}$, & cette solidité sera par conséquent exprimée par $l.x$; or puisque la courbe n'existe pas quand x est négative, le solide n'existera pas non plus, & par conséquent x négative n'a point de logarithme.

Je suis bien éloigné de vouloir conclure de là, & d'une infinité de raisonnemens semblables, qu'on peut aisément imaginer

giner, que la logarithmique n'a point de branche au-deſſous de l'axe ; mais il me ſemble que, puiſqu'en choiſiſſant à volonté différentes courbes génératrices pour les logarithmes, on peut en déduire des conſéquences directement oppoſées, nous ne devons pas faire beaucoup de fond ſur ces ſortes de raiſonnemens. Cela ſe raporte à ce que j'avois déja obſervé dans mon Mémoire, que l'intégration change toujours un peu l'équation différentielle au moins quant à ſa généralité.

Pour s'aſsûrer donc de la coexiſtance & de l'union des branches de la logarithmique, il eſt abſolument néceſſaire de s'abſtenir de toute intégration, & même des quadratures qui les ſuppoſent toujours ; voici un raiſonnement qui ne me paroit ſujet à aucun inconvénient.

Soit BP (*Fig. *pl. IV.*) la logarithmique, AQ ſon axe, $AD = x$, $DP = y$. On trouvera le raïon de la dévéloppée qui appartient au point P, $PR = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$ & par conſéquent $CR = \frac{2y^2+1}{y}$, $CD = 1+y^2$, donc ſi on appelle $CD = u$, $CR = z$ on trouvera l'équation $z^2 = \frac{4u - 4u^2 - 1}{1-u}$, qui à chaque valeur de $CD = u$ fournit toujours deux valeurs égales, & de ſignes différens pour $z = CR$; il ſuit delà que la dévélopée de la logarithmique a deux branches ſemblables l'une au-deſſus & l'autre au-deſſous de l'axe ; & que par conſéquent, non ſeulement il en eſt de même de la logarithmique, mais encore que ces deux branches forment une courbe continue.

Ce raiſonnement me paroit être démonſtratif, & ne laiſſer plus aucun doute ſur la continuité des deux branches de notre courbe, c'eſt donc inutilement que je cherchois dans mon Ecrit à trouver une différence entre la continuité

dans

des branches de l' hyperbole, & celle de ſes aires, puiſqu'elles ſont auſſi bien liées les unes que les autres : il eſt viſible qu'on ne peut pas dire que l' aire qui appartient à l' x négative ſoit auſſi négative, comme le ſuppoſoit le raiſonnement de *l' Art.* 11.; je l' avois moi même remarqué un peu auparavant, & c' eſt avec raiſon que M. d' Alembert me le conteſte, mais je ne ſaurois convenir avec lui que cela poſé l' on ne pût en tirer les conſéquences que j' en ai déduit : quoiqu'il en ſoit cette diſcuſſion eſt inutile ici, puiſque nous convenons ſur le fond de la queſtion.

Mais que deviendra alors la formule $\varphi \sqrt{-1} = l.\ (coſſ.\ \varphi \pm ſin.\ \varphi \sqrt{-1})$ trouvée par l' illuſtre Bernoulli, & que j' ai déduite dans mon Mémoire du rapport conſtant du ſecteur hyperbolique au ſecteur circulaire ?

Je répons 1.° que cette formule peut s'exprimer un peu plus généralement en la changeant en celle-ci $\varphi \sqrt{-1} = l.\ (\pm coſſ.\ \varphi \pm ſin.\ \varphi \sqrt{-1})$, & en choiſiſſant les ſignes convenables pour les cas, auxquels on veut l' appliquer : comme je l' avois déja conclu dans mon Mémoire, de l' origine de cette même formule, auſſi bien que de l' intégration directe de l' équation $dx = \frac{dy}{y}$ que j' ai donnée dans le même écrit, & qui eſt $y = m\,e^x$, où m eſt abſolument arbitraire.

2.° Que ſi l' on veut dans notre formule conſerver toujours les mêmes ſignes, on trouvera à la vérité des log. imaginaires pour les nombres négatifs, mais pourvû qu' on s' en tienne à l' expreſſion algébrique, & qu'on n' en tire aucune concluſion avant que d' avoir transformé de nouveau la formule, on pourra s' en ſervir ſans crainte d' erreur, comme l' uſage continuel qu' on en a fait juſqu' ici le prouve ſuffiſamment.

On peut lire dans mon Mémoire l' origine & le dénoüement de cet eſpéce de paradoxe ; j' y ai remarqué que ſi on cherchoit une appliquée négative dans la branche ſupé-

rieure

rieure de la courbe qui appartient à l'équation $y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$ qui en a évidemment deux égales, on la trouveroit imaginaire: il en eſt précifément de même dans notre formule $\varphi \surd -1 = l. [x + \surd (x^2 - 1)]$, qui ne ſauroit exprimer généralement tous les nombres en faiſant ſeulement varier l' x, mais dans laquelle il faut tantôt ſe ſervir de $x + \surd (x^2 - 1)$ tantôt de $x - \surd (x^2 - 1)$.

Voilà je penſe la vraie raiſon pour laquelle notre formule ne fournit que des imaginaires pour les log. des nombres négatifs, & je ne ſaurois accorder à Mr. d' Alembert qu'elle appartienne à une logarithmique dont la ſoutengeante eſt imaginaire, puiſque Mrs. Bernoulli, Euler, & moi l'avons tous conſtruite d' après cette ſuppoſition que le log. de 1 fût = 0, quoique par des procédés fort-différens.

Il eſt vrai que Mr. d'Alembert attaque le raiſonnement géométrique ſur lequel j'ai fondé la vérité de cette formule; parceque j'y ſuppoſe que les ordonnées du cercle étant toujours aux ordonnées de l'hyperbole comme $1 : \surd - 1$, il en doit être de même de leurs ſecteurs: il objecte que la conſtante qu'on doit ajouter à l'une de ces intégrales, change la proportion de leurs élémens; mais il eſt viſible qu'on n'a point à craindre ici un pareil inconvénient, puiſque nous exprimons l'arc de cercle ſimplement par φ, & que l'intégration de l'hyperbole n'exige point de conſtante.

Un plus grand détail ſur cette matiére me paroit inutile, & je me contente de renvoïer à mon Mémoire pour les conſéquences qu'on peut déduire de cette théorie. J' ai, ſi je ne me trompe, prouvé ici ſuffiſamment, que les logarithmes tels que Mrs. Leibnitz & Euler les ont conſidérés ſont imaginaires pour les nombres négatifs: & d' un autre côté que la logarithmique a cependant deux branches, comme l'ont ſoutenu Mrs. Bernoulli & d'Alembert.

DE

DE L'INFINI ABSOLU

Consideré dans la Grandeur

PAR LE

P. GERDIL BARNABITE.

LE mot *infini* appliqué à la quantité peut être pris en deux ſens: tantôt il ſignifie une propriété eſſentielle à la grandeur, par laquelle on conçoit qu'elle eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution ſans fin; tantôt il exprime l'élévation actuelle d'une grandeur à la derniére période, pour ainſi dire, de l'augmentation, dont elle eſt ſuſceptible, où ſon abaiſſement juſqu'a la derniere période de ſa diminution poſſible. *Une quantité infinie* dit-on communément, *eſt celle qui a reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles: une quantité infiniment petite, celle qui a reçu tous ſes decroiſſements finis poſſibles.*

Locke diſtingue très nettement ces deux ſignifications. Il deſigne la premiere par le mot *d'infinité*, qu'il ſubſtitue à celui d'infini en puiſſance, emploïé par les anciens pour marquer qu'il n'eſt aucun terme qui borne l'augmentation, oŭ la diminution poſſible de la grandeur. Il exprime la ſeconde par le mot ſimple *d'infini*, c'eſt à dire de l'infini abſolu & en acte: & il ajoute que cette ſorte d'infini dans la quantité eſt impoſſible à concevoir, *car*, dit-il, *une repetition à l'infini ne ſauroit jamais repréſenter l'infini.*

La premiere idée eſt très-claire. C'eſt une ſuite de la notion même de la grandeur; quelque augmentation que la grandeur ait reçuë, on conçoit, qu'elle peut être encore augmentée, & l'eſprit ne voit aucune borne à cette ſuite poſſible d'augmentation. Mais pour former la notion de

 l'in-

l'infini abſolu, il faudroit allier ces deux idées, qu'une ſuite d'augmentation ne peut avoir aucune fin, & que pourtant cette augmentation peut parvenir a ſon comble. Auſſi Chambers raiſonnant ſur les principes de Locke n'héſite pas de dire, que l'idée d'un nombre actuel infini eſt une abſurdité. (a)

Les anciens Géométres ſcrupuleuſement attachés à la rigueur de la démonſtration, & à la clarté des idées, qui en eſt inſéparable, ont heureuſement emploïé la premiere notion de l'infini dans leurs recherches, & en ont ſévérement écarté l'idée de l'infini abſolu, dont les réſultats paradoxes ſont plus faits pour étonner une imagination avide du merveilleux, que pour ſatisfaire un eſprit ami du vrai.

Cavalleri fut le premier qui oſa introduire dans la Géométrie l'infini ſous une forme nouvelle, en imaginant le continu composé d'un nombre infini de parties, qui ſont comme les derniers termes de la décompoſition qu'on peut en faire, en le partageant en tranches paralelles entr'elles, il conſidera ces derniers termes, comme les éléments du continu, & les appella *indiviſibles*. Mais M. de Montucla dans ſon excellente hiſtoire des Mathématiques obſerve que quoiqu'on ne puiſſe diſconvenir que Cavalleri s'énonce d'une maniere un peu dure pour des oreilles Géométriques; il eſt pourtant facile de reconcilier ſon langage avec la ſaine Géométrie, par l'interprêtation qu'il y donna luy même, lorſqu'il fut attaqué par Guldin, faiſant voir que ſa méthode n'eſt autre choſe, que celle d'exhauſtion des anciens, ſimplifiée. Le ſoin donc qu'il eut de diſſimuler l'infini, dont il faiſoit uſage, & de le maſquer le plus ſouvent ſous

(a) Le P. Jacquier dans ſes inſtitutions de Philoſophie parlant de l'infini mathématique dit qu'il eſt évident qu'une grandeur infinie répugne de ſa nature, & implique contradiction. Le P. Boſchovitz dans ſon traité des ſect. Con. p. 465. établit qu'il ne peut éxiſter aucune quantité qui ne ſoit finie.

ſous le nom plus doux en apparence d'indéfini, ne doit pas être regardé comme un ménagement néceſſaire pour introduire l'idée nouvelle de l'infini abſolu, ainſi que M. de Fontenelle voudroit le perſuader, mais plutôſt comme une précaution, dont il reconnut la néceſſité, pour faire ſentir, que ſa méthode pouvoit être aiſément ramenée aux idées exactes de la Géométrie.

On vit encore dans le même ſiécle la notion de l'infinité ſagement emploïée par d' habiles Maîtres ſe dévéloper plus, ou moins en différentes méthodes, dont l'heureuſe application aux recherches les plus difficiles avança extraordinairement les progrès de la Géométrie, & acquit une gloire immortelle à leurs inventeurs.

Enfin parut le calcul de l' infini qui fut en même tems & le point de réunion des Thèories qui l' avoient précédé, & le germe des brillantes découvertes qui l' ont ſuivi. L' infini ſoumis aux regles du calcul donna lieu de penſer aux perſonnes peu verſeés dans ces matiéres, qu'on connoit l'infini, ſelon l' expreſſion de M. Voltaire, comme dix & dix font vingt; & quelques Savants regarderent ce calcul comme une preuve convaincante de la réalité de l'infini abſolu, & de l'éxiſtence d'une infinité de différents ordres d'infini.

Cependant M. Dalembert, qui (au mot différentiel de l' Encyclop) a expliqué la métaphyſique de ce calcul avec autant de clarté, que de ſolidité, fait voir que la ſuppoſition qu'on y fait de quantités infiniment petites n'eſt que pour abréger, & ſimplifier les raiſonnements, qu'il ne s' agit point de quantités infiniment petites dans le calcul différentiel, mais uniquement de limites de quantités finies, qu'ainſi la métaphyſique de l' infini, & des quantités infiniment petites, plus grandes, ou plus petites les unes que les autres, eſt totalement inutile au calcul différentiel, où l'on ne ſe ſert du terme d'infiniment petit, que pour abréger les expreſſions.

Il remarque en même tems que ſi ce calcul a eu des ennemis dans ſa naiſſance, c'eſt la faute des Géométres ſes partiſans, dont les uns l'ont mal compris, les autres peu expliqué.

M. Rolle qui fut un des plus ardents à le combattre, ne le rejetta, que parcequ'il ne pouvoit admettre la ſuppoſition de grandeurs infiniment petites. Rolle ſe trompoit en faiſant dépendre le calcul de cette ſuppoſition, mais il ne ſe trompoit pas à rejetter la ſuppoſition en elle même.

Leibnitz n' ignorant pas ſans doute la force des preuves que la Géométrie même pouvoit fournir contre ces ſortes, de grandeur, reduiſit ſes infiniment petits à n' être que des incomparables, dans le même ſens qu'un grain de ſable ſeroit incomparable au globe de la Terre. Cette idée ne s'accorde guere à la vérité avec l'exactitude géométrique des calculs, mais elle fait voir du moins que Leibnitz étoit bien éloigné d' admettre cette ſorte d'infini.

Newton, dont la Métaphyſique ſur ce point, dit M. Dalembert, eſt très-exacte, & très-lumineuſe, eſt parti d' un autre principe, & il n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode de trouver les limites des rapports.

Il paroit donc bien prouvé que ni la ſynthéſe rigoureuſe des anciens, ni l'analiſe ſublime des modernes ne portent aucunement ſur la ſuppoſition de quantités infiniment petites, & ne renferment rien qui tende à établir la réalité de l'infini abſolu ſoit dans la quantité diſcrete, ſoit dans la quantité continuë.

Envain le célébre Fontenelle a entrepris d' élever, comme on dit, l'édifice de l' infini en établiſſant les différents ordres d' infinis, & d' infiniment petits. Cet édifice au jugement de M. de Montucla & des plus habiles Maitres, eſt plus hardi que ſolide.

J' ai

J'ai déja tâché dans la premiere de mes dissertations imprimées à Paris chez Chaubert de dévoiler le foible de cette Théorie, & je dois répéter ici, pour l'intérêt seul de la vérité, qu'aïant fait communiquer cette partie du manuscrit à un Géométre du premier ordre, il m'écrivit, que les principes que je combattrois, étoient en effet très-faux, & tendoient à jetter du doute sur les verités de Géométrie; & au sujet d'une autre dissertation il m'ecrivit que j'avois réfuté avec grande raison les infinis indéterminables de M. de Fontenelle.

Cette recherche peut n'être pas entiérement inutile. Sans parler de la néceffité d'éloigner de la Géométrie des notions confuses, qui sous un appareil savant, couvrent quelque fois des paralogismes capables d'éblouïr, (*b*) je remarque simplement que l'infini dans la grandeur n'est pas seulement l'objet de la Géométrie; il est aussi quoique sous un autre point de vüe, du ressort de la Métaphysique. L'éclaircissement de cette question pourroit donc servir à former, pour ainsi dire, une nouvelle ligne de communication entre ces deux branches des connoissances humaines, l'impossibilité de l'infini absolu démontrée géométriquement fourniroit à la Métaphisique un principe lumineux, pour établir des vérités de la plus grande importance.

L'objet de ce mémoire est de présenter quelques preuves de cette impossibilité. Je les ai tirées 1. de la formation

(*b*) L'éditeur des œuvres de Maclaurin parlant de son traité des fluxions (vie de Maclaurin page XIII.) s'énonce en ces termes: „ on ne peut disconvenir que les termes d'infini, & d'infiniment petits ne soient „ devenus trop familiers aux Mathématiciens, & qu'on n'en ait abusé „ en Géométrie & en Arithmetique, soit en introduisant & palliant „ des absurdités réelles, soit en donnant à ces sciences un certain air „ misterieux, & affecté qu'elles ne doivent point avoir. Pour remédier „ à ce mal qui alloit tous les jours en croissant, M. Maclaurin trouva „ qu'il étoit néceffaire, en démonstrant les principes des fluxions, de „ rejetter entiérement tous ces termes sujets à disputes, & de ne supposer que des quantités finies déterminables, telles que celles dont „ traite Euclide dans sa Géométrie. &c.

mation de la suite naturelle des nombres. Cette preuve servira aussi de réponse à la seule objection qu'on ait faite contre ma premiere dissertation. 2. de la notion élémentaire des lignes droites paralleles. 3. d'une propriété de la Logarithmique. 4. des asymptotes de l'hyperbole. 5. des progressions croissantes infinies. 6. des progressions géométriquement decroissantes à l'infini.

Je puis m'être trompé sur le choix des preuves mais le sentiment des Géométres que je viens de citer, m'autorise a croire que je ne me suis pas trompé sur le fond de la question, en regardant l'impossibilité de l'infini actuel dans la quantité, comme une vérité susceptible de démonstration. Cela seul suffit pour remplir l'objet que j'ai en vüe, qui n'est point d'entrer dans des recherches difficiles de Géométrie, mais d'établir une vérité utile, ou du moins de faire naître à quelque habile Géométre la pensée de l'établir. La grace que j'ose demander aux lecteurs qui voudront bien jetter les yeux sur cet écrit, est de ne pas juger de la solidité de mes raisonnements sur l'exposé de chacune des preuves en particulier, au cas qu'ils y trouvent quelque difficulté, mais d'examiner la liaison de toutes les preuves entr'elles. Quelque effort que l'on fasse pour s'enoncer avec clarté, on ne peut empêcher que les expressions dont on est obligé de se servir dans des matiéres un peu abstraites, ne présentent un côté obscur, qui rend la pensée moins intelligible, & ce n'est qu'en tournant ses pensées & en les présentant sous différentes faces qu'on parvient à les caractériser avec assez de précision pour les faire entendre comme on les conçoit.

PRE-

PREMIERE PREUVE

Tirée de la formation de la ſuite naturelle des nombres.

J'Ai déja fait uſage de cette preuve tirée de la formation de la ſuite naturelle des nombres dans la diſſertation que je viens de citer. La ſeule objection qui me ſoit revenuë, c'eſt que n'ayant aucune idée de l'infini abſolu nous ne ſaurions démontrer ſi cet infini répugne où non.

Je ſens la néceſſité d'écarter avant tout cette objection, qui eſt d'autant plus à craindre qu'elle eſt plus vague.

Je dis donc que les preuves principales que j'ai emploïées dans mon eſſai de démonſtr., ne portent point ſur l'idée de l'infini conſidéré en lui même, mais ſur des rapports conſtants entre quantités finies, rapports qui étant eſſentiels à la ſuite naturelle des nombres, & ſubſiſtant invariablement dans tout le cours de cette ſuite, prouvent que tout nombre poſſible eſt néceſſairement fini.

C'eſt ainſi que l'on regarde comme démontrée la proprieté de l'aſymptote de pouvoir être prolongée à l'infini ſans jamais rencontrer la courbe dont elle approche continuellement, *de maniere* (ce ſont les termes de M. Dalembert au mot Aſymptote) *que ſa diſtance à cette courbe ne devient jamais zéro abſolu, mais peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée.*

Cette proprieté ſe déduit non de l'idée même de l'infini, mais d'un rapport conſtant entre des quantités finies, comme dans l'hyperbole entre la puiſſance de cette courbe, & tous les rectangles formés par une portion de l'aſymptote, & une droite tirée de l'aſymptote à l'hyperbole. Or cette propriété étant eſſentielle à l'hyperbole, l'invariabilité de ce rapport fait connoître évidemment que l'hyperbole & l'aſymptote peuvent être prolongées ſans fin, & que cependant elles ne peuvent jamais s'approcher de ſorte

que

que leur distance devienne absolument nulle. L'obscurité de l'idée de l'infini n'a jamais été un prétexte de douter de la solidité d'une démonstration fondée sur l'invariabilité connue d'un rapport qui toujours subsistant & toujours le même dans le prolongement indéfini de ces deux lignes, ne peut que donner toujours le même résultat.

Tel est le procédé que j'ai suivi dans mon essai sur tout pa. 23. & suiv. je vais y ajouter quelques éclaircissements

1. Soit un assemblage quelconque de termes ou d'unités, je dis que la suite naturelle des nombres est applicable à cet assemblage.

2. Et par conséquent tout nombre possible entre dans la suite naturelle & en fait partie.

3. C'est une propriété essentielle à la suite naturelle d'être formée par l'addition continuelle d'unité à unité.

4. En sorte que dans la suite naturelle tout nombre qui suit un autre nombre, ne peut le surpasser que d'une unité.

5. Tout nombre qui a un rapport fini à un nombre fini est nécessairement fini.

6. Sur ces principes je dis 1. que la suite naturelle des nombres peut être augmentée à l'infini par l'addition continuelle d'unités à unités, en sorte que quel que soit le nombre donné, on pourra toujours trouver un nombre plus grand. Cette proposition n'a pas besoin de preuves. C'est un axiome d'Euclide (arith. l. 1. apud Tacq.) *Quolibet numero potest sumi major*. Je dis 2. que dans cette progression tous les nombres possibles par lesquels on conçoit que la suite naturelle augmente à l'infini, auront toujours un rapport fini aux précédents, & qu'il n'est ainsi aucun nombre possible qui ne soit fini.

PREUVE

PREUVE.

Concevons la ſuite naturelle élevée à un nombre quelconque donné, il eſt évident que ce nombre quelque grand qu'on veuille l'imaginer, ſera un nombre fini, & qu'il pourra être encore augmenté. Or le nombre ſuivant ne pourra ſurpaſſer ce dernier nombre que d'une unité. Donc il aura un rapport fini à un nombre fini, donc ce nombre ſuivant ſera un nombre fini. Et comme ce rapport ſubſiſtera ſans fin dans tout le cours de la ſuite naturelle, tout nombre qu'on voudra y ajouter (quelque augmentation qu'on ſuppoſe qu'elle ait déja reçue) ne ſurpaſſera le nombre précédent que d'une unité; ce ſera donc encore un nombre fini. Or il n'eſt aucun nombre poſſible dans la ſuite naturelle, auquel ce raiſonnement ne puiſſe être appliqué. Donc tout nombre poſſible eſt néceſſairement un nombre fini; donc &c.

2. Dans la ſuite naturelle le nombre 2. eſt néceſſairement déterminé à être fini par le rapport qu'il a à l'unité qui le précéde, & par le même rapport il détermine le nombre 3. qui le ſuit à être fini. Ainſi le nombre 2. comme moyen eſt déterminé à être fini par ſon antécédent, & il détermine de même ſon conſéquent. Or dans la progreſſion naturelle tous les nombres poſſibles depuis l'unité ſont autant de termes moyens, qui ſe ſuccédent & ſe déterminent toujours ſelon la même loi. Donc l'unité déterminant le nombre 2. à être fini, & celui-ci ſon conſéquent 3. en vertu du même rapport, cette détermination doit s'étendre, autant que la progreſſion, & par conſéquent tous les termes de cette ſuite, ne peuvent qu'être finis.

3. Si la ſuite naturelle pouvoit s'élever à un nombre qui ne fut pas fini, il y auroit donc un nombre fini poſſible, qui ne ſeroit plus ſuivi d'un autre nombre fini, mais d'un nombre d'un ordre ſuperieur. Or il n'eſt aucun

nombre fini possible, dont le conséquent ne doive être fini, puisqu'il ne peut surpasser que d'une unité son antécédent. Donc il n'est aucun nombre fini possible, qui ne soit suivi d'un autre nombre fini. Donc la suite naturelle ne peut jamais sortir du fini. Donc &c.

Réduisons ces raisonnements en deux mots. Tout nombre qui ne s'éléve que d'une unité sur un nombre fini, est un nombre fini. Or par une propriété constante de la suite naturelle, on trouve qu'en continuant le cours de cette suite à l'infini, chaque nombre qu'on y ajoute, ne s'éléve que d'une unité sur le nombre fini qui le précéde, & cela se trouve sans fin. Donc il n'est aucun nombre possible dans la suite naturelle qui ne soit fini.

Cette marche essentielle à la progression des nombres, fait ainsi dans tout le cours de la suite naturelle le même effet que l'égalité de la puissance de l'hyperbole, & des rectangles correspondants fait dans le prolongement indéfini de cette courbe & de son asymptote; de maniére que comme dans ce prolongement indéfini *la distance de l'asymptote à la courbe ne devient jamais nulle, ou zéro absolu*, selon l'expression de M. D'Alembert, ainsi dans le cours indéfini de la suite naturelle tout nombre qu'on ajoute aux autres nombres, ne devient jamais infini absolu, & de même que cette distance peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée sans jamais devenir zéro absolu, ainsi dans la suite naturelle on peut toujours ajouter un nombre plus grand qu'aucun autre nombre donné, sans pouvoir jamais parvenir à l'infini absolu.

J'ajoute que dans la quantité continuë, zéro absolu & l'infini absolu peuvent être considérés comme les limites du décroissement & de l'augmentation de la grandeur, de maniére cependant que la quantité ne peut jamais atteindre ces limites, ni coincider avec elles. La quantité continuë diminuë sans cesse par la division de ses parties;

mais

mais quoique cette diviſion poſſible n'ait point de bornes, & qu'elle puiſſe aller à l'infini, il eſt pourtant impoſſible que jamais elle réduiſe la quantité à zéro abſolu. D'un autre côté la grandeur peut augmenter par une progreſſion continuelle d'un à deux, de deux à quatre, & ainſi de ſuite; mais quoique cette progreſſion n'ait point de bornes, & qu'elle puiſſe continuer à l'infini, elle ne pourra non plus jamais élever la grandeur à l'infini abſolu. La marche d'une quantité finie vers zéro abſolu, & vers l'infini abſolu ſe trouve ainſi la même dans des directions oppoſées. Donc l'impoſſibilité démontrée de réduire une quantité finie à zéro abſolu par une progreſſion quelconque de décroiſſement, ſemble prouver l'impoſſibilité de l'élever à l'infini abſolu par une progreſſion oppoſée d'accroiſſement.

SECONDE PREUVE

Tirée des notions élémentaires de la Géométrie.

SOient les deux droites paralleles (*fig.* 1.) *A B*; *C D*, je dis que ces deux lignes peuvent être prolongées indéfiniment, de maniére pourtant qu'elles ne pourront jamais parvenir à l'infini abſolu, ou en acte; je dis qu'on ne pourra jamais parvenir ſur ces lignes à un point quelconque, dont la diſtance du point *A* puiſſe être ſuppoſée abſolument infinie, & qu'une telle ſuppoſition renverſe les principes les plus inconteſtables de la Géométrie.

1. Il eſt inconteſtable qu'on peut ſuppoſer en Géométrie deux lignes droites exactement paralleles, & qui étant prolongées à l'infini conſervent toujours leurs parallelíſme.

2. Il ſuit de cette ſuppoſition qu'aucun point de la ligne *A B*, à quelque diſtance qu'on le ſuppoſe du point *A* ne pourra jamais coincider avec aucun point de la li-

 gne

gne *C D*. Car ces deux lignes devant toujours conſerver leur parallelisme par la ſuppoſition, elles ſeront toujours & dans tout le cours de leur prolongement à une égale diſtance l'une de l'autre.

3. Or je dis que de tels principes inconteſtables en Géométrie ſont détruits par la ſuppoſition que les lignes *A B*, *C D*, puiſſent être prolongées juſqu'à l'infini abſolu où actuel.

4. Si ces lignes peuvent être prolongées juſqu'à l'infini abſolu, donc il y aura dans la ligne *A B*, des points qu'on pourra ſuppoſer être à une diſtance abſolument infinie du point A.

5. Cela étant des points *C* & *E* de la ligne *C D* on pourra tirer les deux droites paralleles *C G*, *E B* aux points *G* & *B* ſuppoſés à une diſtance abſolument infinie du point *A*, de maniére, qu'on aura un parallelogramme *C G B E* formé de deux droites finies *C E*, *G B*, & de deux infinies *C G*, *E B*.

6. Qu'on éléve maintenant ſur le côté *E B* la perpendiculaire *T P* qui méſure la diſtance des deux côtés *C G*, *E B* où cette diſtance *T P* pourra être encore diminuée, ou elle ſera abſolument nulle?

7. Si la diſtance *T P* peut être encore diminuée, donc les points *G* & *B* peuvent encore être reculés de plus en plus ſur la ligne *A B*; donc ces points ne ſont pas encore à un éloignement infini du point *A*.

8. Si l'on fait la diſtance *T P* abſolument nulle, donc la ligne *C G* doit coincider ſur la ligne *E B*.

9. Or la ligne *C G* ne peut coincider avec la ligne *E B*, que celle ci ne coincide elle même avec la ligne *C D*. Car le point *u* venant à tomber ſur le point *E*, il faut que toute la ligne *C G* tombe ſur la ligne *C D*, & cela par les axiomes mêmes d'Euclide.

10. Mais la ligne *C G* & la ligne *E B* venant ainſi à tomber & à coincider ſur la ligne *C D*, il eſt évident que les points *G* & *B* de la droite *A B* doivent rencontrer l'autre parallele *C D*. Ce qui détruit la notion des paralleles établies ſur les principes les plus inconteſtables de la Géométrie.

L'expreſſion de quelques Géométres qui diſent que deux paralleles concourent à une diſtance infinie ne contredit aucunement la démonſtration que nous venons de donner. Ce n'eſt là qu'une façon de s'exprimer pour dire que deux lignes qu'on ſuppoſeroit ne pouvoir concourir qu'à une diſtance infinie pourroient être regardées comme paralleles, parceque leur inclinaiſon étant infiniment petite ſeroit comptée pour rien. Mais cette ſuppoſition ne prouve pas que deux lignes puiſſent être prolongées à une diſtance abſolument infinie. Elle ne détruit point non plus la poſſibilité géométrique de deux lignes tellement ſituées l'une à l'égard de l'autre que l'inclinaiſon ſoit abſolument nulle, & qui ſoient par conſéquent exactement paralleles. Or il eſt évident qu'en détérminant ainſi la notion des paralleles, il eſt impoſſible qu'elles concourent jamais à quelqu'éloignement que ce ſoit, & on peut encore le montrer de la maniére ſuivante.

Qu'on ſuppoſe (*fig.* 2.) *A C*, *B D.*, tangentes aux deux extrémités du diamêtre *A B* du cercle O, & par conſéquent paralleles. Si l'on ſuppoſe en même tems que ces deux lignes prolongées à une diſtance abſolument infinie dans la direction *A C*, *B D* doivent enfin concourir à un point infiniment éloigné du diamêtre *A B*, il faudra ſuppoſer par la même raiſon qu'en les prolongeant dans la direction oppoſée *A E*, *B F*, elles devront auſſi concourir de ce côté à un éloignement infini. Or les deux lignes *A E*, *B F* ne peuvent concourir du côte *X* ſans leur ſuppoſer une inclinaiſon infiniment petite de ce même

côté

côté ; & elles ne peuvent être inclinées vers X qu'elles ne s'écartent d'autant vers Y. Mais pour concourir aussi de ce côté selon la supposition elles doivent être inclinées l'une vers l'autre. Donc il faudroit les supposer en même tems convergentes & divergentes ; ce qui répugne.

TROISIÉME PREUVE

Tirée d'une proprieté de la Logarithmique.

SOit $A\,x$ l'axe de la logarithmique (*fig.* 3.) $d\ e\ p$, $A\,d = 1$, $b\ e = \frac{1}{2}$. Il est démontré que l'axe étant asymptote à la courbe ne peut la rencontrer qu'à une distance absolument infinie, ce qui dans le langage de la plûpart des Géométres veut dire qu'il ne peut jamais la rencontrer, c'est à dire que l'axe ne peut jamais devenir absolument infini. Proposition qui paroissant susceptible de démonstration, peut confirmer de plus en plus l'impossibilité d'une suite composée d'un nombre de termes absolument infini.

Qu'on suppose l'axe $A\,x$ absolument infini, & partagé en un nombre actuellement infini de parties égales $A\,b$, $b\ c$ &c. donc au point x placé à un éloignement infini du point A, l'axe deviendra tangente à la logarithmique. D'autre part il est évident que les ordonnées décroissant dans la progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ &c. l'ordonnée au point x, c'est à dire à un éloignement infini du point A sera égale à l'unité divisée par 2. élévé à sa puissance infinie, savoir $\frac{1}{2^{\infty}}$

Cela supposé, pour que l'axe puisse devenir tangente à la courbe, il faut que la fraction $\frac{1}{2^{\infty}}$ qui exprime l'ordonnée, soit égale à zéro absolu, où que dumoins ce soit un infiniment petit incapable de recevoir aucun décroissement

ul-

ultérieur. Car ſi l'ordonnèe $\frac{1}{{}^{2}\infty}$ pouvoit encore devenir plus petite, la diſtance de l'axe à la courbe pourroit encore diminuer. Ce ne feroit donc pas encore le point du contact, comme on le ſuppoſe.

Or l'une & l'autre ſuppoſition eſt impoſſible. Car 1. cette ordonné $\frac{1}{{}^{2}\infty}$ loin d'être incapable de recevoir aucun décroiſſement ultérieur, feroit encore diviſible à l'infini. Qu'on conçoive en effet dans un cercle une corde infiniment petite du premier ordre égale à l'ordonnée $\frac{1}{{}^{2}\infty}$, il eſt évident que l'abſciſſe correſpondante ſera un infiniment petit du ſecond ordre, comme le démontre M. D'Alembert (art. différentiel de l'Encyclop.), d'où il conclut que les infiniment petits du premier ordre étant une fois admis, tous les autres en dérivent néceſſairement. On ſait auſſi que les Géométres pour donner une idée de ce que feroit une quantité abſolument infinie, ſi elle étoit poſſible, diſent que c'eſt une quantité qui aïant reçeu tous les accroiſſements finis poſſibles ne peut plus être augmentée par des quantités finies, mais ſeulement par des quantités infinies; réciproquement une quantité infiniment petite ſera encore ſuſceptible de diminution ſans fin par le moyen de quantités infinies. De ſorte qu'en admettant un infiniment petit du premier ordre tel que la fraction $\frac{1}{\infty}$ il faut néceſſairement reconnoitre la poſſibilité d'un autre terme $\frac{1}{{}^{2}\infty}$ infiniment plus petit que le premier. Donc la fraction $\frac{1}{\infty^{2}}$ pouvant encore recevoir une infinité de diminutions, ne ſauroit être conſiderée ni comme zéro abſolu, ni comme incapable de recevoir aucun décroiſſement ultérieur.

2. Si des points A & b du même axe Ax l'on éléve les perpendiculaires $AD = Ad = 1$, $bE = \frac{1}{3}$ & ainsi de suite, on aura une autre logarithmique, dont l'ordonnée infiniment petite correspondante au point x sera $\frac{1}{{}_3\infty}$. Or au point x la logarithmique supérieure & l'inférieure devant également toucher leur axe commun $A\,x$, il faudroit que l'ordonnée $\frac{1}{{}_3\infty}$, & l'ordonnée $\frac{1}{{}_2\infty}$ fussent égales entr'elles, que l'une & l'autre fussent égales à zéro absolu, ce qui & répugne. L'ordonnée $\frac{1}{{}_3\infty}$ étant plus petite que l'ordonnée $\frac{1}{{}_2\infty}$ celle-ci est encore susceptible de diminution, donc la distance exprimée par cette ordonnée pouvant encore être diminuée, la courbe pourra étre prolongée avant que d'arriver au point du contact, où la distance entre l'axe & la courbe doit être absolument nulle. On pourra faire le même raisonnement sur l'ordonnée $\frac{1}{{}_2\infty}$ d'où il sera aisé de conclure que quelque hipotése que l'on fasse, il est impossible que l'axe rencontre jamais la logarithmique, mais il devroit la rencontrer s'il pouvoit être absolument infini ; & il seroit infini s'il étoit composé d'un nombre de parties actuellement infini. Donc une suite composée d'un nombre actuellement infini de termes est impossible.

RE-

RÉPONSE À UNE OBJECTION ET

QUATRIÉME PREUVE

Tirée des asymptotes de l' hyperbole.

On m' objectera peut être que de très-habiles Géométres conviennent avec M. de l'Hopital (Sect. Con. art. 108.) que *les asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les hyperboles dans leurs extrémités.* Ce qui semble établir la possibilité de l' infini actuel.

Je répons que dans le stile des Géométres cette supposition ne signifie autre chose, sinon que dans le cours indéfini de l' hyperbole, & de l' asymptote, celle-ci approchant de plus en plus de l'hyperbole la toucheroit enfin, si on pouvoit parvenir au terme de ce prolongement infini, ou pour mieux dire si ce prolongement infini pouvoit avoir un terme quelconque. Ce n' est qu' à cette condition, qu' ils supposent que l'asymptote puisse être regardée comme une tangente infinie qui touche l' hyperbole, puisqu' ils disent que ce cas ne peut avoir lieu qu' à l' extrémité de l' hyperbole, comme s' énonce M. de l'Hopital.

Mais en même tems ces Géométres ne prétendent point réaliser cette supposition, ni en établir la possibilité * M. de l'Hopital s'en explique nettement art. 102. par ces mots. *L'on*

* Pour s' en convaincre il n'y a qu' à éxaminer le calcul qu' on fait d' après cette supposition pour trouver les asymptotes des lignes courbes. Ce calcul consiste à chercher d'abord des formules générales pour la position de toutes les tangentes de la courbe donnée, & à rejetter ensuite dans ces formules plusieurs termes, qui sont regardés comme nuls par rapport à d' autres termes dont la valeur devient par la supposition infiniment plus grande: d' où l' on voit que ce calcul n' est pas absolument rigoureux, & qu'il ne peut par conséquent donner un résultat exact, à moins qu'on ne regarde comme peu exacte la supposition sur laquelle on l'a établi, en sorte que l' erreur de l'hipotése détruise tout-à-fait celle qu' on a commis dans le calcul.

L'on voit que l'hyperbole & son asymptote étant prolongées s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini, ou l'on ne peut jamais arriver. C'est à dire que si l'hyperbole & l'asymptote étoient prolongées jusqu'à l'infini absolu, elles se toucheroient; mais comme cette condition est impossible, *& qu'on ne peut jamais arriver à l'infini*, il est de fait qu'elles ne peuvent jamais se rencontrer. C'est ce que M. de la Chapelle explique avec encore plus de netteté, & de précision dans son traité des

A parler exactement l'asymptote est une droite qui s'approche continuellement d'une courbe de maniére que sa distance à la courbe puisse devenir moindre qu'aucune grandeur donnée, sans qu'elle soit jamais zéro absolu. Or cette condition rend fausse la supposition que l'asymptote soit une véritable tangente; mais on la redresse en suite dans le calcul, en faisant, pour ainsi dire, disparoître le point d'attouchement, en sorte que la tangente cesse d'être tangente, & devienne seulement la limite des tangentes, savoir la limite de la courbe même; ce qui est conforme à la nature de l'asymptote.

Il en est ici comme dans la méthode des infiniment petits, où le calcul redresse aussi de lui même les fausses hipotéses que l'on y fait. On imagine par exemple qu'une courbe soit un poligone d'une infinité de petit côtés, dont chacun étant prolongé devienne une tangente à la courbe. Cette supposition est réellement fausse; car le petit côté prolongé ne peut jamais être autre chose qu'une véritable secante: mais l'erreur est détruite par une autre erreur qu'on introduit dans le calcul en y négligant comme nulles des quantités, qui selon la supposition ne sont qu'infiniment petites. C'est en quoi consiste, ce me semble, la Métaphysique du calcul des infiniment petits, tel que l'a donné M. Leibnitz. La méthode de M. Newton est au contraire tout à fait rigoureuse soit dans les suppositions, soit dans les procédés du calcul. Car il ne conçoit qu'une secante devienne tangente, que lorsque les deux points d'intersection viennent tomber l'un sur l'autre, & alors il rejette de ses formules toutes les quantités que cette condition rend entiérement nulles. Cette méthode exige absolument qu'on regarde comme évanouissantes, c'est à dire comme nulles, les quantités dont on cherche les premieres, ou derniéres raisons; & c'est ce qui rend souvent les démonstrations longues, & compliquées. La supposition des infiniment petits sert à abrégér, & à facilitér ces démonstrations: mais ce n'est qu'après avoir prouvé en général que l'erreur qu'elle fait naître est toujours corrigée par la maniére dont on manie le calcul, qu'il est permis de regarder les infiniment petits comme des réalités, & de les emploïer comme tels dans la solution des problemes.

NOTE DE M. DE LA GRANGE.

des sections coniques approuvé par l'Académie Roïale des sciences de Paris sur le témoignage de M. Cassini & D'Alembert. Après avoir établi (n. 89.) que les asymptotes de l'hyperbole prolongées à une très-grande distance, deviennent sensiblement tangentes à cette courbe, il ajoute „ si l'on objectoit que ceci contredit le num. 46., où „ l'on a démontré que les asymptotes de l'hyperbole pro„ longées tant que l'on voudra, ne rencontreront jamais „ cette courbe, on observera que les asymptotes ne de„ viennent tangentes, que dans le cas où elles seroient „ actuellement prolongées à l'infini; mais ce cas étant „ impossible, c'est comme si l'on disoit qu'après un très„ grand prolongement, elles approcheront si fort d'être „ tangentes, que leur différence des tangentes réelles sera „ insensible, & non pas plus petite qu'aucune grandeur „ donnée. (*Il faut entendre qu'aucune grandeur donnée possible, car il est également vrai qu'il n'y a qu'une quantité infiniment petite, si elle pouvoit exister, qui soit plus petite qu'aucune grandeur donnée possible; & que quelque petite que soit une grandeur actuellement donnée, on en peut toujours trouver une plus petite, qui dès lors deviendra donnée, & ainsi à l'infini. Ce qui fait disparoitre la contradiction apparente de ces différentes expressions*). Car ceci ne pourroit avoir lieu „ que dans l'infini, c'est à dire qu'au fond il est im„ possible qu'il ait lieu. Ainsi, quand pour démontrer „ l'égalité de deux grandeurs, on se sert de ce principe, „ que *deux quantités doivent nécessairement être égales, si* „ *leur différence est plus petite qu'aucune grandeur donnée*, „ il faut bien distinguer si la limite dont les deux quanti„ tés approchent continuellement est dans le fini, où dans „ l'infini; dans le premier cas il y aura égalité, parce „ qu'on démontrera l'impossibilité d'assigner aucune diffé„ rence; mais dans le second cas, il en ira autrement, „ vû que la limite étant supposée à une distance infinie,

 c'est

„ c'eſt comme s'il n'y avoit point de limite; donc le
„ terme de comparaiſon manquant, le principe n'a plus
„ lieu, & ſe fonder deſſus eſt donner dans un paralogiſme
„ très certain, qui conduiroit à cette contradiction manifeſte, *que les aſymptotes de l'hyperbole ne peuvent jamais*
„ *rencontrer cette courbe, & que cependant elles la rencontrent*. J'ai inſiſté la deſſus, conclût M. de la Chapelle,
„ en faveur des commençants, qui pourroient à cette occaſion ſuſpecter le principe de *l'égalité de deux grandeurs, dont la différence eſt démontrée plus petite qu'aucune grandeur donnée*; d'autant plus que je ne connois
„ aucun Géométre qui ait fait attention à la néceſſité de
„ ſauver les apparences de la contradiction alléguée. Telle eſt auſſi, comme on l'a vu, l'idée qu'en donne M. D'Alembert lui même au mot aſymptote de l'Enciclop. & Volf ne s'énonce pas autrement ſur le même ſujet dans ſes éléments de Mathématique.

Il eſt d'ailleurs bien aiſé de faire voir qu'en ſuppoſant comme réel ou poſſible ce prolongement de l'hyperbole à l'infini abſolu, où l'aſymptote devient tangente, on ne peut éviter de tomber en des contradictions manifeſtes.

1. L'aſymptote, comme le dit M. de l'Hopital, ne devient tangente, qu'à l'extrémité de la courbe. Donc pour vérifier cette ſuppoſition, il faut allier ces deux choſes, que l'hyperbole ſoit actuellement infinie, & que pourtant elle ait une extrémité. Or l'idée d'une extrémité quelconque ne détruit-elle pas l'idée de l'infinité? Mais ce n'eſt encore ici qu'un argument métaphyſique.

2. Jl eſt démontré que la tangente de l'hyperbole eſt coupée en deux parties égales au point du contact. Donc l'aſymptote devenüe tangente infinie devroit auſſi être partagée au point du contact en deux parties égales. Car cette propriété ſubſiſtant immuablement dans tout le cours indéfini de l'hyperbole, il n'eſt pas poſſible qu'elle man-

que

que tout à coup. Par conſéquent ſi on veut ſuppoſer que l'aſymptote ſoit tangente à l'extrémité de l'hyperbole infiniment prolongée, il faut ſuppoſer auſſi que depuis cette extrémité où l'hyperbole n'arrive qu'après un cours infini, l'aſymptote s'étend encore infiniment au delà, afinque la partie qui eſt au delà du contact, ſoit égale à celle qui eſt en deçà. Qu'on ne s'imagine pas que je veuille ici me récrier ſur l'idée de l'infini double d'un autre infini. Ce n'eſt pas là ce qui fait la difficulté. Elle conſiſte en ce que d'un côte l'aſymptote ne peut toucher l'hyberbole qu'à ſon extrémité, ainſi que le dit M. de l'Hopital, lorſque l'hyperbole a pris tous ſes accroiſſemens finis poſſibles; & qu'au contraire l'aſymptote loin d'être à ſon extrémité, ne ſe trouve qu'à la moitié de ſon cours. Or cela paroit être contre la nature de l'hyperbole. Il ſuffit de conſidérer cette courbe dans le cone, pour appercevoir qu'elle doit s'étendre autant que l'aſymptote.

3. Pour que l'aſymptote touche l'hyperbole, il faut ſuppoſer l'hyperbole entre deux extrémités; l'une eſt le ſommet dont elle part; l'autre le point du contact au delà duquel il n'eſt pas poſſible que la courbe puiſſe être continuée; car ſi elle étoit continuée au delà de ce point, elle devroit couper l'aſymptote contre la ſuppoſition. On n'évite point cette difficulté en diſant avec Fontenelle qu'une quantité infinie ne peut plus augmenter par des quantités finies, mais qu'elle peut être encore augmentée par des quantités infinies. Car en ſuppoſant une portion infinie de courbe ajoutée à cette extrémité du contact, il ne ſeroit pas moins vrai de dire que cette courbe couperoit la tangente au point du contact. Ce qui répugne.

4. Il eſt démontre, (art. 95., de l'Hopital fig. 40.) que ſi l'on mene par un point quelconque N de l'hyperbole, une ligne droite Ll terminée par les aſymptotes, & qui la rencontre en un autre point n, les parties LN, ln

pri-

prifes entre les points de l'hyperbole, & la rencontre des afymptotes feront égales entr' elles. Maintenant que du point N pris à volonté près du fommet de l'hyperbole, on tire une ligne $L\ l$ qui aille aboutir à l' extrémité, où fe fait le contact de l'afymptote infinie, on devra encore trouver $l\ n$ égale a $L\ N$ entre la courbe & l'afymptote. Ce qui répugne à l'idée du contact.

Il paroit qu'on ne peut éviter cette difficulté qu'en difant qu'à cette extrémité la partie $l\ n$ coincide foit avec la courbe, foit avec l'afymptote; mais alors cette partie $l\ n$ étant toute appliquée & fur la courbe & fur l'afymptote, il s'en fuivroit que le contact ne fe feroit plus en un point, mais dans tout la longueur de la partie $l\ n$, ce qui n'eft pas moins abfurde. Je ne crois pas qu'une preuve de cette nature s'éloigne beaucoup d'une rigoureufe démonftration.

Cette partie $l\ n$, qui déborde toujours doit faire le même effet que dans la conchoide, & empêcher irrevocablement que l'afymptote ne vienne jamais fe joindre à l'hyperbole.

CINQUIÉME PREUVE.

Tirée des progreffions croiffantes infinies.

J'Ai propofé quelques idées fur ce fujet dans mon effai pag. 18. & fuiv. Voici quelques autres réflexions que je foumets également au jugement impartial des lecteurs éclairés.

M. l'Abbé de la Caille dans fes leçons de Mathématique fi juftement eftimées, traitant des propriétés de la grandeur confiderée dans l'infini, établit d'abord que la grandeur eft divifible à l'infini; il le démontre par l'effence même de la grandeur qui eft d'être fufceptible de plus

&

& de moins, & il ajoute : *par exemple la ſuite naturelle des nombres 1. 2. 3. 4. croit évidemment à l'infini ; car à quelque grand nombre qu'on conçoive élévé un terme de cette ſuite, on ne voit pas pour cela que l'on ſoit plus près de la fin, ce qui ne peut convenir à une ſuite dont le nombre des termes ſeroit fini.*

L'expreſſion eſt très-juſte; mais un eſprit peu juſte pourroit en abuſer, & s'imaginer que la ſuite naturelle des nombres ne pourroit croître à l'infini, s'il n'exiſtoit déja comme une infinité actuelle de nombres, dont l'eſprit pût tirer comme d'un reſervoir immenſe tous les nombres qu'il ajoute ſucceſſivement à la ſuite naturelle. Cette idée, diſ-je, ne ſeroit pas aſſès juſte. Pour former la ſuite naturelle & pour l'augmenter à l'infini, l'eſprit n'a pas beſoin d'emprunter des nombres tous faits, comme on tire d'un coffre fort les monnoyes qu'on veut dépenſer. L'eſprit forme la ſuite naturelle par la puiſſance qu'il a de répéter ſes idées, & d'ajouter ainſi unité à unité. Et comme rien ne limite l'exercice ſucceſſif de cette puiſſance, il eſt clair que la ſuite naturelle des nombres, peut croître à l'infini par l'addition d'unité à unité ſans être jamais bornée.

Cette operation eſt analogue à celle, par laquelle l'eſprit peut diviſer à l'infini une portion de quantité continuë. A meſure que l'eſprit pouſſe plus loin la diviſion, le nombre des parties ſe multiplie; & comme cette diviſion peut aller à l'infini, les nombres peuvent croître à l'infini. Telle eſt à peu près l'idée que M. l'Abbé de la Caille donne lui même de la formation des nombres: une quantité, dit-il, exprimée par des nombres, eſt une quantité qu'on a conçue partagée en pluſieurs parties égales, dont chacune de ces parties conſiderée ſeule s'appelle l'unité : idée qui ne s'éloigne pas de la notion que Newton donne du nombre en le faiſant dépendre de la maniére dont une quantité eſt contenuë dans un autre quantité. Telle étoit

auſſi

aussi l' idée des anciens, comme je l' ai montré dans ma dissertation sur la notion & la divisibilité de l'étenduë geométrique pour servir de réponse à la lettre que M. Dupuy m'a fait l' honneur de m' addresser dans le Mercure de Paris. Les idées que je propose dans ce mémoire ne sont qu'une suite des principes que j' ai établi dans cet écrit, & forment un seul corps.

Cette idée de la formation de la suite naturelle, idée claire, & simple, parfaitement conforme à la notion qu'en donnent tous les Géométres, semble prouver invinciblement que la suite naturelle ne peut jamais parvenir à l' infini absolu.

Cette suite commence évidemment par des termes finis 1. 2. 3. &c. donc si elle peut parvenir à l' infini absolu, il faut qu' en un point, ou terme quelconque de cette suite, on passe du fini à l'infini; car s'il n'y avoit aucun terme possible où la suite passat du fini à l' infini, il est évident qu' elle demeureroit toujours finie.

Or je dis que ce passage est impossible. 1. Si en augmentant les nombres finis, on pouvoit parvenir à un nombre infini, il faudroit que par cette augmentation successive les nombres finis s'approchassent de plus en plus de l'infini. Car il est évident qu' une quantité ne peut atteindre un terme quelconque, si elle n' approche peu à peu de ce terme. Or selon la remarque de M. l' Abbé de la Caille à quelque grand nombre qu'on conçoive élévé un terme de la suite naturelle, on ne voit pas que l' on soit plus près de la fin. Donc quelque augmentation que l'on suppose dans les termes finis, par lesquels commence la suite naturelle, on ne sera pas plus avancé vers le point du passage du fini à l'infini, qu'on ne l'étoit au commencement même de la suite. Donc la suite est toujours également éloignée de ce point, Donc il est impossible qu'elle y arrive jamais.

2.

2. Reprenons le même raisonnement. Comme la suite naturelle commence par des termes finis, si elle peut arriver à l'infini absolu, il faut de toute nécessité que des nombres finis on passe enfin à un nombre infini, c'est à dire que dans cette suite il y ait un terme quelconque fini, lequel soit suivi d'un nombre infini. Qu'on nomme x ce nombre fini quelconque: par la propriété de la suite naturelle le nombre suivant sera $x + 1$ or x étant fini & $x + 1$ ayant avec ce nombre un rapport fini, ne sera point encore infini, comme on le suppose. Et comme il n'est aucun terme fini possible dans la suite naturelle, auquel ce raisonnement ne puisse être appliqué, il n'y a donc aucun terme fini possible, qui ne soit suivi d'un autre terme fini $x + 1$. Il est donc impossible qu'il s'y trouve aucun terme infini. Donc la suite naturelle ne peut jamais passer du fini à l'infini absolu. Ce raisonnement ne diffère pas pour le fond de quelques autres que j'ai déja proposé; mais dans la matiére dont il s'agit, il n'est peut-être pas inutile de présenter les mêmes idées sous différentes faces.

3. De la il suit que certaines formules concernant les loix de la progression qui sont très-justes dans les nombres finis, semblent manquer de l'exactitude nécessaire, lorsqu'on veut les appliquer à des nombres absolument infinis.

On lit dans des éléments d'ailleurs très-estimés ces propositions avec leurs démonstrations.

La somme des unités prise une infinité de fois est un infini du premier ordre, où est $= \infty$.

Dem. l'unité prise une infinité de fois est une quantité finie qui a reçeu tous ses accroissements finis possibles. Donc &c.

La somme des termes de la progression infinie des nombres naturels $1. 2. 3. 4. \ldots \infty$ *est un infini du second ordre, & est* $= \frac{\infty^2}{2}$.

Dem.

Dem. cette progreſſion étant infinie, ſon dernier terme eſt ∞ *, le nombre des termes qui précédent le dernier eſt* ∞ — 1. *Si l'on appelle S la ſomme des termes, celle des termes qui précédent le dernier, ſera par conſequent* = *S* — ∞ *&c.*

Arrêtons nous ici, & examinons l'application que l'on fait des loix de la progreſſion à des ſuites ſuppoſées abſolument infinies. D'abord on y reconnoit formellement *un dernier terme* qui eſt = ∞; par conſéquent tous les termes qui le précédent ne peuvent être que des nombres finis; car avant que d'arriver à ce dernier terme la ſuite n'a pas encore reçeu tous ſes accroiſſements finis poſſibles. Elle eſt donc encore dans le genre des quantités finies, & ce n'eſt qu'au moment où elle reçoit tous ſes accroiſſements finis poſſibles qu'elle devient infinie. On établit en ſuite que le nombre des termes qui précédent le dernier eſt ∞ — 1.

Cette maniére d'exprimer les termes d'une ſuite eſt très-juſte, pendant qu'il ne s'agit que de nombres finis. Il eſt clair que ſi l'on fait une progreſſion qui ait un dernier terme = 10, le nombre des termes qui précédent, ſera 10 — 1 = 9 mais cette formule ne peut avoir lieu dans une progreſſion abſolument infinie.

On a vu par l'énoncé même des propoſitions qu'on vient de rapporter, que cette progreſſion a un dernier terme infini, & que le nombre des termes qui précédent le dernier n'aïant pas encore reçeu tous les accroiſſements finis poſſibles, ne peut être infini. Je dis donc que dans cette hipotéſe, on ne peut exprimer le nombre des termes qui précédent le dernier par la formule ∞ — 1. Car ou cette formule exprime un nombre infini, ou elle n'exprime qu'un nombre fini. Si elle exprime un nombre abſolument infini, donc elle n'eſt pas applicable à un nombre de termes qui n'eſt que fini. Si elle n'exprime qu'un nombre fini, donc un nombre infini devient fini par

la

la ſouſtraction d'une ſeule unité, & réciproquement un nombre fini devient infini par l'addition d'une ſeule unité, ce qui répugne.

Dans la progreſſion finie dont le dernier terme eſt 10, la formule 10 — 1 exprime réellement le nombre des termes qui précédent 10, parceque 10 — 1 n'eſt pas 10, mais qu'il devient 10 par l'addition de l'unité. Donc pour conſerver l'analogie, ſi la formule ∞ — 1 doit exprimer le nombre des termes qui précédent ∞, il faut que ∞ — 1 ne ſoit pas ∞, comme 10 — 1 n'eſt pas 10, & que cette quantité ∞ — 1 qui n'eſt pas infinie devienne ∞ par la ſeule addition de l'unité comme 10 — 1 devient 10 par l'addition de l'unité. Mais c'eſt ce qui répugne. Donc &c.

M. l'Abbé Deidié dit qu'on peut évaluer les progreſſions infinies qui vont en augmentant de la même façon que les décroiſſantes, & qu'alors on trouve des valeurs infinies dont la connoiſſance n'eſt qu'une belle ſpeculation. Mais il ne dévoile pas le defaut des ſuppoſitions qui en rendroient les réſultats contradictoires, ni de quelle maniére on doit corriger ces ſuppoſitions.

Il ne ſuit pas delà cependant qu'on doive rejetter les calculs par leſquels on parvient à déterminer les rapports finis qu'ont entr'elles les ſommes infinies des ſuites infinies. Tel eſt le calcul par lequel on trouve que *la ſomme d'une infinité de quarrés de termes conſécutifs eſt le $\frac{1}{3}$ du produit du dernier quarré multiplié par leur nombre: que la ſomme d'une infinité de cubes conſécutifs eſt le $\frac{1}{4}$ du produit du dernier cube par leur nombre &c.* Ces calculs ont leur uſage, & il ſuffit d'en dévéloper la Théorie avec netteté pour s'appercevoir qu'ils ne ſuppoſent rien qui ne ſoit conforme aux idées les plus claires, & les plus ſimples que nous avons de la grandeur.

Tout nombre peut être la racine de quelque puiſſance que ce ſoit. 2 eſt racine quarrée de 4 & il eſt auſſi racine cubique de 8. Cent eſt racine quarrée de dix mille, & il eſt racine cubique d'un million. Plus la racine eſt grande, plus auſſi la puiſſance ſupérieure eſt grande par rapport à l'inférieure; ainſi le quarrée de 2. eſt la $\frac{1}{2}$ du cube 8, au lieu que dix mille, quarré de cent n'eſt que la $\frac{1}{100}$ partie d'un million qui en eſt le cube. Qu'on augmente la racine, on parviendra à un nombre tel, que ſon quarré ne ſera que la cent millioniême de la cent millioniême partie de ſon cube. Et comme cette progreſſion n'a aucune borne, la fraction qui exprimera le rapport du quarré au cube pourra toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée quelque petite qu'elle ſoit.

La formule pour ſommer tant de quarrés des termes conſecutifs qu'on voudra eſt celle-ci $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$ où a ſignifie le premier, & ω un dernier terme. Or a, & ω étant de termes déterminés la formule eſt d'une exactitude rigoureuſe. Quand on fait la ſuite infinie, on ſubſtitue ∞ ſigne de l'infini à la place du dernier terme exprimé par ω, & l'on a $\int^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{2}\infty$ &c. & alors la formule ſe réduit à $\int = \frac{1}{3}\infty^3$ à cauſe que tous les autres termes ſont conſidérés comme infiniment petits à l'égard de $\frac{1}{3}\infty^3$.

D'abord il eſt clair que la formule ainſi réduite n'eſt pas d'une exactitude tout a fait rigoureuſe puiſqu'on néglige des termes poſitifs portés par le calcul. Il eſt vrai que ces termes peuvent être conſidérés comme infiniment petits à l'égard du premier, mais il ne ſont pas abſolu-

ment nuls, ce ſont des quantités réelles & poſitives & non zéro abſolu.

Cela ſuppoſé pour conſerver à ces formules toute l'exactitude dont elles ſont ſuſceptibles, il n'eſt point néceſſaire d'admettre des cubes, ou des quarrés abſolument infinis repréſentés par ∞^3 ∞^2. Car enfin entend-on ce que l'on dit, quand on nomme un dernier cube, un dernier quarré, & qu'on nomme infini ce dernier cube, ce dernier quarré, comme s'il pouvoit y avoir un dernier terme dans une progreſſion, qui ne peut avoir de fin?

Il faut donc exprimer par ce ſigne ∞ non une quantité abſolument infinie, mais une quantité indéterminée, conçue comme ſurpaſſant en grandeur quelque quantité finie donnée que ce ſoit, quelque grande qu'on l'imagine. Puis que la progreſſion des nombres naturels n'a certainement point de fin, il eſt viſible qu'après avoir aſſigné un terme fini quelque grand qu'il ſoit, on pourra toujours trouver un terme plus grand à l'infini, il y a donc des quantités indéterminées conçues comme plus grandes que quelque quantité finie qu'on puiſſe déterminer. Maintenant qu'on exprime cette ſorte de quantités par ∞, qu'on en faſſe le quarré ∞^2, & le cube ∞^3, cette expreſſion fera connoître que quelque petite que ſoit une fraction qui exprime le rapport d'un quarré à un cube, on pourra toujours trouver entre ces quarrés & ces cubes indéterminés un rapport exprimable par une fraction toujours plus petite à l'infini.

On voit par cette raiſon pourquoi on peut, & j'oſe même dire qu'il faut retrancher de la formule les termes qui ſuivent le premier. Si ∞^3 & ∞^2 ſignifioient un dernier cube, & un dernier quarré au delà deſquels il ne pût plus y avoir ni de cubes, ni de quarrés, la fraction $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$ qui exprimeroit le rapport de ce dernier quarré

à ce

à ce dernier cube ne feroit plus fufceptible de diminution. On pourroit bien ainfi négliger dans la formule les termes fuivants $\frac{1}{2}\ \infty^2$ &c. parceque ce feroient des quantités infiniment petites à l'égard du premier $\frac{1}{3}\ \infty^3$, cependant ces termes n'étant pas abfolument nuls, la formule ne feroit pas rigoureufement exacte.

Mais fi ∞^3 & ∞^2 repréfentent non un dernier cube, ni un dernier quarré abfolument infinis, mais plutôt une fuite indéterminée de cubes & de quarrés, qu'on peut toujours fuppofer en vertu de leur indéfinie progreffion plus grands, qu'aucun cube, & qu'aucun quarré donnés, quelques grands qu'on les fuppofe, alors on verra clairement pourquoi dans la formule il faut retrancher les termes, qui fuivent le premier. Ces termes fubfiftants dans la formule dénotent toujours un rapport quelconque entre le quarré, & le cube, rapport exprimable par une fraction quelque petite qu'elle foit. Cette fraction fe trouveroit ainfi fixée par la formule même. Or ∞^3 & ∞^2 exprimant une fuite de cubes, & de quarrés indéterminés toujours fufceptibles d'une nouvelle augmentation au delà de quelque terme qu'on puiffe imaginer, la fraction qui exprime leur rapport ne peut jamais être fixée, mais quelque petite qu'on la fuppofe, on peut toujours la prendre moindre à l'infini. Or on ne peut mieux exprimer le cours de cette diminution poffible au delà de tout terme donné, qu'en retranchant les termes, qui en borneroient le décroiffement fucceffif, & c'eft ce que l'on fait en quelque forte en retranchant de la formule ci deffus les termes qui fuivent le premier.

Ainfi l'équation de la formule réduite $f^2 = \frac{1}{3}\ \infty^3$ ne doit pas être regardée comme une égalité entre deux termes fixes, & permanents de part, & d'autre, tels que feroient deux termes finis, & déterminés, mais plutôt comme la fluxion de deux termes confidérés dans un cours indéfini d'au-

d'augmentation, où leur diſproportion peut toujours être trouvée moindre qu'aucune quantité donnée.

La notion de ce ſigne ∞ pris non pour l'infini abſolu conſidéré dans un état fixe, & permanent, mais pour une grandeur indéterminée ſurpaſſant tout ce que l'imagination peut embraſſer, & conçue comme pouvant s'étendre encore indéfiniment au delà, paroit très-conforme à la maniére dont les ſuites infinies ſe préſentent à notre eſprit. Tachons d'en donner une idée claire, en expoſant ce qui ſe paſſe en nous mêmes, lorſque nous nous attachons à conſidérer une progreſſion infinie: nous trouverons qu'à cet égard il en eſt à peu près des operations de l'eſprit comme de celles des ſens.

Lorſque du haut d'une colline on jette les yeux ſur une vaſte plaine dont la vüe ne peut embraſſer toute l'étendue, on n'a pas de peine à diſtinguer les premiers objets qui ſe préſentent & à en reconnoitre le nombre & la ſituation. Mais à meſure qu'ils s'éloignent, on commence à les confondre, nous les perdons de vüe, ſans pouvoir diſcerner quel eſt le dernier dans cette confuſe multiplicité, qui ſe dérobe à nos regards: nous ceſſons de voir, ſans que rien paroiſſe terminé, & ces objets qui nous fuïent, ne nous échappent qu'en nous paroiſſant s'étendre & ſe perdre à un éloignement, où notre vüe s'égare, & ſe confond.

C'eſt à peu près ce qui nous arrive quand nous entreprenons de ſuivre des yeux de l'eſprit une progreſſion infinie. Nous n'avons pas de peine à diſtinguer nettement les termes repréſentés par des ſignes, qui nous ſont familiers, & dont nous appercevons tout d'un coup la liaiſon, & les rapports. Mais auſſitôt que l'uſage de ces ſignes commence à devenir trop compliqué; nous n'appercevons plus que d'une vüe confuſe cette ſuite de termes; nous les reculons autant que nos conceptions peuvent s'étendre: &

en les considérant de ce lointain, nous les voyons se dérober à notre vûe, sans que nous puissions fixer aucun dernier terme, qui borne la suite que nous envisageons; nous n'appercevons plus qu'une multiplicité de termes qui faute de signes distincts se confondent à nos yeux, & nous sentons seulement que rien ne peut arrêter leur progression indéfinie.

C'est donc une illusion d'imaginer dans une suite infinie un dernier terme quelconque, comme un point fixe placé à un éloignement infini, dont l'esprit pourroit franchir l'intervalle par des opérations multipliées à l'infini. Ce prétendu point fixe n'est au contraire qu'un point mobile, qui recule à mesure que l'esprit avance, & qui se trouve toujours à un égal éloignement, semblable à ces points lumineux que les raïons du soleil réfléchis de dessus la glace d'un miroir vont tracer sur les objets éloignés: envain celui qui tient le miroir précipiteroit ses pas pour en approcher! Autant qu'il avance, d'autant il les recule.

Maintenant il est bien aisé de faire voir la contradiction où l'on s'engage en supposant ∞^3 & ∞^2 comme le dernier cube, & le dernier quarré de la suite naturelle poussée à l'infini. S'ils sont les derniers, on ne peut donc en supposer des plus grands, c'est à dire qu'il ne peut y avoir de plus grand cube que le cube infini représenté par ∞^3 ni de plus grand quarrés que le quarré infini représenté par ∞^2. Mais si l'on peut tirer la racine cubique du terme infini ∞^3, on peut aussi en tirer la racine quarrée, & quand même ∞^3 ne seroit pas un quarré parfait, il est évident que la racine du quarré plus approchant, doit être infiniment plus grande que $\sqrt{\infty^2}$, donc le quarré qui résultera de la racine $\sqrt{\infty^3}$ sera infiniment plus grand que ∞^2, donc entre ces deux termes, il y aura encore une infinité de quarrés, par con-

se-

ſéquent la ſuite naturelle pourra encore fournir une infinité de quarrés après ∞^2. Donc ce n'eſt pas le dernier de cette ſuite, contre la ſuppoſition.

Voici enfin une preuve que je crois démonſtrative contre la ſuppoſition de la ſuite naturelle pouſſée à l'infini abſolu. Les Auteurs expriment cette ſuppoſition en ces termes, ſavoir que la ſuite naturelle aïant pris tous ſes accroiſſements finis poſſibles devient infinie, & qu'alors ſon dernier terme eſt ∞. Je dis que cette ſuppoſition renverſe des propoſitions inconteſtables touchant les progreſſions arithmétiques, entre leſquelles eſt la ſuite naturelle des nombres. Il eſt démontré que dans une progreſſion arithmétique la ſomme des extrémes eſt égale à la ſomme des moyens. Dans la ſuppoſition que nous combattons ici la ſomme des extrémes eſt $1 + \infty$ nommant donc n un terme moyen, cette ſomme ſera égale à $n + n + 1$, ou ſi l'on veut $1 + \infty = 2\,n$. Donc $n = \frac{1 + \infty}{2} = \frac{\infty}{2}$. Ce terme moyen ſera donc infini, mais la ſuite naturelle par la ſuppoſition, n'eſt infinie que quand elle a reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles; & elle ne peut avoir reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles, quand elle n'eſt encore qu'à la moitié de ſon cours. Donc &c.

Bornons maintenant la ſuite naturelle à ce terme trouvé $\frac{\infty}{2}$. La ſomme des extrémes $1 + \frac{\infty}{2}$ ſera égale à $2\,x$ (x ſignifiant le nouveau terme moyen) & par conſéquent $x = \frac{\infty}{4}$ qui ſera encore un terme infini trouvé à la quatriéme partie du cours de la ſuite naturelle. Qu'on revienne toujours en arriére, & en remontant vers l'unité de la même façon; on trouvera une infinité de termes infinis pour former les termes décroiſſants de la ſuite naturelle

relle depuis l'infini jusqu' à l'unité: serie bien différente de celle par laquelle de l'unité on s'éléve vers l'infini. Ce ne sera même qu'aprés une infinité de termes, & qu'aprés avoir épuisé les fractions $\frac{\infty}{4}$ $\frac{\infty}{8}$ &c. toujours en se rapprochant de l'unité, qu'on parviendra à la fraction $\frac{\infty}{\infty} = 1$. C'est a dire qu'en redescendant de l'infini absolu par tous les dégrés de la suite naturelle jusqu'à l'unité, tous les termes se trouveroient infinis à l'exception de l'unité seule.

Il me paroit que cette considération suffit pour faire sentir que le fini, & l'infini dans la grandeur sont, pour ainsi dire, des quantités hétérogénes, qu'il est impossible de jamais rapprocher, en sorte que de l'une on puisse passer à l'autre.

SIXIÉME PREUVE

Tirée des progressions décroissantes à l'infini.

SOit la ligne (*fig.* 4.) $AB = 1$. Si on coupe cette ligne en deux parties égales au point C, & qu'on partage de même la moitié CB au point D, & ainsi de suite, on aura une progression géométriquement décroissante en raison sousdouble, formée par la suite des divisions, & sousdivisions de la ligne AB, progression qu'on exprime de cette sorte $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ &c.

Ainsi dire que cette progression décroissante peut aller à l'infini, ce n'est dire autre chose, si non que la division de la ligne AB en parties sous doubles peut aller à l'infini.

Mais comme une telle division ne peut jamais être actuellement effectuée en entier, la progression qui en résulte

ſulte ne peut non plus jamais parvenir à un dernier terme qui la termine. C'eſt ce que Tacquet démontre rigoureuſement dans ſes remarques ſur la XI propoſition du 6. livre d'Euclide.

Lors donc que pour évaluer la ſomme d'une progreſſion décroiſſante à l'infini, on écrit $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} \ldots . 0$; ce n'eſt pas que le vuide marqué par les points tracés entre $\frac{1}{8}$ par exemple & zéro, doive être conçu comme rempli par une ſuite actuellement infinie de termes diſtincts, qui ſe ſuccedant l'un à l'autre aboutiſſent enfin à zéro, comme au dernier de tous. Si cela étoit, il faudroit, qu'entre zéro, & le terme qui le précéderoit immédiatement il y eut le même rapport qui ſe trouve entre le conſéquent $\frac{1}{8}$ & ſon antécédent $\frac{1}{4}$. Or il eſt viſiblement abſurde de ſuppoſer un rapport ſous double entre zéro, & une quantité poſitive quelconque.

Ainſi par une progreſſion décroiſſante infinie il faut entendre une ſuite dont le cours ne peut jamais être borné, mais non une ſuite, qui après un cours actuellement infini, ſe trouve complette & compoſée d'une infinité de termes placés ſucceſſivement l'un après l'autre, & rangés par ordre depuis le premier juſqu'à zéro. Ces deux idées ſont très-différentes, & il importe extrémement de ne pas les confondre.

On pourroit objecter que le calcul qu'on emploie pour déterminer la ſomme d'une progreſſion décroiſſante infinie, ſemble ſuppoſer une ſuite de termes diſtincts, qui aillent en diminuant juſqu'à zèro. Telle eſt dans le cas préſent la formule $1 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: 1 - 0 : S$. ou zéro eſt emploïé de la même maniére que le feroit un nombre poſitif quelconque, s'il s'agiſſoit d'une progreſſion finie.

On citera même un Géométre, qui après avoir reconnu qu'une progreſſion décroiſſante ne peut avoir aucune borne, non plus que la diviſibilité de la grandeur, ſemble

pourtant réconnoître la néceſſité d'aſſigner un dernier terme à la progreſſion décroiſſante infinie, pour en évaluer la ſomme, en diſant que comme le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond; ainſi le premier terme moins le dernier, *qui eſt prèsqu' égal à zéro* eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent.

Mais la juſteſſe de ce calcul ne dépend aucunement de ces ſuppoſitions peu exactes. Les Géométres qui ont ſuivi la méthode rigoureuſe des anciens, en ont établi les principes d'une maniére auſſi ſolide que lumineuſe ſans recourir à un langage qui a toujours beſoin d'être ramené à la preciſion. C'eſt ce qu'a fait Tacquet Arith. l. 5. c. 4.

Qu'on me permette de propoſer en peu de mots quelques idées relatives à ce ſujet. Quoique la ligne *A B* puiſſe être diviſée à l'infini par une ſuite de diviſions en parties ſousdoubles, il eſt clair cependant que cette ſuite de diviſions a une limite qu'elle ne peut paſſer, & cette limite eſt l'extrémité même de la ligne *A B*. Ce point *B* ſera donc auſſi la limite de la progreſſion qui réſulte de cette ſuite de diviſions.

D'où il ſuit que quand on ſuppoſeroit, que la ligne *A B* eut pû recevoir toutes ſes diviſions poſſibles, cependant l'aſſemblage de cette infinité de parties ne pourroit former que cette même ligne *A B*; & les termes de la progreſſion n'étant autres que ces mêmes parties qui réſultent de la diviſion de la ligne *A B*, il s'en ſuit que la ſomme de tous ces termes, quand on les ſuppoſeroit entiérement dévélopés, ne pourroient non plus former que cette même ligne *A B*.

L'évaluation d'une progreſſion décroiſſante infinie, conſiſte à trouver l'eſpace, ou le chemin qu'elle devroit parcourir pour atteindre à la limite où elle tend, & où elle arriveroit, ſi ſon cours pouvoit jamais être terminé; ou ce qui revient au même à trouver la quantité finie,

qui par une ſuite de diviſions, & de ſousdiviſions en une raiſon donnée fournit & détermine à l'infini les termes de cette progreſſion.

Or pour trouver cette quantité par le calcul, il n'eſt point du tout néceſſaire de ſuppoſer que la progreſſion ait pris actuellement tous les termes dont elle eſt ſuſceptible: il ſuffit de connoître le rapport des deux premiers termes, rapport qui devant regner dans toute la progreſſion, fait connoître la limite, où la ſuite de ſes termes devroit aboutir, quand on pourroit la déveloper entiérement.

Dans une progreſſion finie comme le premier terme, moins le ſecond eſt au ſecond, ainſi le premier moins le dernier eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent. Dans une progreſſion infinie il n'y a point réellement de dernier terme. On dira donc, comme le premier terme moins le ſecond eſt au ſecond, ainſi le premier eſt à la ſuite de tous ceux qui le ſuivent: c'eſt à dire dans l'exemple précédent comme $AB - CB : CB :: AB$, à la ſomme de tous les termes qui le ſuivent. AB repréſente toute la ſuite des antécédents, parceque quand on ſuppoſeroit cette ſuite entiérement dévelopée, elle ne pourroit s'étendre au delà du point B qui lui ſert de limite, & tous ſes termes ne pourroient former que cette même ligne AB dont l'étendüe eſt donnée. Or AB conſidéré comme premier terme de la ſuite, doit avoir à la ſomme de tous ceux qui le ſuivent le même rapport qu'il y a entre $AB - CB$ & CB. Ce rapport eſt connu, le premier terme eſt donné; la quantité qui réſulteroit de cette ſuite infinie de conſéquents ſera donc connue, ſans qu'il faille ſuppoſer qu'elle ait jamais pû recevoir tous ſes termes poſſibles.

La poſition d'un dernier terme quelconque quoique ſuppoſé *prèsqu' égal à zéro*, nuiroit à la juſteſſe du calcul. Soit xB (*fig* 5.) ce dernier terme. Donc $AB - xB = Ax$

re-

représentera toute la suite des termes suivants. Donc elle seroit bornée au point x; ce qui est contre la nature de cette progression qui doit passer le point x, & tendre à l'infini vers la limite B.

Tachons d'éclaircir les difficultés qui peuvent rester par l'application de cette Théorie à quelque exemple connu, telle qu'est la solution du fameux probléme de Zénon: Supposons, disoit Zénon, qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortüe; si la tortüe à une lieüe d'avance, jamais Achille ne pourra l'atteindre: car tandis qu'Achille parcourra cette lieüe, la tortüe fera la dixiéme de la seconde lieüe, & tandis qu'Achille fera la dixiéme de la seconde lieüe, la tortüe fera la dixiéme de cette dixiéme; & ainsi à l'infini.

Il y a deux maniéres de resoudre cette difficulté, l'une en tirant du rapport des vitesses des deux mobiles une équation, qui fasse connoître le terme où Achille doit atteindre la tortüe. Fesant donc une lieüe $= 1$ & nommant x le chemin que la tortüe aura parcouru lorsqu'Achille la rencontrera, on aura $1 + x$ pour exprimer le chemin de la tortüe, & comme Achille va dix fois plus vite, $10x$ exprimera le chemin parcouru en même tems par Achille, & par conséquent $10x = 1 + x$, & en réduisant $x = \frac{1}{9}$ de lieüe; ce qui fait connoître qu'au bout d'une neuviéme de lieüe, Achille atteindra la tortüe. Ce point sera par conséquent la limite, où la distance des deux mobiles allant avec les vitesses données doit s'évanoüir, & où l'un doit par conséquent atteindre l'autre.

La seconde maniére consiste à déterminer la somme de la progression décroissante infinie $1 \frac{1}{10} . \frac{1}{100}$, pour voir le chemin que feroit la tortüe en supposant qu'elle parcourut l'une après l'autre toutes ces dixiémes de dixiéme à l'infini, & qu'elle seroit par conséquent la limite de l'espace, que toutes ces dixiemes devroient former par leur

reunion

réunion, en ſuppoſant que cet eſpace pût être diviſé par les pas de la tortüe en une infinité de parties ſous décuples. On fait donc cette proportion : comme le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond ; ainſi le premier terme moins le dernier eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent. Mais une progreſſion infinie ne devant point avoir de dernier terme, & ſa diſtance de la limite où elle tend pouvant diminuer au delà de quelque quantité que ce ſoit, quelque petite qu'on la ſuppoſe, on dira $1 - \frac{1}{10} : \frac{1}{10} :: 1 - 0$, ou ſimplement $1 : f$. d'où l'on tire $9 : 1 :: 1 . \frac{1}{9}$. Ce qui redonne préciſement l'eſpace x trouvé par la premiere méthode. Cette formule nous apprend que comme une lieüe, moins un dixiéme de lieüe, eſt à un dixiéme de lieüe, ainſi une lieüe eſt à une portion de lieüe, telle qu'on pourroit la diviſer à l'infini par une ſuite de diviſions, & de diviſions en parties ſous décuples ; en ſorte que quand on pourroit dévéloper actuellement toutes ſes parties, & les réunir de nouveau, elles ne formeroient que cette même portion d'eſpace ou cette neuviéme de lieüe.

L'artifice conſiſte donc moins à trouver la ſomme d'une progreſſion par l'addition d'une infinité de termes, qu'à trouver d'un ſeul coup par des rapports connus la quantité finie qui eſt ſuſceptible d'une telle progreſſion.

C'eſt de quoi l'on ſe convaincra de plus en plus en liſant les judicieuſes réflexions, que l'Abbé Deidié ajoute à la ſolution du probléme de Zénon. „ L'argument de „ Zénon, dit-il, ne pouvoit conclure, qu'en ſuppoſant de „ deux choſes l'une, ou qu'Achille devoit emploïer une „ infinité de pas pour faire la premiere lieüe auquel cas „ il ne ſeroit jamais venu à bout de la faire ; ou que les „ pas qu'il faiſoit en parcourant le $\frac{1}{10}$ du dixiéme, de„ venoient encore dix fois plus petits, & ainſi de ſuite, „ auquel cas il eſt ſur qu'il n'auroit jamais pû attein-

„ dre

„ dre la tortüe ...... mais comme l'une & l'autre de „ ces ſuppoſitions ſont auſſi ridicules qu'impoſſibles, n'y „ aïant point d'homme qui ſoit obligé de faire une infi- „ nité de pas pour faire une lieüe, ni dont les pas puiſ- „ ſent devenir de dix fois en dix fois plus petits à l'in- „ fini, il s'en ſuit que le raiſonnement de Zénon n'eſt „ qu'un ſophiſme &c. Mais me dirat-on peut-être, vous „ ſuppoſés que la tortüe puiſſe faire $\frac{1}{9}$ de lieüe, ce qui „ n'eſt pas poſſible, puiſque pour faire ce $\frac{1}{9}$ il faut par- „ courir une progreſſion infinie $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ &c., autre ſophiſme „ auſſi puerile que le premier. Si les pas de la tortüe al- „ loient en diminuant à chaque $\frac{1}{10}$ de la même façon que „ ces $\frac{1}{10}$, à la bonne heure, mais comme cette ſuppoſi- „ tion eſt chimérique, il eſt tout auſſi facile &c.

Ainſi tant s'en faut que la détermination de la ſomme d'une progreſſion décroiſſante infinie, ou ce qui revient au même de l'eſpace que cette progreſſion devroit par- courir en la continuant à l'infini, tant s'en faut, dis-je, que cette détermination dépende du dévéloppement actuel de tous les termes dont elle eſt ſuſceptible, qu'au con- traire on n'y arriveroit jamais, s'il falloit y parvenir par la voye de ce dévélopement.

La Théorie des progreſſions n'eſt donc fondée que ſur des principes inconteſtablement vrais, que toute grandeur eſt diviſible à l'infini par une ſuite quelconque de divi- ſions, & de ſouſdiviſions en parties ſous multiples, que cette ſuite, & la progreſſion qui en réſulte pouvant con- tinuer à l'infini, ne peut être bornée par aucun dernier terme, que dans ſon cours indéfini elle avance continuel- lement vers la limite où elle tend, ſans pouvoir s'eten- dre au delà, qu'en ſuppoſant enfin par une ſorte de fiction, que tous les termes dont la progreſſion eſt ſu- ſceptible, fuſſent actuellement dévélopés, l'aſſemblage de tous ces termes ne formeroit que la quantité même

qu'ils

qu'ils ont divisée, & qui les a produit par la division de ses parties. Mais cette Théorie ne suppose rien qui prouve la nécessité d'admettre la possibilité du dévélopement actuel d'une infinité de termes successifs, ou coexistants placés entre le premier terme de la progression & zéro; en sorte que la suite soit composée d'un nombre de termes actuellement infini.

DERNIERE PREUVE

Tirée des méthodes d'approximation.

J'Ose même dire qu'un probléme dont la solution dépendroit de ce dévélopement actuel, ou de la position d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier terme, & par conséquent infiniment petit, deviendroit par cela même impossible. La méthode des approximations à l'infini de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré parfait, en fournit un exemple frappant, & sera une nouvelle preuve de l'impossibilité d'une suite composée d'un nombre de termes actuellement infini.

Il est démontré, que si un nombre n'est pas un quarré parfait, on ne sauroit en tirer la racine exacte en nombres entiers ou rompus. Il est encore démontré que par une suite infinie de fractions, comme $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{1000}$ &c. emploïées suivant des méthodes connües, on peut approcher à l'infini de la racine cherchée, de sorte qu'en continuant l'operation, l'on trouvera toujours une valeur si approchante de la racine exacte, que la différence soit moindre qu'aucune quantité donnée, quelque petite qu'elle soit.

Cela ſuppoſé ſi cette ſuite de fractions pouvoit arriver à l'infini abſolu, c'eſt à dire à un terme infiniment éloigné du premier, & dont le dénominateur fut infiniment grand, la différence entre la valeur trouvée par cette approximation infinie, & celle de la racine cherchée deviendroit infiniment petite, & s'évanouiroit enfin. Donc l'on pourroit parvenir à la valeur exacte de la racine cherchée. Or les Géométres démontrent que cette valeur exacte eſt réellement impoſſible, il s'en ſuit que toute ſuppoſition au moyen de laquelle on y arriveroit, doit être cenſée impoſſible. Mais la ſuppoſition d'une ſuite de fractions pouſſée juſqu'à l'infini abſolu, donneroit cette valeur. Donc une telle ſuppoſition répugne. Et par conſéquent l'impoſſibilité abſolüe de trouver une valeur exacte de la racine en queſtion, prouve l'impoſſibilité de toute fraction dont le dénominateur ſeroit infiniment grand.

Ces réflexions me paroiſſent préſenter le dénouement d'un paradoxe apparent. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par l'évaluation d'une progreſſion décroiſſante infinie, le calcul la donne exactement. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par le moyen d'une approximation infinie, le calcul ne la peut donner avec exactitude. C'eſt que dans le premier cas, le calcul ne ſuppoſe point que la progreſſion puiſſe jamais recevoir tous les termes dont elle eſt ſuſceptible. Une grandeur donnée eſt le premier terme de cette progreſſion. Cette grandeur eſt diviſible à l'infini par une ſuite de diviſions & de ſouſdiviſions en une raiſon quelconque donnée; & les parties qui naiſſent de ces diviſions ſont les termes de la progreſſion. Cette même grandeur repréſente ainſi tous les antécédents qu'elle pourroit faire éclorre par une ſuite infinie de diviſions. Mais il n'eſt aucunement néceſſaire de s'embaraſſer dans toute la ſuite de cette

pro-

progreſſion. La grandeur donnée qui repréſente la ſomme de tous les antécédents, fait connoître auſſitôt une autre grandeur déterminée qui par une ſuite de diviſions dans la même raiſon feroit éclorre une ſuite proportionelle de termes conſéquents. Le rapport qui regne dans la progreſſion fait ainſi connoître la grandeur qui repréſente tous les conſéquents par la grandeur qui repréſente tous les antecedents.

Mais la détermination de la valeur exacte d'une racine cherchée par voye d'approximation ſuppoſeroit que le cours de la progreſſion fut épuiſé, & dépendroit de la poſition actuelle d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier. Or puiſque la progreſſion pouvant aller à l'infini ſans aucune borne qui la limite, on pourra toujours avancer de plus en plus vers le terme cherché; mais comme elle ne peut jamais être entiérement épuiſée, l'approximation à l'infini ne peut non plus en donner la valeur exacte. On voit ainſi que les réſultats du calcul ſont parfaitement conformes à la nature des choſes.

Il ne feroit peutêtre pas impoſſible de faire l'application de ce principe à la rectification des courbes. Dans la rectification de la Cicloïde, par exemple, l'intégrale qui exprime la valeur de l'arc, préſente un rapport déterminé à la corde correſpondante du cercle générateur; rapport qui fait connoître que la demi cicloïde eſt double du diamêtre. Dans d'autres courbes où l'expreſſion de l'integrale donne un quantité dont la valeur exacte n'eſt pas d'abord déterminée par un rapport fini à une quantité finie, mais qu'on ne peut trouver que par le moyen des ſuites infinies, la rectification devient impoſſible. La détermination exacte d'un arc de courbe ne dépend donc point de la ſomme d'une infinité de differences ajoutées l'une à l'autre. La differentielle de l'arc de la courbe conſiderée comme côté d'un triangle infiniment

pe-

petit, ſert à faire connoître en vertu de la reſſemblance de ce petit triangle à un triangle donné, le rapport de poſition qui ſe trouve en quelque point que ce ſoit, entre la courbe, & une ligne donnée. De là le calcul intégral tire une valeur de l'arc exprimée par les mêmes ſignes qui expriment les autres variables. Si l'expreſſion de cette valeur eſt telle qu'elle renferme un rapport fini à une de ces variables, on a par le moyen de ce rapport la rectification exacte de la courbe. Mais lorſque la détermination de la valeur dépend du dévélopement d'une ſuite infinie, & qu'on ne peut l'avoir qu'en ſuppoſant cette ſuite parvenüe à un dernier terme; elle devient impoſſible, & prouve par cela même que dans une ſuite quelconque le dévélopement actuel ne peut jamais s'étendre autant que le dévélopement poſſible, que ce qui reſte à parcourir va toujours indéfiniment au delà de ce qui a pû étre actuellement parcouru; & qu'ainſi une ſuite infinie en puiſſance ne peut jamais recevoir ſon entier complément, ni parvenir par conſéquent à l'infini abſolu.

On n'éluderoit point la force des preuves que je viens d'expoſer en refuſant le nom de nombre à un aſſemblage abſolument infini d'unités. Quelque nom qu'on veuille lui donner, il eſt clair que dans cet aſſemblage l'eſprit pourra toujours fixer à volonté un premier terme quelconque, & paſſer ſans interruption de l'un à l'autre en ſuivant la progreſſion naturelle, ſans que rien puiſſe la borner. Donc s'il exiſte un aſſemblage de termes abſolument infini, il faudra toujours reconnoître qu'il y a un point dans cet aſſemblage où du fini l'on paſſe à l'infini. Donc ſi un tel paſſage implique contradiction, comme on a tâché de le faire voir, il faut conclure que tout aſſemblage composé d'une infinité abſolüe de termes eſt réellement impoſſible, quelque nom qu'on lui donne

ou

qu' on lui refuſe. Donc toute hipotéſe qui tendroit à établir une multiplicité actuellement infinie de termes, ou de parties diſtinctes devra être cenſée par cela même impoſſible. Principe dont les conſéquences peuvent être de de quelque uſage dans la Philoſophie.

Je dois enfin avertir que l'impoſſibilité de l'infini actuel dans la grandeur, ou dans la quantité ſoit diſcrete, ſoit continüe, n' exclût aucunement l' idée de l' infini abſolu, en tant qu' attribut de l' être ſans reſtriction. Les Ecrivains les plus exacts ont toujours eu ſoin de diſtinguer l' infini métaphyſique de l' infini mathématique. M. de Fontenelle lui même reconnoît que l'infini métaphiſique, dont il dit que nous avons naturellement l' idée, ne peut s'appliquer ni aux nombres, ni à l' étendue. C' eſt de l' idée même de cet infini conſidéré de la maniére la plus abſtraite que dérive en quelque ſorte la puiſſance que nous avons d'augmenter par la penſée la grandeur à l'infini, en ajoutant unité à unité; de ſorte qu' il eſt toujours vrai de dire que l' infini en puiſſance ſuppoſe l' infini en acte, ainſi que je l' ay dit ailleurs. Mais ce ſeroit ſortir des bornes de ce mémoire, que d' entrer dans des diſcuſſions purement métaphyſiques.

ALGEBRÆ PHILOSOPHICÆ
IN USUM ARTIS INVENIENDI
SPECIMEN PRIMUM
LUDOVICI RICHERI.

TABULA CHARACTERISTICÆ
Technico-Philoſophice interpretata.

$\subset\!\supset$ IMpoſſibile, contradictorium, impoſſibilitas, contradictio.

$\cup\!\!\cup$ Poſſibile, poſſibilitas, mera non contradictio

$\cup$ Aliquid, res, realitas late dicta.

$\cap$ Nihil, negativum, merum, negatio ſtricte dicta

S { C	affirmative, poſitive		poſitiva
	Determinatum	Determinatio	
Ↄ	negative		negativa

CↃ Indeterminatum

CↃ { ĊↃ	poſitive		poſitiva
	Determinabile	Determinabilitas	
CↃ̣	negative		negativa

C̦Ↄ Indeterminabile

C·Ↄ { C·Ↄ	poſitive	
	Neceſſarium	Neceſſitas
C·Ↄ	negative	

C· Ↄ Contingens Contingentia

Ṡ { Ṡ·	poſitive		poſitiva
	Mutabile	Mutabilitas	
·Ṡ	negative		negativa

S̤ Immutabile Immutabilitas

§. I.

§. I.

    &   ◠ *Impossibile*, *contradictorium*, *repugnans*
a non *a*
vel   ◡ *Possibile*, *esse potest*, *non implicat*

Impossibilitas, *contradictio*, *repugnantia*
In abstracto   Idem in aliis
Possibilitas, *mere non contradictio*

&   & ◠
Quod spectatur, ut esse, non esse — Quod est non est
vel   vel ◡

§. I I.

Non   ◠ ◠ observatione
dari   &   constat.
Tantum   ◡ ◡ experientia
◠   ◡
Hinc   esse non potest
◡   ◠

§. I I I.

◠ nec   nec   ◠ *Nihilum*, *negativum*, *merum*,
Hinc   est,   non est   (1)   confer §. 4. seq.
◡ vel   vel   ◡ *Aliquid*, *res*, *realitas*,

&   nihil, impossibile
Quod est   non est,   est.
vel   aliquid, possibile

Nihil

(1) Cl. Rudolph. Goglen Lexic-philosoph. hic.

Nihil & Non ∩ ·
est , non est . datur . ex §. 2.
Quodlibet vel Tantum ∪ *

§. I V.

non S *determinatum*, *determinatio*
a non *a* vel viceversa (2)
vel C Ɔ *indeterminatum*, *non determinatum*

a , C *affirmative* , *positive*
S ad *Determinatum*
Non *a* , Ɔ *negative*, *negatio late*

§. V.

∪ S & C
Hinc ∪ qua est argum. §. 2
C,Ɔ CƆ 3

§. V I.

C, C est , est
Hinc Quod §. 2. Quod
Ɔ ,Ɔ non est , non est.
g §. VI.

---

(2) Cl. Bulsing. in dilucid. Wolf. §. 82. Waller Nic. hic.

* In arte hac philosophandi naturali, simplicissimaque via universalissima & inconcussa scientiarum humanarum fundamenta ex quotidianis, & lucidis observationibus, & experientiis deducta, & nunquam satis expensa ad minima, & irresolubilia elementa reducuntur, & in populares velut, communesque notiores scientificæ cognitionis primitivas, & directrices resolvuntur mira determinationis, & connexionis simplicitate, & fæcunditate illustres. Confer. Christ. Wolf. in Hor. subsec. Marburg De notionibus directricibus, & genuino usu Philosophiæ; ethices §. 296 & passim Leibnit. præcipue de Philosoph. prim. emend. in actis lipsi Nicol. Concin. in orat. de Metaphis. Frobes dissertat. cl. Jacquier &c.

§. VII.

S
CↃ CↃ, ĊↃ *Determinabile*, ĊↃ
(3)
S, signa vicaria ex CↃ
S
CↃ CↃ, C̣Ↄ *Indeterminabile*, C̣Ↄ

C, ĊↃ *positive*
ĊↃ ad *Determinabile* argum §. 4.
Ↄ, ĊↃ *negative*

§. VIII.

ĊↃ
Hinc CↃ licet CↃ est tamen ĊↃ vel
CↃ̇ *

§. IX.

---

(3) Carpovius de linguæ perfectione ubi de essentialibus in vicaria mutandis &c.

* In hac, utpote architectonica, velut per calculum qualitatum proprio marte inveniuntur veritates in philosophia non minus pura, quam in aliis scientiis adplicata. Elementis particularium scientiarum instructus, & arte hac inveniendi generali adjutus multa inveniet, quae ex aliorum scriptis non sine tædio, & temporis dispendio alias haurire vix posset, immo omnibus adhuc ignorata deteget. Non enim solum in mathesi, & scientiis naturalibus, sed & in cæteris etiam disciplinis novas, easque illustres veritates inveniendas superesse summis viris probatum, praesertim indefinita, confusa, incerta radicitus determinando, & connectendo. Huc spectant combinatoriae Leibnitii, algebræ philosophicæ Hookii, de dirigendo intellectu Lokii, medicina mentis Tschirnhausen, Cramer de J. Consulto Inventore cum Wolf. epist. gratulat. Wolf. ethic. §. 360.

§. IX.

non C·Ɔ *necessarium*, *necessitas* non
ĊƆ, CƆ̇ vel v^a (4) CƆ̇ C Ɔ
vel C·Ɔ *contingens*, *contingentia* vel

C·Ɔ C
C·Ɔ vel si ad ad characteristicæ combinationis præcisionem
C·Ɔ Ɔ

§. X.

C·Ɔ CƆ CƆ C·Ɔ
Hinc CƆ , C·Ɔ CƆ̇ arg. §§. 2. 8. 5. seu CƆ qua est
C·Ɔ S C,Ɔ C·Ɔ

§. XI.

CƆ̇ Ṡ *mutabile*
S ad C Ɔ vel viceversa
CƆ Ṣ *immutabile*

mutabilitas CƆ CƆ̇
Hinc ex C Ɔ. S ≥
immutabilitas CƆ CƆ̣

(4) Necessarium unico modo determinabile, unico modo possibile. Unicitas determinabilitatis rationem formalem necessitatis constituit, non vero immutabilitas secundum Scholasticos. Hinc ejus oppositum est impossibile, & aliter se habere non potest. Notiones utique veræ, non vero primitivæ definitiones. Necessitas nullam determinationem supponit, & possibilis ut indeterminati determinabilitatem determinat. Hinc necessarium est determinate determinabile: immutabilitas vero determinationem antecedentem supponit, & an ulterius determinabile sit, nec ne definit. Extra systema veri nominis facile, & circulum committere, & derivationes omittere.

Ṡ· *poſitive* Ɔ C
Ṡ vel *mutabile* ſi ab ad
·Ṡ *negative* C Ɔ

§. X I I.

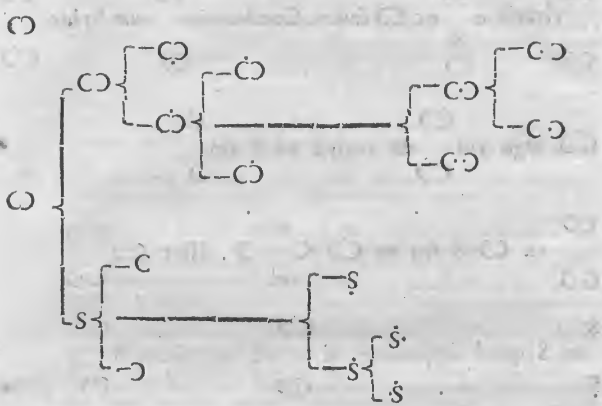
CƆ S
Hinc CƆ qua eſt ⁚ Ṡ·
C,Ɔ Ṡ & ·Ṡ· argum. §.§. ad §. 10. cit.
·Ṡ

§. X I I I.

C·Ɔ S
Hinc eſt ⁚ & viceverſa &c.
C·Ɔ S

SCIA-

* En perfectæ analyſeos exemplum, ex quo intimius ſcrutanti patebit, quomodo cujuslibet dati principii reſolutio, & reductio ſit inſtituenda ſimpliciſſima connexionis via, & quomodo methodus naturæ cum methodo mathematicorum dicta perfecte ſociari poſſit: in vera namque, naturali, & non interrupta veritatum concatenatione unum, idemque ſunt: ſubtiliori philoſophice pervidendi abſtracta in concretis minus attendentes tenuitatis, inutilitatiſque cauſſabuntur ſpeculationum praecipue illarum, quae neque proxime in naturalibus, neque in civilibus uſum ſint habituræ: tantum tamen abeſt, ut naturam, ſubtilitate ſpeculationum, maxime etiam ſublimium artificiorum magiſtri ſuperent, ut in quamplurimis ne adſequantur quidem. Infiniti caſus ſunt, in quibus nondum eo progreſſi ſumus meditando, quo natu a praeivit, & uſus ſequitur etiam civilis. Liceat ergo haec ſaltem ſpei, & voluptatis gratia adjungere.



CↃ
ↄC ex ſubſequentium C Ↄ unione primitiva, velut eſſentialia

∪, & ∩ generaliter abſtrahendo, & veluti vicaria τῶ ↄC, & CↃ

S, & CↃ ex reſolutione τῶ ↄC, analogice.

ↄC, ergo vel CↃ S, S vero vel C Ↄ reſolvitur ſimplici combinatione

S
C'Ↄ　　CↃ　　CↃ　　ĊↃ
vicaria τὸ　ex CↃ ſumta. Combinatio　cum S; hinc
S
C.Ↄ　　CↃ　　CↃ　　CↃ

ĊↃ　　　C
C'Ↄ ergo vel　ex analyſi ad S vel
C.Ↄ　　　Ↄ

C·Ↄ　　　non　　C·Ↄ
ex CↃ S ſeu ex C'Ↄ C　Ↄ. Hinc C·Ↄ
C·Ↄ　　　vel　　C·Ↄ

Ṡ　　　C'Ↄ　　CↃ
ex S quod ſupponitur, ſi　ad oppoſitum S　Ↄ/C
Ṣ　　　C.Ↄ　　CↃ

Ṡ·　C
Ṡ; quare vel　, ſi Ṡ
·Ṡ　Ↄ

En ergo CↃ, CↃ; CↃ vel CↃ, vel S; S vero vel C, vel Ↄ

Combinando CↃ cum S enaſcitur C'Ↄ & vel ĊↃ, vel C.Ↄ

Determinando C'Ↄ CↃ oritur C·Ↄ, dein C·Ↄ

Determinatum vero ſi ad oppoſitum C'Ↄ, Ṡ;

Ṡ·　C
ſi non S; Ṡ vel　ex　Ṡ
·Ṡ　Ↄ

Huc

Huc apprime faciunt, quæ ad §. 51.Ontol. latinæ annotavit Philoſophus ſummus Chriſt. Wolffius. Conqueſtus eſt Leibnitius de tenebris philoſophiæ primæ, conqueruntur de iiſdem vulgo tantum non omnes; & Leibnitius quidem jam monuit in Philoſophia prima (utpote architectonica) magis luce, ac certitudine opus eſſe, quam in Mathematicis; atque ideo *ſingularem quandam proponendi rationem* neceſſariam judicavit, cujus ope non minus, quam euclidea methodo ad *calculi inſtar* quæſtiones reſolvantur . . . . Sed ſingularis illa proponendi ratio nodus eſt, quem nemo Philoſophorum hactenus ſolvit, nec quomodo ſolvi debeat Leibnitius innuit, nedum docuit. Nulli tamen dubitamus quod beneficio ſupradictæ analyſeos, & reductionis combinatoriæ nodum iſtum ſimpliciſſima, & univerſaliſſima ratione ſolverimus.

De arte combinandi veterum multi multa dixerunt, & eas explicare, ampliare, ſupplere tentarunt. Ingenioſi utique multum habent in ſuis circulis, ciſtulis, lampadibus combinatoriis, & in variis combinationum artificiis; aſt determinationem, & derivationem merito deſideres tum in notionibus, tum in ſignis; hinc eorum characteriſtica notionibus confuſis, & minus determinatis ſuperſtructa, & ſignis non eſſentialiter derivativis, ſed arbitrariis confecta, & tum pantoſophicis, tum pantometricis principiis ex intima notionum natura deductis ad combinationes determinandas deſtituta tanquam inutilis fuit neglecta. Defectum connexionis combinationum confuſe agnoverunt nonnulli; aſt verae combinatoriae univerſalis fundamenta ignorarunt, ideſt notionum maxime univerſalium analyſim, & reductionem ad primitiva, & ſimpliciſſima. Iʒquierdo in ſua Pharo in hanc rem notat „ quod non advertunt combinationum ex datis terminis poſſibilium multas debere rejici tanquam inutiles in ordine ad faciendam ſcientiam; utpote quorum extrema, neque connexionem inter ſe, neque oppoſitionem, neque aliud neceſſitudinis genus &c. Acutiſſimus recentiorum Leibnit. fundamentum quod tunc juvenis in ſua combinatoria (edita annis 1665., & 1668.) quam perficere non potuerat, neglexit, poſtea in actis lipſienſibus ad annum 1694. indicavit, quod jam olim pervidit Ariſtoteles categoriarum combinationem innuens: tametſi enim applauſu non vulgari eruditorum fuerit exceptus (ars combinatoria) & novas complures meditationes non pœnitendas, quibus ſemina artis inveniendi ſparguntur, contineat; atque inter cæteras palmariam illam *de analyſi cogitationum humanarum in alphabetum quaſi quoddam* (non chronologicum, ſed genealogicum) *notionum primitivarum*, judicat tamen non ſatis eſſe limatum &c. act. erudit. lipſ. ad an. 1491.; poſtea vero in iiſdem actis ad annum 1694. de philoſophiae primae emendatione agens hæc innuit; itaque *peculiaris quaedam* proponendi ratio neceſſaria eſt, & tanquam filum in labyrintho, cujus ope non minus quam euclidea methodo *ad calculi inſtar* quaeſtiones reſolvantur, ſervata nihilominus claritate, quæ nec popularibus ſermonibus quidpiam concedat.

Ex his analyſim philoſophicam inſtituenti patebit, quaenam ſit veræ algebræ philoſophicae notio, dignitas, & uſus, tanquam Kuhlmani methodica centralis, a qua cæteræ omnes pendent, & iterum in matrem ſuam ſe filiæ reſolvunt; eſt namque haec ars inveniendi quaedam univerſaliſſima tum Philoſophorum, tum Mathematicorum analyſim ſub ſe comprehendens, ut merito Ætioſophia, & Philoſophia princeps, & architectonica ſit ſalutanda. Nihil enim aliud ſunt cæteræ ſcientiæ, quam Æthioſo-

§. XIV.

Ex antecedentibus conſtat de tranſitione.

Ɔ qua CƆ / C,Ɔ eſſe S / CƆ & ĊƆ < C, ĊƆ / Ɔ, ĊƆ

ĊƆ vero < C·Ɔ / C·Ɔ Hinc Ṡ / Ṡ

Ṡ autem < Ṡ / Ṡ ſive ſit C / Ɔ

C·Ɔ / C·Ɔ & Ṡ / Ṡ eſſe velut per ſe S ex principio CƆ / CƆ, ĊƆ vero < C / Ɔ

Hinc pro veritatibus C·Ɔ quærendum aliud principium (CƆ *connexionis*) *rationis* , *convenientiæ* , *rationis ſufficientis &c.*

ſophia characteriſtica vel immediate, vel mediate adplicata, quod perſpicacioribus, & intellectu ſyſtematico præditis non eſt paradoxum, licet difficillimum; hinc tentandum mutuis auxiliis quid ferant humeri, quid ferre recuſent. Qui vero de his, ſive ex ſenſu proprio præoccupato, ſive ex turba auctoritatum ſtatuere, aut exiſtimare velit, ne id ſe in tranſitu facere poſſe ſperet, ſed ut rem pernoſcat, viam noſtram paullatim tentet, ſubtilitati rerum paullatim aſſueſcat, denique minus rectos, atque alte hærentes mentis habitus tempeſtiva, & quaſi legitima mora corrigat, & tum demum (ſi placuerit) poſtquam in poteſtate ſua eſſe cœperit judicio ſuo utatur. Hiſce fere Verulam.

Analysis enim veritatum C·Ɔ & Ṣ finitur in principio ◯
C·Ɔ Ṡ in se velut infinita

Nisi ad ens, ⊙, omnimode S, C, C·Ɔ, Ṣ ipsius principii ω alpha, & omega recurratur. *

§. X V.

℧ *Ratio* *Caussa*, unde aliquid latissime est vel intelligitur.
℧ *Rationatum* *Causatum*, quod ex aliquo **

§. X V I.

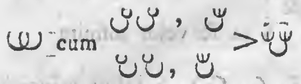
Quæ sunt inter se ut ℧, & ℧ ω *connexa*, *ordinata*
non sunt ⅏ *inconnexa*, *confusa*

h

---

* Hinc acute Leibnitius veritates C·Ɔ numeris rationalibus Mathematicorum, C·Ɔ e contra irrationalibus, surdis comparandas esse affirmabat, in quibus nisi ad simplicem primitivam unitatem recurratur, approximatione licet in respectiva unitate velut in infinitum producta, incommensurabilitas semper manet; cujuslibet enim datæ quantitatis, — sive numeri unitas simplex est mensura adæquata, non vero quælibet alia quantitas, seu numerus loco unitatis assumtus &c.

** Quomodocumque tandem sit. Notiones hæ antiquissimis, & scholasticis communes; dividebant enim caussam in genere in fiendi, essendi, & cognoscendi, & nihil ipsis erat sine ℧ analytica. Ex his derivandæ, & determinandæ innumeræ notiones principii, & principiati; primitivi, & derivativi, originis, fundamenti, adjuncti, dependentis, potentiæ activæ, & passivæ, seu facultatis, receptivitatis &c.

 *concatenatio*

TA-

Hinc ſpectant quæ de nexu, ordine, harmonia, & muſica latius dicta paſſim apud antiquos licet indeterminate ſatis proponuntur bonum in ſenſum, & uſum convertenda; apprime enim obſervandum neceſſitatem ♉ inferri non poſſe ex eo quod neceſſario dari debeat aliqua ♉. Aliud eſt ♉ eſſe neceſſarium; aliud eſt neceſſario concipiendam eſſe ♉ aliquam, quæ cum ſit C·Ↄ, vel C··Ↄ, exinde ♉ erit C·Ↄ, vel C··Ↄ; hinc vel Ṣ, vel Ṡ

TABULA, ET RATIO CHARACTERISTICÆ *

ᑌ Ratio, Causa — latissime primitiva ex ᑌ

ᑌ Rationatum, Causatum

ω Connexa — derivativa ex ᑌ & ᑌ

ɱ Inconnexa — inversione

ᑌ Connexio causarum > ᑌ concatenatio. Derivata ex ω ᑌ ᑌ

ᑌ Connexio causatorum

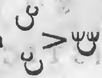
ᑌ ω ᑌ < S/CↃ < C/Ↄ < C·Ↄ/C·Ↄ < S/S &c.

§. XVII.

Quodlibet & est, idest ᑌ

h 2 Hinc

* Sciagraphiam generalem, & combinationes principaliores speciminis ergo indicamus; cæteras iisdem insistens principiis quisquis inveniet, & non fine voluptate simplicissimam fœcunditatem experietur, quemadmodum ex secundo specimine constabit, ubi, Deo dante, algebræ philosophicæ theoriam omnem, & ejus adplicationes tentabimus, & tum demum de arte inveniendi universalissima judicium erit.

Hinc  cum 

§. XVIII.

Omnia in mundo esse , , ordinata, harmonica, & nullam dari

insulam philosophicam passim apud Philosophos tum veteres, tum recentiores, notione connexionis in latissima significatione sumta. Nota sunt Ciceronis, Sancti Augustini, Scholasticorum verba; cum vero passim a scholasticis maxime in Physicis rationes obtruderentur nihil magis quam inintelligibiles; hinc acutissimus Cartesius dubitationem introduxit ad  seu rationes rerum intelligibili modo explicabiles introducendas; optime namque intellexerat omnia habere rationem convenientem, sufficientem suo modo saltem analogice, & convenienter. Hinc „ nulla res, inquit, existit, de qua non possit quæri quænam sit „ caussa cur existat; hoc enim de ipso Deo quæri potest, non quod „ indigeat ulla caussa, ut existat, sed quia ipsa ejus naturæ immensitas „ est caussa propter quam (ratio) nulla caussa indigeat ad existendum. Hujus principii distinctum, & adæquatum usum velut de novo proposuit, & introduxit Leibnitius Philosophus summus; rem postea confecit in variis philosophicis scriptis Aristoteles Hallensis magnus Wolff. Dolendum tamen quod eos sequuti novitatem inventionis, & demonstrationem nimium affectaverint in meram logomachiam, & circulum omnia abitura; quare perspicacissimus Leibnitius axiomatis instar assumendum esse contendebat, a Clarkio licet ad demonstrationem provocatus. *Non oportet enim in disciplinabilibus principiis inquirere propter quid . . . . . ex se ipsis enim fidem habent, non vero ex aliis, & ex ipsis alia demonstrantur*. Aristot. Hinc patet quid judicandum sit de novis demonstrationibus principiorum contradictionis, & rationis sufficientis Straheler; in examin. metaph. Wolff., & in differt. de exist. Dei, & Hagenii in commen. de method. mathem.

Ex analysi §. 14. Duo dari debent, & dantur principia universalia cognoscendi, quibus positis rerum omnium intelligibilitas ponitur, iisdem sublatis tollitur. In universum tamen observandum cautionem in adplicatione adhibendam; præsertim si tum notiones, tum propositiones non satis determinentur, & determinate, ac primitive inter se connectantur &c. Bulffinger. in Dilucid.

§. XVIII.

S & ᘎ, Ш
ᘎ< Hinc
CↃ ĊↃ

C C C
< Ergo ᘎ inter & nulla Ш
Ↄ Ↄ Ↄ

C·Ↄ S
< Hinc ⁝
C·Ↄ S

Ṣ C·Ↄ
< viceversa. Hinc
Ṡ C·Ↄ

S C C·Ↄ Ṣ C·Ↄ, Ṣ
ᘎ< < < ⁄ . Idem de Ш &c.
CↃ Ↄ C·Ↄ Ṡ C·Ↄ, Ṡ

§. XIX.

⊙ Existentiæ, seu actualitatis signum

CↃ Ċ *ens* potest
⊙, Quod esse existens
CↃ Ċ *non ens* non potest

◡< (◯ / ◡) < (S / CↃ) < (Є / Ↄ) < (CↃ / CↃ) < (CↃ / C·Ↄ) < (Ṣ / Ṣ) < (ʊ / ʊ) < (ω / ⋒) *

◯, ◡ ◯ est ◯, ⌒ repugnat ◡ vel ◡, ◡ Hinc ◡ interne, & externe

S si est S quoad ⊙, existit

< (C Ↄ Est tamen ĊↃ)

< (C Quod existit & determinatum, & positivum est / Ↄ Involvit ◯, ens fictum)

< (ĊↃ Quodlibet ʊ qua tale est ĊↃ / CↃ Repugnat ut ʊ ◯, ʊ Ↄ)

< (C·Ↄ / C·Ↄ) Hinc (S / S) Hinc velut in se CↃ

< (Ṣ / Ṣ) Quare (C·Ↄ / C·Ↄ) sive sit sit Ṡ; sive Ṡ

* En combinationis characteristicæ exemplum, cujus resolutio, & ad principaliora reductio ex antecedentium connexa combinatione instituenda simplicissima, brevissimaque via. Notandum tamen innumeras plurimorum Auctorum definitiones, & propositiones nihil aliud esse, quam puram putam rerum earundem sub diversis nominibus vagam, & sterilem repetitionem, quod jam magnis Viris observatum & authopsi præsertim ex hac arte inveniendi probe patebit.

ɣ Ratio — essentia
si in SS ơ
ɣ Rationatum — accidentia

ω	Ordo	Veritas	Perfectio.
In SS ơ	Hinc	Hinc	Hinc
m	Confusio	Falsitas	Imperfectio.

OB-

OBSERVATIONS

SUR LE COURS DU PÔ

Avec des recherches sur les causes des changemens qu'il a souffert.

PAR M. CARENA

L'Art & la Nature ont également eu part aux changemens qui sont arrivés dans le cours du Pô, je me propose dans ce mémoire de fixer la quantité, & l'époque des plus considérables d'entre eux: j'ose me flatter que ces recherches, pourront paroître intéressantes, & que les réflexions que j'aurai soin de faire sur les causes de ces changemens, seront de quelque utilité à l'avancement de la Géographie Physique.

1. POLYBE compare la Région arrosée par le Pô à un triangle, dont la base est le rivage Adriatique, les Alpes, & les Apennins en sont le deux côtés. La longueur de la Chaîne principale des Alpes depuis le Col de Tende, jusqu'à l'extrémite du Golphe Adriatique est de 625 milles; (*a*) celle d'une partie des Alpes, & des Apennins depuis cette Montagne jusqu'à *Sinigaglia* est de 325; la base enfin, savoir la longueur de la voye Romaine, qui depuis cette Ville conduisoit le long de la Mer Adriatique jusqu'à *Trieste*, est de 375 milles. Elle a donc 1325 milles de

(*a*) Je substitue ces mesures à celles que donne le texte assez fautif de POLYBE au Liv. II.

Dans tout le cours de ce mémoire je fais usage des anciens milles Romains de 756 toises.

de circuit. STRABON donne à cette plaine 2100 stades ($262\frac{1}{2}$ milles) de longueur sur une largeur à peu près égale entre *Ancone*, & *Trieste*. Il déduit cette dimension de celle des côtés du triangle décrit par POLYBE, dont elle fait la hauteur.

2. C'est une loi assez constamment observée par la Nature que les Montagnes qui se trouvent plus éloignées de la Mer sont les plus élevées, & contiennent aussi la source des plus grands fleuves. Celles de la Suisse, des Grisons, & du Vallais sont les plus hautes de l'Europe, & c'est aussi dans leur partie la plus élevée, que le Rhône, le Rhin, & le Tésin prennent leur naissance. La Chaine des Alpes qui de là s'étend à l'Est jusqu'à la Mer Adriatique, & au Sud jusqu'au Golphe de Lion, & qui va toujours en décroissant à mesure qu'elle approche de la Mer (*a*), ne fournit l'origine à aucun autre fleuve, qui soit aussi considérable, que ceux dont nous venons de parler, si nous en exceptons le Pô; mais il est à remarquer que, quoique le Mont *Viso*, dont il prend sa source soit moins haut que celles, qui sont plus avancées dans la même Chaîne, il l'est cependant beaucoup plus que toutes les autres Montagnes, qui lui sont voisines (*b*); c'est donc là un cas parti-

i culier

(*a*) SCHEUCHZER (*Mem. sulle Mont. in tom.* IV. *Sagg. Transaz. Filos.*) a trouvé par des observations barométriques exactes, que la plus grande élévation du M. Adula ou de S. Gothard, & des Montagnes voisines peut aller à 1400 toises environ de hauteur perpendiculaire sur le niveau de la Mer; & M. NEEDAM a trouvé de même que le partie de M. Tourné sur laquelle il a pû faire ses observations en a 1633., sans considérer les hauteurs latérales qui sont plus élevées; Le Mont Iseran $1282.\frac{1}{2}$; le Glacier ou le sommet du Mont Cenis 434. De ces observations, & de ce que le M. Tourné est situé presqu'au milieu de la Chaine des Alpes, il conclud, que cette montagne doit être la plus haute de l'Europe, & que c'est un erreur de croire que le M. Cenis & le M. *Viso* égalent en hauteur les montagnes qui sont plus avancées dans la Chaîne.

(*b*) Ce qui a fait exprimer PLINE en ces termes: *Padus e gremio montis Vesuli celsissimum in cacumen elati visendo fonte profluens*, L. III. c. XVI.

culier, qui rentre dans la régle générale, à laquelle il sembloit opposé.

3. PLINE obſerve, que le Pô reçoit tout au plus trente riviéres, & CLUVIER dit qu'il en reçoit quarante, dont quinze ſe dechargent ſur la gauche, & les autres ſur la droite de ce fleuve : tous les deux ont cependant raiſon ; car PLINE ne prend en compte que les plus grandes ; & de ſon temps après le *Réno*, le Pô ne recevoit plus que le *Santerno*: les autres fleuves déchargeoient leurs eaux dans la *Paduſa*, marais qui s'étendoit le long de la droite du Pô depuis le *Réno*, juſqu'à *Ravenne*.

4. En général il reçoit plus de riviéres ſur ſa droite, mais il en reçoit de plus grandes ſur la gauche ; parce que la Chaîne des Alpes étant plus haute que celle des Apennins, ces Montagnes contiennent dans leur ſein plus d'eau: & le lieu le plus incliné de la plaine ſe trouve plus près des Apennins que des Alpes ; ce qui fait que le cours de ce fleuve eſt plus éloigné de ces derniéres, & que la partie de la plaine qui eſt à ſa gauche eſt plus grande que celle qu'eſt à ſa droite (*a*) ; & les riviéres qui découlent des Apennins ayant moins de trajet à faire que celles qui viennent des Alpes, ſont auſſi reçues dans le Pô avant qu'elles puiſſent ſe reunir pluſieurs enſemble.

5. Cinq des riviéres, qui ſe déchargent à la gauche du Pô, ſortent des lacs enclavés dans les Alpes, que la Nature paroit avoir formé pour ſervir à en modérer la rapidité: car la pente des Alpes étant fort grande (*b*) les fleuves qui s'en précipitent ſurmonteroient ſouvent leur bords, & pro-

(*a*) *Univerſam planitiem ita (Padus) dividit, ut major longe pars ea ſit, quæ ad Alpeis, & Hadriaticum ſinum porrigitur. Polyb. L.* II.

(*b*) En général la pente des Chaines de Montagnes eſt beaucoup plus rapide vers le Sud que vers le Nord. SCHEUCHZ. loco cit. Quant aux Alpes cela eſt confirmé par cette obſervation : du Mont S. Gothard à l'embouchure du Rhin il y a en ligne droite 450. milles, & de la même Montagne à l'embochure du Pô il n'y en a que 180. Donc la deſcente des Alpes vers l'Italie eſt de deux fois, & demie plus rapide

produiroient d' impéteuſes inondations dans les plaines, ſi le courant des eaux n' étoit pas rallenti par ces réceptacles qui lui oppoſent une grande réſiſtance, & leur permettent en même tems de s'étendre dans un eſpace horiſontal, qu'on obſerve conſtamment être d'autant plus grand, que ces riviéres ſont plus conſidérables, & que leurs cours eſt plus rapide: en effet on voit que le Lac de *Génêve* qui eſt traverſé par le Rhone & celui de *Conſtance*, qui l' eſt par le Rhin, ſont les plus grands Lacs au delà des Alpes, de même que les plus grands en decà, ſont le *Lac Majeur*, qui eſt traverſé par le *Téſin*, celui de *Come* par l' *Adda*, & celui de *Garda* par la *Sarca*.

6. Le grand nombre de riviéres, qui vont décharger leurs eaux en aſſez grande quantité dans le Pô, le rendent non ſeulement le plus abbondant de l' Italie, mais ſelon Pline il n' y en a pas d' autre qui à cours égal reçoive un plus grand accroiſſement. „ *Nec alius amnium tam* „ *brevi ſpatio majoris incrementi eſt. Urgetur quippe aquarum* „ *mole, & in profundum agitur, gravis terræ, &c.* Outre cette quantité, qui eſt à peu prés conſtante, les neiges dont ces Montagnes ſont couvertes concourent encore à le faire groſſir conſidérablement dans la ſaiſon des fontes, qui ſelon Pline arrivoit au lever de la Canicule: „ *augetur ad canis ortum liquatis nivibus*: Polybe diſoit la même choſe deux Siécles avant Pline; *Fluit autem maximus, pulcherrimuſque ad canis ortum, auctus liquatis nivibus in prædictis montibus*. Le lever héliaque de la canicule à Rome, où écrivoient ce deux Auteurs, ſe faiſoit du tems de Polybe le 29. de Juillet, & de celui de Pline le premier d' Aouſt: c' eſt en effet ſur la fin de Juillet que la fonte des neiges produit cet accroiſſement dans le Pô; cependant le lever de la Canicule ne peut plus ſervir à en déſigner le tems;

 car

(1) Ou *Sirius*.

car (à cauſe de la préceſſion des équinoxes), il ſe fait aujourd' hui ſeize jours plus tard. Ce fleuve reçoit auſſi d' autres accroiſſemens en automne, & au printems, qui ſont produits par les pluyes qui tombent ordinairement dans ces deux ſaiſons de l' année.

7. La longueur de ſon cours depuis ſa ſource juſqu' à ſon embouchure eſt ſelon PLINE de 300. milles, ce qui eſt exactement vrai ſi on ne tient compte que de ſes plus grands detours. La diſtance entre la premiére & la derniére embouchure étoit du tems de cet Ecrivain de 88 milles, & elle répond à celle qu' on trouve entre l' embouchure de la *Foſſa Auguſta* dans le Port de *Claſſis*, & celle de la *Foſſa Clodia*, par laquelle le Pô mêloit ſes eaux avec celles des deux fleuves *Medoaci*, & formoit le Port *Edro*. Il obſerve auſſi que ce fleuve commence à être navigable à *Turin*; POLYBE eſt d'accord avec lui, en diſant que les navires le remontoient par l' embouchure *Olane* l' eſpace de 250. milles, car cette diſtance porte entre cette ville & le confluent de la *Duria major*, où le Pô, ſelon PLINE commence à avoir une plus grande profondité. (*a*) Aujourd'hui on le remonte auſſi au deſſus de *Turin* juſqu' aux confluens de la *Vraita*, & de la *Maira*, mais le barques à voiles ne paſſent pas au delà du Pont. (*a*) Je joindrai à ces notions préliminaires ſur les cours du Pô en général, deux mots ſur les Nations principales qui ont peuplé la Région qu' il arroſe, & dont l' induſtrie où la pareſſe ont contribué à ſes changemens.

8. Les premiers Abitans de l' Italie étant venus par Terre, la Région arroſée par le Pô fut la premiére à être peuplée. Ils

(*a*) Plin l, III. c. XVI.

(*b*) Les Celtes donnerent au Pô le nom de *Pades* dans la partie ſupérieure de ſon cours; Celui de *Bodding* dans l' endroit où il commence à être plus profond: c' eſt la partie du milieu; & à la méridionale des deux branches, dans leſquelles il ſe diviſoit, celui de *Rédane*, dont j' aurai occaſion de parler dans la ſuite.

Ils étoint Celtes d' origine; dans l' intérieur du Pays ils conserverent le nom d' *Ombri*, & sur les côtés il se donnerent celui de *Lli-gour* (hommes de Mer), Nom que les Latins changerent en *Ligur*, & *Ligures*. Les Tyrrhéniens abordés aux côtés de la Mer Inferieure chasserent ces Peuples de la Région entre le Tybre & la Macra, dix siécles avant l'Are vulgaire; ayant ensuite traversé les Apennins ils les obligerent à se rétirer vers les Alpes, & vers le haut Pô, & ils s' établirent des deux côtés du bas Pô jusqu'à l' *Adige*, ou les *Veneti* s' opposerent, & mirent des bornes à leurs conquêtes. Les Tyrrheniens Peuple industrieux & navigateur comme les Phéniciens, desquels ils tiroient leur origine, desfécherent des grands marais autour du bas Pô, & creuserent des longs canaux, qui ouvrirent au fleuve de novelles embouchures, ce qui rendit leur commerce sur la Mer supérieure très-florissant; mais les Gaulois descendus des Alpes, des l' An 600. avant l' Ere vulgaire, s' étant établis dans la plaine, les contraignirent à abandonner ces Régions.

9. Une grande partie de cette Nation méprisant l' agriculture, & le commerce, menoit une vie pastorale, & ne respiroit que la guerre; le Pô, & les autres riviéres de cette Région abbandonnés à elles mêmes surmontérent bien tôt leurs bords, & submergerent une partie de la plaine, que les Romains, qui les chassérent, & soumirent, ne parvinrent à desfécher en partie, qu' avec de très-grands frais; les soins que ces derniers apporterent pour reussir dans leur entreprise servent à nous donner une idée de l' importance de rendre durables ces ouvrages si utiles; car tandis qu'ils construisirent avec une solidite admirable leurs grands chemins, dont quelque partie en cotoyant les fleuves leur servoit de digue, ils creuserent plusieurs grands canaux, entre lesquels étoit fort avantageux celui, qui de *Ravenne* servoit à ouvrir la comunication entre les bouches du Pô, du *Tartaro*, de l' *Adige*, & des autres riviéres jusqu' à *Al-*

tino

tino dans une longueur de 120 milles. (*a*) Mais les Nations Barbares qui ravagerent l'Italie dès la fin du IV. siécle, & qui s'y établirent dans les suivans, firent presq' un désert de ce Pays si peuplé & si fertile: le reste des abitans opprimés dans l'esclavage ne pût inspirer que fort tard à ses Maîtres farouches le gout de l'agriculture, de la navigation, & des arts utiles; c'est alors que les riviéres, & les canaux comblés du limon qu'ils charioient de ces plaines, déborderent de tous côtés, & en submergerent de nouveau une grande partie: les Peuples s'étant enfin policés, & les Pays repeuplé on vit les Villes de la Lombardie dès le siécle XI. dessécher les marais, batir des nouvelles abitations sur les lieux que les eaux laissoient à découvert, & creuser des canaux qui en ranimerent le commerce, & en arroserent les campagnes.

10. Deux Chaînes de Montagnes, qui du M. *Viso* s'étendent vers la plaine à l'Est dirigent le cours du Pò vers cette plage jusqu'à ce, qu'étant sorti des collines; la pente générale de la plaine déterminée par la courbure des Alpes du Sud au Nord en dirige le cours de ce côté; enfin dans le lieu, où la plaine est le plus retrécié par la continuation des Alpes maritimes (*b*) d'un côté, & des Alpes Grecques, & Pennines (*c*) de l'autre, il est obligé de reprendre sa premiere direction.

11. Ces grandes courbures, toujours dépendentes de celles des Montagnes, en allongeant le cours des fleuves, diminuent la vitesse qu'ils acquereroient nécessairement, s'ils déscendoient directement à la Mer du sommet des Montagnes dont ils tirent leur origine; ce qu'on doit considérer comme une très-grand avantage, car ces fleuves coulant avec une trop grande rapidité, se creuseroient bien tôt des

(*a*) L. III. c. XVI.
(*b*) Les collines du *Monferrat*.
(*c*) Les collines du *Canavez* qui bordent la *Doira Bautia* jusqu'a *Massè*.

des lits profonds au deſſous du niveau des terres , & deviendroient par là peu propres à la navigation & à l'arroſement des campagnes. Quant à leurs petits détours dans les montagnes , ceux , qui ſont déterminés par leurs angles ſaillans & rentrans , qui multiplient les réactions , & diminuent l'inclination du plan , font perdre aux eaux une partie de la vîteſſe qu'ils ont acquiſe dans la déſcente , & qui produiroit de grands dommages dans les plaines , qu'ils vont parcourir ; ceux qu'ils ſe creuſent dans les plaines par l'inegalité & par l'éterogéneité du ſol , qui offre plus ou moins de réſiſtance à leur mouvement , ne produiſent pas des avantages egaux ; car au contraire ils les endommagent ſouvent par leurs variations. C'eſt à l'art de perfectionner la nature, où cela eſt aiſé . Mais la théorie n'a pas encore été entiérement établie ſur ſes vrais principes ; & l'on voit ſouvent faire à la pratique des efforts inutiles.

12. La partie de la plaine qui eſt plus proche des montagnes a une pente plus rapide que celle qui approche davantage de la mer, & les fleuves au ſortir des montagnes ont encore une grande partie de la vîteſſe acquiſe par la déſcente ; or après qu'ils ont dépoſé à leur pied les grandes pierres qu'ils en ont détaché & roulé dans les Vallées ils ſe déchargent des plus petites , juſqu'à ce que le mouvement devenant beaucoup moins rapide , ils dépoſent le ſable : mais comme il eſt encor trop grand pour que le limon, qu'ils commencent à charier en rongeant les plaines, puiſſe ſe ſéparer & ſe précipiter au fond de leurs lits , loin d'en être élevés, ils ſe creuſent davantage ; il s'enſuit delà que les changemens qu'ils ſubiſſent pendant un certain eſpace ne ſe font que par corroſion : c'eſt ce qui arrive à cette prémiere partie du cours du Pô dans le Piémont proprement dit.

13. Concevons les eaux du fleuve parvenues à l'entrée d'une plaine, elles ſe creuſeront un lit dans la partie la plus baſſe ; &

ſi

si dans le long espace qui leur reste à parcourir, elles trouvent un sol gras & fertile, elles se chargeront de limon, pour le déposer un peu plus bas, quand leur différens détours & le peu de pente de la plaine, leur auront fait perdre suffisamment de leur vitesse : le fond du fleuve se réhaussera donc insensiblement, & les eaux surmontant leurs bords se creuseront de nouveaux lits sur la partie de la plaine latérale qui est la plus basse ; si la mer est encore beaucoup éloignée, & que par quelque résistance dans le sol, le fleuve ne puisse y porter droit ses eaux, ces nouveaux lits se réünissent à l'ancien : voilà des isles formées par les branches du fleuve, qui quittera encore par la même raison ces nouveaux lits pour rentrer dans les anciens, ou pour s'en creuser d'autres. Cette plaine réhaussée dans les endroits plus bas, facilite encore ces changemens ; puisque le fleuve ne s'écoulant plus dans une vallée, mais sur une plaine assés unie & rendue de niveau par les différentes couches de limon, dont le sol a été couvert à plusieurs reprises, en inonde une grande partie, submerge les Villes, & les campagnes, & y forme des marais & des lacs. Le Fleuve qui au commencement ne debouchoit dans la mer que par une seule embouchure, y ayant déposé beaucoup de limon est ensuite obligé de se diviser, d'où il se forme des isles d'une figure triangulaire dont un côté est baigné par la mer, & les deux autres par les branches des fleuves : le limon successivement déposé fait de nouveau subdiviser le fleuve & il se forme de nouvelles isles ; ces nouvelles branches enfin qui divergent entr'elles, se réünissent aux prémieres, d'où il résulte d'autres divisions. C'est par ces différentes variations, que se font les prolongations du continent : & que s'il se trouve dans la mer des isles, qui soient proches du fleuve, elles sont enclavées & réünies au continent qui s'avance vers elles.

14. Tout

14. Tout ce que nous venons de dire eſt arrivé a notre fleuve ; les faits principaux, que j'ai recuelli à cet effet, en fourniſſent les preuves les plus convaincantes ; je commencerai donc par prouver l'exiſtence de ces isles, que des Auteurs très-anciens nommoient *Eléctrides* , & qu' ils plaçoient à l' embouchure de l' *Eridan*. STRABON & PLINE (*a*) les y cherchoient envain de leur tems ; & l' *electrum*, ou l'ambre n'étoit plus connû ſur les bords de l'*Eridan*; mais quoiqu' ils euſſent raiſon de trouver abſurde qu'elle pût être produite par les peupliers , qui en bordoient les rives ; il eſt cependant certain que dans des tems plus reculés on trouvoit cette ſubſtance près de ce fleuve , & que les isles *Eléctrides* , qui en prirent le nom , exiſtoient vis-à-vis de ſon embouchure ; car ARISTOTE (*b*) dans ſon livre *des choſes merveilleuſes* les décrit ſi particuliérement qu'on n' en ſçauroit revoquer en doute l' exiſtence. Il nous apprend qu'il y en avoit deux , & qu'elles étoient ſituées dans le fond du Golphe Adriatique vis-à-vis de l' embouchure de l'*Eridan* ; qu'il y avoit un lac prés de ce fleuve, dont l'eau chaude exhaloit un odeur ſi puante, que les bêtes refuſoient d'en boire , & que les oiſeaux en le traverſant y tomboient morts (*c*) ; ſa circonférence étoit de 200. ſtades (25. milles), ſa largeur de 10. (1. $\frac{1}{4}$ milles) ; ſa longueur étoit par conſéquent d' environ dix milles (*d*).

(*a*) STRAB. lib. V. PLIN. lib. XXXVII. cap. II.

(*b*) Ce livre eſt déja cité ſous ſon nom par des Ecrivains de la cour de PTOLOME'E PHILADELPHE.

(*c*) On peut voir dans PLINE lib. II. c. 93. pluſieurs exemples ſur ces exhalaiſons dans l'Italie. Un lac ſemblable eſt celui d'*Ampſancte*, aujourd'hui *Muffiti* au deſſous de la Ville de *Fricento.*

(*d*) L'Abbréviateur d'Etienne de Bizance, & TZETZE ſur *Lycophron* en parlent auſſi. SOTION, Auteur Grec aſſès ancien, dans les fragmens du livre *de flum. font. ac lac. miraculis*, aſſure que *circa Eridanum eſt lacus prope Electridas Inſulas aquam habens calidam, gravis oderis , quam nullum animal deguſtat*.

15. Théopompe, qui fit plusieurs ouvrages de (*a*) Géographie estimés par les Anciens, parloit de ces Isles dans une déscription de la mer Adriatique, qui est citée par le Géographe Scymnus de Chio (*b*). Appollonius de Rhode Bibliothéquaire de Ptolomée Philadelphe, dans son poëme des Argonautes, dans lequel il fait usage d'anciennes piéces de Géographie assès exactes, dit que l'Isle *Eléctride* étoit la derniere de celles, qui se trouvoient dans le Golphe Adriatique, & qu'elle étoit proche de l'*Eridan.* La fameuse expédition des Argonautes, qu'il y fait parvenir, est de l'an 1353. environ (*c*). Dédale y fit deux Statues, dont une étoit d'étain & l'autre d'airain, on a rapporté à Aristote qu'elles existoient encore dans cette Isle. Il paroit même, qu'on en conservoit le souvenir dans les prémiers siécles de l'Ere vulgaire; car Agnellus qui écrivoit les vies des Archevêques de *Ravenne* dans le IX. siécle parle d'un endroit dans le territoire de *Comacchio*, acquis par l'Evêque Aurélien vers le 520., qu'on nommoit le Champ *des Idoles* près de l'Eglise de S. Marie de *Pado veteri*, où l'on bâtit depuis le Monastère de *Pomposa* (*Voïez la Carte.*).

16. L'examen des circonstances de la vie de Dédale me donne l'an 55. avant la prise de Troye (*d*), qu'un savant Chronologiste a fixé à l'an 1284. (*e*), c'est-à-dire l'an 1339. avant l'Ere vulgaire, pour l'époque de son arrivée dans ces Isles; cette époque est la même que celle de l'arrivée des Peslages Théssaliens, qu'Aristote assûre en avoir chassé ce fameux Artiste. Ils y bâtirent une Ville à laquelle ils donnerent le nom de *Spine*; nom qui est tiré de la

(*a*) Il vivoit du méme tems qu'Aristote, dans le IV. siécle avant l'Ere vulgaire.
(*b*) In *Periegesi.*
(*c*) Pausanias lib. 9.
(*d*) Diod. Sic. lib. 4. Plut. in Theseo.
(*e*) Freret Nouv. Observ. Chron. P. I.

la nature du ſol de l' Isle, ſur laquelle elle fut fondée, & non de celui de l' embouchure du Pô, comme le prétend DÉNYS d'Halicarnaſſe (*a*); puiſqu'au contraire la Ville donna ſon nom à l'embouchure (*Spinétique*) (*b*). En effet ARISTOTE décrit un ſorte de pierre (c'eſt un eſpèce de pyrite) qui s'enflammoit lorſqu'on la briſoit, & qu'on nommoit *Spinus* (*c*). Les bains chauds de la *Porretta* ſur le bord du *Réno* au midi de *Bologne* (*d*) ſont formés par les eaux, qui ſortent en grande quantité d'un rocher de même nature. Lorſqu'on frappe ces pierres on en voit ſortir des étincelles, dont le nom grec Σπίντερ dérive par conſéquent de celui de Σπινε qu'on doit ſuppléer dans le *Theſaurus linguæ græcæ* d'HENRI ETIÉNNE: PLINE (*e*) aſſûre que ſi on laiſſoit tomber un charbon allumé dans le territoire *d' Aricia* la terre s'enflammoit, que dans la *Sabine* & dans le territoire de *Tiano* une ſorte de pierre prenoit feu lorſqu' on l' oignoit: cette région autour du bas Pô abonde en ſources ſulphureuſes, & ſans parler des célébres bains chauds d'*Abano*, dans le territoire de *Comacchio*, il y avoit encore au VI. ſiécle un endroit, qui s'appelloit *Ignis*, *&* *Bajas*, ſitué entre l'Eridan & la Volane (*f*).

PLINE aſſûre que dans les Apennins au Sud de Bologne l'an 91. avant l'Ere vulgaire, à la vûë d'un grand nombre des Chevaliers Romains, deux grands rochers s' entrechoquérent ſi rudement & avec un ſi grand bruit que la fumée & la flamme s' en éleva au Ciel, & que dans leur

 chûte

(*a*) Antiq. Rom. lib. I.
(*b*) PLIN. lib. III. C. XVI.
(*c*) Lib. de Mirandis.
(*d*) LE'ANDRE ALBERTI qui les vit en donne cette déſcription: *Eſcono queſte acque calde in grande abbondanza, di ſapore ſalſo, da un alto ſaſſo di minera di zolfo. Sopra il gran ſaſſo veggonſi in quà e in là uſcire alcune fiammette di ſuoco, ivi accendendoſi la terra; e ſpento il fuoco vedeſi germinar eſſa terra, e produrre erbe. Mette capo nel Reno queſt' acqua, onde non è meraviglia ſe l'acqua del Reno è tanto ſana a beverla.* Pag. 338.
Il dit auſſi, qu'au Sud de *Bologne*, près de *Pietramala*, on voit un trou, dont il ſort continuellement de grande flammes. pag. 325.
(*e*) Lib. II. c. 107. (*f*) AGNELLUS loc. cit.

chûte ils écraſerent pluſieurs Villages (*a*) : PLUTARQUE dit que dans le Païs habité jadis par les Celtes, un globe de feu (où un bloc de matiére en feu) lancé en l'air dans une eruption, tomba dans l'Eridan, & s'y éteignit (*b*). VALERIUS FLACCUS nous apprend la même choſe par ce vers :

Acer & Eridani trepidum Globus ibat in amnem.
Argon. l. V. v. 430.

Voilà l'explication d'une partie de la fameuſe fable de *Phaëton.* Les bornes de mon ſujet ne me permettent pas d'y inférer ici mes recherches ſur la premiere partie de cette ancienne tradition d'une embraſement qu'éprouva la terre, & ſur ſa cauſe : je les reſerve à une autre lieu. Les Poëtes ayant trop défiguré cette tradition, la rendirent abſurde ; & pour cela STRABON, PLINE, DIODORE de Sicile la rejettent abſolument ; POLYBE n'en décide rien ; LUCIEN dans ſon *Dialogue de l'ambre*, avec ſa naïveté ordinaire la tourne en ridicule, mais dans le *Dialogue de l'Aſtrologie* il tâche d'en donner une explication morale. Les ſentimens des Mitologiſtes ſont partagés ſur ce ſujet ; mais c'eſt ſans le moindre fondement que nos Hiſtoriens, trompés par les impoſtures d'ANNIUS de Viterbe, ont prétendu trouver dans *Phaëton* le fondateur de Turin.

17. APOLLONIUS de Rhode (*c*) dit que l'eau du lac, dans lequel tomba Phaëton à demi brûlée, en fut ſi infecté, que les oiſeaux, qui y voloient deſſus, n'en pouvant ſupporter

(*a*) Lib. II. c. 83.

(*b*) TZETZE, *Chiliad.* IV. n. 137. après avoir expoſé le Conte des Poëtes ſur Phaëton, dit :

Plutarchus autem ſolvit naturalius :
Globum igneum tetra coltica erupiſſe,
Extinctum autem, cum in fluenta Eridani incidiſſet,
Hiſtoriæ mentionem facit (in libro) : *quantum examen externorum ?*

(*c*) Αργοναυτικ. lib. V. v. 596. &c.

ter la puanteur, y tomboient morts; & que quand elle débordoit par le souffle du vent impétueux, *tunc* (*electri guttæ*) *in Eridanum provolvuntur frequenter cunctæ, æstuanti fluxu.* Le nom de *Lago-scuro* que conserve un Village entre *Ferrare* & le *Pô grande*, déja nommé *Lacus obscurus* dans des anciens chartres, indique précisément le lieu où étoit l'étang ou lac obscur (κέλαινῆς λίμνης), dont cet Auteur fait mention, & qui fut dans les siécles suivans comblé par le limon du fleuve, surtout depuis que la branche, qu' on appelle *Pô grande*, creusa son lit de ce côté.

18. Dans la campagne sulfureuse entre *Cume* & *Pozzuolo*, appellée par les Anciens *Phlegræus Campus*, l'an 1538, après des grands tremblemens, on vit la terre s' ouvrir & jetter une si grande quantité de pierre enflammées & de cendres, qu'il s'en forma une montagne de 4. milles de circuit, & le lac *Lucrin* en fut presqu'entiérement couvert (*a*). ARISTOTE (*b*) nous apprend comment dans la même campagne s' est formée la *Solfatara*; cet Auteur en parlant des tremblemens de terre, donne la déscription d' une espèce plus particuliére (& qu'on peut à plus juste raison appeller un Volcan), laquelle se fait quand la terre après s'être alternativement gonflée & rassise, s' ouvre enfin & élance une quantité de pierres: *Un de ces tremblemens*, dit-il, *bouleversa le Champ Phlegrée, de même qu'une Région Ligustique.* Ces derniéres paroles regardent l'origine des fameux *Campi Lapidei* qu'on appelle aujourd'hui le *Crau* entre Marseille & le Rhône; les circonstances fabuleuses, dont les Anciens l'enveloperent, racontant (*c*) que Jupiter avoit fait pleuvoir une nuée de pierres sur les Liguriens *Albion* & *Bergion* fils de Neptune, tombent aisément: le nom de *berg* signifioit dans la langue Celtique une montagne, & celui d'*Al-*

(*a*) V. LEAND. ALBERTI *Descriz. Ital. edit. an.* 1581. *p.* 177.
(*b*) METEOR. lib. II. cap. VIII.
(*c*) MELA lib. II. cap. V. APOLLOD. *de Diis* lib. II.

d'*Alben* ou *Alpen*, une montagne fort haute: deux montagnes baignées par la mer s'étant donc ouvertes par la force d'un volcan, élancerent une prodigieuſe quantité de pierres, qui retombant, couvrirent une étendue de Pays (*a*), & abîmerent pluſieurs peuplades de *Liguriens*, qui l' habitoient.

19. Celle des deux Isles *Eléctrides*, ſur laquelle les Théſſaliens batîrent la Ville de *Spine*, ſemble être ſortie de la mer par la force d'un Volcan. PLINE en dénombre dix dans l'Archipel, qui ſortirent de cette maniére, parmi leſquelles celle de *Theraſia* aujourd'hui *Santorini*, qui en ſortit l'an 237. avant l'Ere vulgaire, porte toutes les marques de l'action du feu; on en vit ſortir une autre à côté de celle-ci l'an 1709. Dans les mers d' Italie, *le Vulcanello* (rocher entre l'Isle de *Lipari* & celle de *Vulcano*), l'Isle d'*Iſchia*, celle da *Procida*, & une autre qui ſortit dans la mer de Toſcane, l'an 206. avant l' Ere vulgaire eurent la même origine (*b*). Ces Isles ſont toutes hériſſées de rochers; or telle étoit ſelon APOLLONIUS de Rhode l' Isle *Eléctride* (*c*).

20. Le Géographe SCYLAX, qui écrivoit vers l'an 500. avant l'Ere vulgaire (*d*), mais qui s'eſt ſervi dans la déſcription des côtes de l' Italie de mémoires d' environ un ſiécle plus anciens, dit que la Ville de *Spine* étoit ſituée près du fleuve de même nom, qu' on remontoit pour y parvenir l' eſpace de 20. Stades (2. ½ milles). Les Géographes EUDOXE & ARTEMIDORE, au rapport d'ETIENNE de Byzance (*e*) avoient écrit ſur cette Ville & ſur le fleuve *Spinus*. C' eſt le fameux *Eridan* des Grecs & des Latins. HÉRODOTE (*f*) révoqua en doute l' exiſtence d' un fleuve de même nom dans les mers ſeptentrionales, ſoupçonnant que

(*a*) De 12. milles de long. ſur 10. de larg.
(*b*) PLIN. lib. II. cap. 87.
(*c*) *In Inſulam aſperam Electrida ferebantur.* Argon. lib. IV. v. 581.
(*d*) Herod. lib. IV. c. 44.
(*e*) V. Σπῖνα.
(*f*) Lib. III. c. 115.

que ce nom, qui lui ſembloit Grec, eut été forgé par les Poëtes ; & STRABON nie abſolument qu'il y ait jamais eu de fleuve de ce nom, & de l'ambre à ſon embouchure. Cependant quoique PLINE (*a*) ſoit d'accord avec lui ſur ce point, il aſſûre neanmoins que l'embouchure *Spinétique* étoit autrefois appellée l'*Eridan* (*b*). Les Grecs qui commerçoient à *Spine* connoiſſoient cette branche du Pô ſous le nom d' Hʹελδανὸς, & leurs anciens Poëtes, qui célébrent *Phaëton*, imités par les Latins, l' étendirent à tout le fleuve. Mais ce nom étoit Celtique, & le Celtes ne le donnoient qu'à cette branche, qui ſe diviſoit à *Codrea* (*c*) ſur la droite. Ce lieu dans lequel on trouva quelques Inſcriptions qui en confirment l'antiquité étoit encore appellé dans le ſiécle XI. *Caput de Reda* (*d*), & PRISCIEN dans ſes Antiquités de *Ferrare* aſſûre que le Pô ne ſe diviſoit pas à *Ferrare*, mais quelque mille au-deſſous, à *Codrea*, qui avoit ce nom parceque la branche du Pô qu'on nommoit *Eridane* prenoit de là ſon commencement (*e*). Pluſieurs fleuves dans les païs abités par les Celtes avoient un nom ſemblable, & j'obſervé que le long du cours de chacun il y avoit des ſources chaudes, & qu'on trouvoit de l'ambre jaune aux embouchures de quelques uns d'entr'eux. Le fleuve *Rérone* qui coule par la Ville de *Vicence* étoit anciennement appellé *Reteno* (*f*) ; dans le ſiécle X. il conſervoit encore le nom de *Retone* (*g*) & *Retrone* ; les Vicentins & les Padouans, qui creuſerent dans leurs territoires pluſieurs canaux dans le ſiécle XII. & ſuivans, en changerent beaucoup l'ancien cours :

ſe

(*a*) Lib. XXXVII. c. II.
(*b*) L. III. c. 16.
(*c*) V. la Carte.
(*d*) Dipl. an. 1031. apud MURAT. Antich. Eſtenſi P. I.
(*e*) V. ALBERTI Déſcr. Ital. p. 342. b.
(*f*) VENANT. FORTUN. in Vita S. Martini.
(*g*) Dipl. apud UGHEL. Ital. Sacr. in Epiſc. Patav. & Cremon.

ſe déchargeoit autrefois dans le lac d'*Anguillara*, ou de *Vigazuolo*; ELIEN (*a*) décrivant la pêche des anguilles, qui ſe faiſoit dans ce lac, nomme le fleuve Ηρετηνὸς (*Eretenus*). Or à la gauche de ce fleuve il y a les fameux bains d'*Abano*: le long du *Rhin* & du *Reno* il y a auſſi des ſources chaudes. Le *Rodaune*, fleuve qui ſe décharge ſur la gauche de la *Viſtule* à trois milles de ſon embouchure, & qui par la variation des dialectes eſt appellé *Raddune* & *Reddune*, eſt l'Ηρίδανος, dont on avoit raconté à HERODOTE, qu'il ſe déchargeoit dans la mer ſeptentrionale (*b*). Il y portoit autrefois ſes eaux, & on recueille encore en grande quantité l'ambre jaune, que la mer rejette ſur une langue de terre voiſine. Après qu'on ne trouva plus cette production près de notre *Eridan*, les Grecs, & les Romains enſuite, la tiroient des peuples de ces païs ſeptentrionaux (*c*). La *Duna*, ſur laquelle on la chargeoit pour la tranſporter dans le *Boryſthène*, où les Grecs alloient l'acheter, étoit auſſi appellée *Rhudon* (*d*). On a vû ci-deſſus les eruptions des Volcans à la droite du *Rhône*, dont l'ancien nom eſt Celtique; ARISTOTE (*e*) décrit un lac bouillonant dans la *Ligurie* aux environs de *Marſeille*; ſon diſciple THÉOPHRASTE aſſûroit, au rapport de PLINE (*f*), qu'on recueilloit de l'ambre dans la *Ligurie* (*g*), & que les vagues de la mer la rejettoient ſur le Cap du *Pirenée*; au Sud de ce Cap opposé aux embouchures du *Rhône*, une Ville portoit un nom ſemblable (*Rhode*, aujourd'hui *Roſes*); & PLINE fait mention d'une Ville de *Rhoda*, qui étoit jadis à la droite de l'embouchure du *Rhône*, qu'il ſuppoſe mal à pro-

(*a*) Hiſtor. Animal. l. 14. c. 8.
(*b*) Lib. III. c. 115. CLUVER. Ital. Ant. l. I. c. 34.
(*c*) CLUVER German. Antiq. l. III. c. 34. &c.
(*d*) MARCIEN HERACL. in Peripl.; V. BAYERI Differt. de Venedis &c. in tom. VII Acad. Petrop.
(*e*) In lib. de Mirandis.
(*f*) L. XXXVII. c. 2.
(*g*) Ces deux Auteurs nomment *Ligurie* le païs que les Ligures abitoient auſſi au delà des Alpes.

à propos avoir été bâtie par les Rhodiens (*a*). Si cet Auteur n'ajoûtoit pas foi à THÉOPHRASTE & à XENOPHANE sur cette production dans ces lieux, & nioit aussi bien que STRABON & plusieurs autres anciens, qu'il y en eut jamais eû à l'embouchure de notre *Eridan*, c'est parcequ'il jugeoit de ce qui étoit autrefois, sur ce qu'ils voyoit de son tems ; mais de même que le limon porté par le *Rhône*, en formant l'Isle qu'on appelle de *Camargue*, détourna de la mer les sources de l'ambre: celui qui fut porté par l'*Eridan* détourna celles qui étoient le long de son cours. C'est ce qu'on apprendra ensuite de la recherche sur la prolongation du continent.

21. Du tems de STRABON, c'est-à-dire environ l'an 18. de l'Ere vulgaire, la Ville de *Spine*, que cet Auteur reconnoit avoir été maritime, étoit située dans le continent à 90. stades (11. $\frac{1}{4}$ mill.) environ de distance de la mer ; d'où je conclus, que dans les VI siécles, qui s'écoulérent entre le tems des mémoires suivis par SCYLAX (V. n. 20. p.), & celui de STRABON, le fleuve porta à cette embouchure tant de limon, que le continent en fut prolongé de 9. milles, ce qui fait un mille tous les 66. ans. Or en faisant une proportion entre ces tems & les espaces donnés par ces deux Auteurs, il résulte, que l'an 933. cette Ville étoit encore baignée par la mer, & que l'an 1334., vers lequel comme on a vû ci-dessus, on la bâtit, elle étoit éloignée d'environ 9. mille de l'embouchure de l'*Eridan*. En suivant cette proportion je trouve que la distance entre l'emplacement de la Ville de *Spine*, & l'ancienne embouchure de l'*Eridan* étoit de 12. milles au tems de l'embrasement de *Phaëton*, qui arriva dans le siécle XXII. avant l'Ere vulgaire; & en remontant plus haut, je trouve même le lieu de l'ancienne côte aux environs de l'embouchure du Pô au tems du Déluge, dont l'époque, selon le calcul que je fais sur le texte Samaritain, est de l'an 3045. avant l'Ere vulgaire,

l c'est.

(*a*) Lib. III. c. 4.

c'eſt-à-dire de huit ſiécles anterieure à l'embraſement de Phaëton : ces huit ſiécles donnent environ 13. milles pour la prolongation du continent.

22. Ces deux poſitions dépendent de celles de la Ville de *Spine*, que je vais tâcher d'établir. Les veſtiges de cette Ville ſont ſubmergés dans le *Marais de Comacchio* ; SPRETI (*a*), qui écrivoit au commencement du XVI. ſiécle, aſſùre que de très-anciens chartres en faiſoient mention, & dit qu'il y avoit encore de ſon tems un endroit à la gauche du *Primaro*, qui portoit le nom de *Volta di Spina*. Les Marais n'avoient pas encore ſubmergé tant de païs : ils n'avoient que 12. milles de circuit, ſelon ALBERTI, qui nous apprend auſſi qu'au milieu de ce ſiécle XVI on voyoit encore quelques reſtes de cette Ville dans l'endroit, qu'on appelloit *Dorſo di Spina* : ce nom fait voir qu'elle avoit été bâtie ſur un endroit élevé, & que le limon du fleuve qui l'environnoit, n'avoit pas encore réhauſſé le ſol au niveau de cette hauteur ; qu'elle par conſéquent avoit été un' isle qui s'élevoit en pointe au-deſſus des eaux de la mer (*b*) ; que cette isle enfin réünie au rivage voiſin, qui ne ſurpaſſoit que de peu le niveau de la mer, conſervoit ſur lui preſque toute ſon élévation. L'attention que ces deux Auteurs ont fait à ce que dit STRABON, qu'elle étoit éloignée de 11. milles de la mer, ſert à prouver qu'il en étoit de même de leur tems : car ſi elle en eut été plus ou moins éloignée, ils n'auroient pas manqué de l'obſerver, & de nous l'apprendre, vûe l'exactitude avec laquelle ils ont donné la déſcription de ces lieux : or les milles dont ſe ſervent ces Auteurs ſont d'un cinquiéme plus longs que les anciens milles Romains ; donc ces 11. milles ſont égaux à 13. $\frac{1}{4}$ milles Romains, qu'on trouve préciſément ſur la Carte de MAGIN entre le *Porto di Primaro* & la *Punta di Humana*. La Ville

(*a*) De Orig. & Amplit. Urb. Raven. l. 1.
(*b*) V. les Cartes de la Géogr. Phyſ. de M. BUACHE.

Ville de *Spine* étoit donc ſituée près de cet endroit. A` 9 mille de là on a le lieu de l'embouchure de l'*Eridan* pour l'an 1334; à 12 milles, celui de l' embouchure au tems de l' embraſement de *Phaëton*, & cette diſtance porte à *Conſandolo*; enfin à 13 milles on a le lieu de la côte après le Déluge à un mille environ au deſſus de *Codrea.*

23. Par tout ce que je viens de dire il eſt pleinement prouvé que les *Isles Eléctrides* ont réellement exiſté, & que le limon porté par le fleuve, les joignit au continent, & le prolongea de 45. milles dans 3045. ans qui ſe ſont écoulés depuis le Déluge juſqu'au tems de STRABON: qu'on ceſſa de trouver de l'ambre ſur l'*Eridan* depuis que le même limon eut comblé le lac ſalé, dans lequel l'acide du ſel marin durciſſoit cette ſubſtances ſulfureuſe, qui y découloit abondamment des entrailles de la terre: qu'en ſéparant enfin les circonſtances fabuleuſes que l'imagination des Poëtes a ajoûté à la tradition de l'eruption d'un Volcan près de l'*Eridan* & de la chûte d'une maſſe enflammée dans ſes eaux, on y découvre un phénomène qui donne des grandes lumiéres à la Géographie phyſique & à l'Hiſtoire. Je décrirai maintenant en particulier la prolongation formée par toutes les branches du Pô, & les changemens qui ſont arrivés ſoit dans leur cours, ſoit dans la quantité de l'eau qui y couloit.

24. Du tems de STRABON le Pô étoit diviſé en ſept branches depuis environ ſix ſiécles, & pendannt l'intervalle de tems qui s' eſt écoulé depuis cet Auteur juſqu' au XII ſiécle, dans lequel le Pô commença à couler par la branche *Pô grande*, le continent ne fut prolongé que de peu à l' embouchure de l'*Eridan*; mais il étoit déja étendu au delà de l'emplacement du Village de *S. Albertò* (*a*); car au rapport de l'Auteur d'une Chronique de *Ferrare* (*b*), il

(*a*) Voyez la Carte au lieu marqué *Inſula Pyreti.*
(*b*) Publiée par MURATORI, *Rer. Italic.* Tom. VIII. p. 474. &c.

y avoit en cet endroit un pont ſur le Pô, qui joignoit le grand chemin de *Ravenne*; & ce grand chemin étoit le même, que celui qu'AUGUSTE fit paver depuis *Rimini* juſqu' à *Ravenne* (*a*), & qui delà traverſant toutes les embouchures du Pô conduiſoit juſqu' à *Altino*; cet Empereur avoit de même fait creuſer le canal, qui portoit ſon nom, & qui couloit de la branche *Spinétique* au-deſſus du pont (*b*); & *Ravenne* de ce tems-là étoit encore baignée par la mer, qui y entroit dans le flux par les canaux, qui l'entrecoupoient (*c*); mais au commencement du VI. ſiécle elle en étoit déja éloignée d' $\frac{1}{4}$ de mille (*d*). Le Roi ODOACER en fit creuſer un au nord de cette Ville peu de tems après, qu'il y eut établi ſa réſidence en 476; ce canal joignoit celui d' AUGUSTE à une branche du Pô ſur laquelle on navigeoit encore dans le ſiécle XIV. (*Voyez la Carte*) (*e*). Pluſieurs Auteurs du moyen âge nomment cette branche *Baderinus* (*f*), ou *Fluvius Padenæ* (*g*); ſon vrai nom étoit *Paderenus*: le même Roi fit bâtir ſon palais de *Blacherne* dans l' isle formée par cette branche, ce qui fait voir, que le ſol en étoit aſſez ſolide & ſpacieux. Le *Paderenus* couloit de l' *Eridan* (*h*) vers *Ravenne*, & il ſe joignoit ſous ſes murailles au canal d' AUGUSTE, qui avoit traverſé cette Ville (*i*). L'Auteur de la Chronique de *Ferrare*, qui écrivoit vers la fin du XIV ſiécle, aſſûre que de ſon tems il y avoit 7. milles entre cet endroit, & le Port de *Primaro*; les milles dont ſe ſert cet Au-

(*a*) JORNANDES de reb. Gothic. c. 52.
(*b*) Chron. Ferrar. loc. cit.
(*c*) STRAB. lib. V.
(*d*) PROCOP. de Bello Goth. lib. I.
(*e*) Chron. Rav. Rer. Ital.
(*f*) PAUL. DIAC. Hiſt. Lang. lib. 3. c, 19.
(*g*) Chron. Rav. ibid. & Papyr. du ſiécle VIII. à la ſuite de l'*Iſtoria Dipl. du Maffei* n. XV.
(*h*) Un peu au-deſſous du Village de *S. Nicolo*. Chron. Fer. ibid. Voyez la Carte.
(*i*) AGNEL. loc. c.

Auteur font aux anciens milles Romains comme 7. à 8. ½ Dans les Cartes de l' Italie, que MAGIN a composées au commencement du dernier fiécle, il y a environ 9. milles Romains anciens entre ces deux endroits; donc le *Pô de Primaro* n' avoit pas prolongé le continent dans ces deux fiécles. (*a*) Mais depuis ce tems la Mer femble avoir regagné dans cet endroit fur le continent; car dans la carte de l' état Ecclésiaftique des PP. Bofcovich & le Maire on ne voit plus la prolongation formée par le Primaro & deffinée dans la Carte du Magin, ni les deux isles, & les deux bancs de fable vis-à-vis de cette embouchure (*voyés la carte*). Cette difcuffion fur la longueur du continent confirme la pofition de la Ville de *Spine* (v. §. 22.).

25. Selon PRISCIEN PELLEGRIN (*b*) le village de *Confandolo* étoit appellé *Caput Sandali*, parce que dans cet endroit il fe féparoit de la gauche de l' *Eridan* une branche nommée *Sandalus*, qui couloit vers le village, qui porte le nom de *Sandalo*. Le même Auteur (*c*) décrit ailleurs un ancien canal, appellé *Foffa Bofia*, qui depuis *Confandolo* portoit une partie des eaux du *Primaro* dans le Pô *di Volana* à *Médélane*; (*voyes la carte*) c' étoit l' ancièn lit du *Sandalo*, qui prit ce nom d' un certein *Bofius*, qui le fit nettoyer. Il femble (v. §. 22.) que ce fut dans le tems de l' eruption de plufieurs Volcans le long du Pô, qu' il fe divifa en ces deux branches. On a vû que la premiére divifion du Pô fe faifoit à *Codrea*, dont la branche à la droite étoit l' *Eridan*; l' autre étoit appellée *Sagis*, felon PLINE, qui nomme fon embouchure *Sagis Oftium*. Il dit que la *Olane* étoit la premiére des fuivantes, que l' art avoit creufées. (*d*) L' eau ayant

(*a*) RUBEUS (Hift. Rav. lib. 5.) qui écrivoit fur la fin du XVI. fiécle compte 18 milles entre Ravenne & l' embouchure de Primaro; ce qui revient au même.

(*b*) Cité par ALBERTI *Defcr. Ital.* pag. 392. 6.

(*c*) Rapporté par MURATORI *Piena efpofiz. dei diritti Imp. ed Eftenfi ec.*

(*d*) Lib. III. c. XVI.

ayant abondé dans cette derniére, & presque manqué dans la *Sagis*, le nom d' *Olane* fût donné à la premiére partie de cette branche, & le nom de *Sagis* ne lui resta que du lieu de sa division d' avec la *Olane* jusqu' à la Mer. Ses vestiges sont marqués dans la Carte de Magin avec le nom de *Gorgadello*, & selon Cluvier (*a*) quelque peu d' eau couloit encore de son tems, c' est à dire au commencement du dernier siécle, de la *Volane* près du lieu de *Marozze*. La Table Théodosienne marque un lieu *Sagis*, dont la position tombe au même endroit, où ces deux branches se divisoient. Polybe (*b*) ne fait mention d' aucune autre branche du Pô que de la *Padusa*, (c' est le nom qu' il donne à l' *Eridan*, le long duquel s' étendoit au Sud la *Padusa Palus* des anciens), & de l' *Olane* parcequ' elles étoient de son tems les plus considérables. La branche qui se divise à la droite de *Ferrare* n' exista que depuis le commencement du siécle VIII. de l' Ere vulgaire: les Ravenniens la creuserent pour se défendre de leurs ennemis, & la nommérent *Fossa*, & *Padus Fossæ* (*c*); aujourd'hui on l' appelle *Pô di Ferrara*, ou *Pô morto* à cause du peu d' eau qui y coule (*voyez la carte*). Cette premiére division du Pô à une petite distance de l' ancienne côte, confirme l' époque du deluge, & ce que j'ai établi au §. 13.: que le limon porté par le Pò à son ancienne embouchure, devoit en peu de tems l' obbliger à se diviser; le flux de la Mer contribue le plus à ces divisions proches de l' embochure: le fleuve, qui après avoir èlevé son lit rompt ses bords, creuse les autres, qui en sont plus éloignées.

26. De la gauche de l' *Eridan* se divisa aussi dans la suite une branche qu' on appelloit selon Alberti, *Vergens fluvius*, aujourd'hui le *Vergenese*, qui est presque sans eaux &

(*a*) Ital. Antiq. lib. I. c. 35.
(*b*) Lib. II.
(*c*) V. Agnel. *in vita Felicis*, & Alberti pag. 343. 6.

& ſe perd dans les marais de *Comacchio*. Son ancienne embouchure, que PLINE appelle *Capraſiæ oſtium*, eſt la même que celle qu'on appelle Porto di *Magnavacca*. Ces trois branches ſont les ſeules dans leſquelles le Pô ſe diviſoit. Avant que de paſſer à décrire les autres branches & canaux à la gauche de ſon cours, je dois rendre compte d'un autre effet conſiderable produit par ce prolongement de continent, c'eſt-à-dire de cette ſuite de marais qu'on appelloit anciennement *Paduſa*, & qui deſſéchés dans quelques lieux, & plus étendus qu'autrefois dans d'autres, ont pris différens noms.

25. *Ravenne* avoit été bâtie ſur pluſieurs Isles, & au premier ſiécle de nôtre Ere, elle tenoit déja d'un coté au continent (§. 24.) cinq ſiécles aprés, ſelon PROCOPE; elle étoit éloigné de la Mer de 250. pas; les flottes, & les armées de terre n'en pouvoient que difficilement approcher; les premiéres arrêtées par les bancs de ſable, qui s'étendoient dans la Mer juſqu'à 30 ſtades, ou 4.$\frac{2}{7}$ milles (*a*); les dernieres par le Pô par les autres fleuves navigables, & par les étangs, dont cette Ville étoit environée. Les eaux de la Mer dans le flux entroient dans les canaux, & ſe répandoient auſſi loin qu'un homme peut marcher dans un jour; (*b*) on proffitoit de ce tems pour la navigation. Cela arrivoit non ſeulement à *Ravenne*, mais le long de la côte juſqu'à *Aquilée*. Les Romains (*c*) après qu'ils conquirent ſur les *Ombriens* la Ville de *Ravenne*, en perfectionnerent le Port, & POMPÉE y établit une flotte (*d*), qui gardoit la Mer ſupérieure & celles du Levant (*e*). Ce Port étoit ſi vaſte que du tems d'AUGUSTE 250 Galeres y demeu-

(*a*) Sept des ſtades de PROCOPE, & des Auteurs du bas Empire, font le mille. V. l'*Analyſe de l'Italie* de M. d'ANVILLE.

(*b*) Les anciens, ſelon Vegece l'étendoient pour les troupes juſqu'à 24. milles.

(*c*) PROCOP. de bello Goth. lib. I.

(*d*) Cicer. pro L. Manil.

(*e*) Veget. lib. V. c. I.

meuroient en ſtation (*a*); du nom Latin de flotte on l'appella *Portus Claſſis*. Le grand commerce, qu'on y faiſoit peupla beaucoup la ville *de Ravenne*, & celle de *Claſſis* qu'on bâtit à trois milles au Sud de *Ravenne*. Entre ces deux Villes, ſur la *Via Cæſaris*, qui les jognoit, on bâtit depuis celle de *Cæſarea*. (*b*) Ces trois Villes entouroient ainſi de trois côtés le Port. Vers l'Eſt il y avoit un'Isle ſur laquelle s'élevoit un célébre *Phare* ſemblable à celui d'*Alexandrie*. (*c*) Ce Port fameux avoit déja été tellement comblé par le limon dans le ſiécle VI. qu'un Auteur de ce tems (*d*) dit que les arbres, fruitiers plantés dans des jardins ſpacieux, occupoient la place des arbres des vaiſſeaux, qu'y flottoient autrefois. Dès le IV ſiécle ce Port n'étoit plus fréquenté: car les flottes Impériales relâchoient toujours depuis ce tems au *Portus Eridani* (*e*) formé par l'embouchure du *Paderenus*, (*f*) après avoir reçu le canal qui traverſoit la Ville.

28. Ce canal contenoit au milieu du V ſiécle deux parties de l'eau de la *Foſſa Auguſta*, la troiſiéme couloit dans un autre canal, qu'on en avoit diviſé au moyen d'une grande digue de pierre, (*g*) & qui ſervoit de foſſé à la Ville vers l'Oueſt pour la défendre de ce côté, où les marais laiſſoient un petit paſſage, au rapport de JORNANDES, qui écrivoit au milieu du VI ſiécle. La ville de *Ravenne* ainſi ſituée aux milieu des eaux bravoit la fureur des Barbares; c'eſt pour cela que les Empereurs d'Occident après THÉODOSE I. y firent preſque toujours leur reſidence, de même que le Roi ODOACER, qui y ſoutint un ſiége de trois ans con-

(*a*) DIO apud JORNAND. de reb. Gothic. c. 52.
(*b*) JORNAND ibid.
(*c*) PLIN. l. 36. c. 12.
(*d*) FABIUS apud JORNAND. c. 52.
(*e*) AGNEL paſſim.
(*f*) Au commencement du VI. ſiécle on avoit déja bâti un autre *Phare*, ou eſt aujourd'hui *la Rotonda*, qui en prit le nom de *Monaſterium ad Pharum*.
(*g*) Sidon. Apollin. lib. 1. epiſt. 8.

contre le Roi THÉODÉRIC: le premier après qu'il se rendit Maître de cette Ville en 476, avoit fait creuser le Canal appellé *Fossa Asconis*, qui jognoit le *Padus-Renus* à la *Fossa Augusta*; (*voyés la carte*), & il en fit à cette occasion creuser un autre (l'An 490) depuis la Mer, où étoit le *Pinetum* (*a*) jusqu'au Pont *Marmoreus*. (*b*) L'eau qu'on conduisit dans ce canal étoit celle du fleuve *Bedesis*, qui après avoir coulé entre *Ravenne*, & *Césarée*, débouchoit dans le Port de *Classis*; une autre branche de ce fleuve se déchargeoit dans le même Port, après avoir coulé entre *Césarée*, & *Classis* sous le nom de *Fluvius Pantheon*. Il fournissoit aussi l'eau à *Ravenne* dans un aqueduc que le Roi THÉODÉRIC fit réparer (*c*), d'où on lui donna dans le moyen âge le nom d'*Aquæductus*, changé depuis en celui de *Ronco*; mais dans les Montagnes il conserve celui de *Bédése*. Ce fleuve & le *Montone* appellé anciennement *Utens*, & *Vitis* (*d*) qui se déchargeoit autrefois dans la *Padusa*, & tous ces canaux trop multipliés comblerent de limon le ports de *Ravenne* les uns après les autres, de sorte que les isles & bancs de sable décrits par PROCOPE, & celles qu'on voit dans la carte de la *Romagne* de Magin, furent jointes au continent, & la Mer sur la fin du XVI. siécle étoit déja éloignée de *Ravenne* de 4. milles, (*e*) distance qu'on trouve aussi sur la Carte des PP. BOSCOVIC & le MAIRE.

29. Parce que j'ai prouvé ci devant, que le rivage de la Mer étoit anciennement au dessus de *Codrea*, on voit, que tous les fleuves depuis le *Réno* jusqu'à *Ravenne* se déchargoient autrefois dans la Mer, qui baignoit alors ces Pays, qui sont le long de la droite du *Primaro*. Or tan-

m dis

(*a*) Bois du Pin qu'Auguste avoit fait planter pour la flotte. Rub. hist. Rav.
(*b*) Il semble qu'il ait été sur le fleuve *Bédésis*.
(*c*) CASSIODOR. in Chron.
(*d*) LIV. lib. V. PLIN. l. III. c. 15.
(*e*) RUB. Hist. Rav.

dis que le Pô prolongeoit le continent d'un côté, les fleuves le prolongeoient de l' autre, & remplissoient de limon le long Golphe compris entre les bords du Pô ainsi prolongés, & cette ancienne côté, le long de laquelle ils avoient leurs embouchures. Le *Santerno*, qui en est un des plus considérables, parvint à former une langue de terre jusqu' à l' *Eridan*, avec lequel il conflua, en coupant en deux ce Golphe, dont la partie, qui fût enclavée dans le continent, est le lieu le plus bas des marais entre ce fleuve, & le *Réno*; qui empêchent les riviéres de la *Legation de Bologne* de se décharger dans le lit du Pô de *Primaro* élevé de plus en plus sur ces marais par le limon, que le fleuve déposa dans le cours de tant de siécles. L'autre partie du Golphe fût aussi separée de la Mer par le limon des branches *Messanicus*, & *Paderenus*, qui prolongerent le continent jusqu'à *Ravenne*, tandis, que de l'autre côté les isles sur lesquelles cette Ville étoit bâtie y étoient jointes de la maniére qu' on a vû au §. précédent. Le *Messanicus* ayant élevé son lit, répandoit les eaux dans les marais à sa droite, qui en prirent le nom de *Padusa*; AUGUSTE le fit creuser de nouveau pour le rendre navigable jusqu' à *Ravenne*. Le *Paderenus*, dont l' embouchure est celle que PLINE appelle *Vatreni ostium*, parvint à se joindre vers le siécle IV. a ce canal d'AUGUSTE au delà de *Ravenne*. Il s'en détacha dans la suite une branche, qui par la nouveautée de son cours fut appellé *Padus Juveniacus*: des chartres du X. siécle en font déja mention: c' est la partie inférieure du Pô de *Primaro*. Mais enfin les riviéres depuis le *Santerno* jusqu' au *Montone* ayant rempli de limon ces marais, ne trouverent pas de résistence à s' ouvrir plusieurs embochures dans la Mer; car la *Fossa Augusta* comblée de limon n' étoit plus navigable dès le siécle VI., & la voye Romaine, qui lui servoit de digue, étoit peu-à-peu ensevelie sous le sol, qu' il rehaussoit.

30.

30. Les autres ſoit branches du Pò, ſoit canaux depuis la branche *Sagis*, furent creuſées par les Tyrrhéniens, qui détournerent le gros des eaux du fleuve dans les marais d'*Adria* appellés *Septem Maria* (*voyés la carte*). (*a*) Après la branche *Volane* il y avoit quelques embouchures, que PLINE appelle *Oſtia plena*. Le lieu de *Co-di-goro* prit ſon ancien nom de *Caput Gauri*, d'une branche qui ſe détachoit de la *Volane* avec le nom de *Gaurus fluvius*; Il ſemble qu'elle ait été appellée anciennement *Neronia Foſſa* (*b*), car la Table Théodoſienne à quatre milles de *Sacis* marque *Neroma*: la poſition de *Corniculani*, qu'elle marque à ſix milles en deça d'*Ariano* tombe au paſſage du *Gaurus*. A ſix milles de *Co-di-goro* il y a le Village de *Mezzo-Goro*, ainſi appellé parceque quand on le bâtit, il étoit à égale diſtance entre le commencement du *Goro*, & ſon embouchure. Cette branche à ſi fort prolongé le continent, qu'elle a aujourd'hui le double de cours. Sur la fin du XVI. ſiécle le Duc ALPHONSE II. de *Ferrare* fit bâtir au rivage de la Mer la maiſon de *Plaiſance* appellée la *Méſola*: (*c*) aujourd'hui elle en eſt éloignée de huit milles; mais l'eau a preſque manqué dans cette branche. Le Pò d'*Ariano* & les branches ſuivantes ſont nouvelles. Celle que PLINE appelle *Carbonaria*, eſt la branche qui coule du Village de *Corbola*, où les diſtances marquées dans la Table Théodoſienne portent la manſion ad VII. *Maria*; cette branche avec la *Foſſa Philiſtina*, & le flevue *Tartaro* prolongerent beaucoup le continent, & y enclavérent les Isles formées par une chaîne de collines, & entr'autres celle, où eſt bâti *Loreo*, *Lauretum*, qu'on trouve dès le VII. ſiécle dans le nombre des lieux, qui dans les lacunes ce *Véniſe* avoient échappé à la domination des

(*a*) PLIN. lib. III. c. XVI.
(*b*) Creuſée peut être par ordre de l'Empéreur CLAUDIUS NERON qui à ſon retour de la conquête de la Grande Bretagne s'embarqua ſur le Pò. V. DION. CASS. lib. 60. & PLIN. ibid.
(*c*) RUB. Hiſt. Rav. lib. VI.

Langobards. Pline parle du célébre Port d'*Àtria*, dont les Tyrrhéniens, fondateurs de cette Ville, se servoient pour faire sur la Mer supérieure un commerce si grand, qu'elle en prit son nom d'*Atriatique*, changé depuis en celui d'*Adriatique*. Près de cette Ville, qui vit peu-à-peu s' enlever la Mer & le commerce, il y a vers le Sud un petit marais, isolé, (*a*) qui semble avoir été ce fameux Port comblé par le limon, qui en éloigna la Mer de treize milles.

31. La *Fossa Philistina*, dont le nom indique une des Nations Phéniciennes, qui composoient la Nation connüe par les Grecs tous le nom de *Tyrseni*, fût creusée par ce Peuple, pour enlever, à ce qu' il semble, aux Thessaliens de *Spine*, avec l' eau de trois anciennes branches du Pô, le commerce, & la défense naturelle qu'ils trouvoient au milieu des eaux. Ce qui leur réussit: & les Thessaliens furent contraints de se retirer dans la Grece. (*b*) Ce canal conduisoit l' eau du Pô jusqu' à *Adria*; Priscien en décrit les vestiges depuis *Castelnuovo*, où il se détachoit du Pô, jusqu' à *Cerignano*, & *Mezana*, (*c*) où le fleuve *Tartaro* y mêloit ses eaux pour déboucher dans la Mer (*voyés la carte*). Mais dans le tems des Romains les eaux couloient de nouveau en abbondance dans la *Volana*, & dans l' *Eridan*; soit qu' Ils eussent reglé la distribution entre ce deux branches, & la *Fossa Filistina*, à fin qu' elles fussent toutes navigables; soit que le Pò pour avoir coulé du tems des Tyrrhéniens trois, ou quatre siécles en plus grande abondance dans cette derniére, en eut élevé le lit, & distribué de nouveau une plus grande quantitè de ses eaux dans le deux premiéres; car du tems de Polybe l'embouchure *Olane* formoit un Port des plus surs de la Mer *Adriatique*, & l' embouchure *Spinetique* du tems de Pline en formoit

(*a*) *V. Carta del Polesine di Rovigo del* Bonifazio.
(*b*) Dionys Halic lib. I. Strab. lib. V.
(*c*) V. Alberti pag. 352. b.

moit un d'aſſez grande capacité ; l'Empereur CLAUDE déſcendit ſur un grand navire dans l'Adriatique par cette branche ; & au IV. ſiécle les troupes Romaines embarquées à *Oſtiglia* déſcendoient encore par cette branche & par la *Foſſa Auguſta* juſqu' à *Ravenne* (*a*). Depuis le tems des Romains l'eau alla en décroiſſant dans la *Foſſa Philiſtina*, qu'on trouve encore déſignée comme le confin de pluſieurs campagnes dans quelques chartres avec le nom de *Peleſtina*, ou *Peleſtrina*; & elle ceſſa d'y couler du Pô depuis le XII ſiécle ; ſes veſtiges conſervent le nom de *Piſtrina*.

32. La direction de ces branches du Pô fait voir que la partie de la plaine, où couloient le *Sagis* & l' *Eridan*, & qui en étoit au commencement la plus inclinée, du tems des Tyrrhéniens avoit déja été élevé par le limon au-deſſus de cette partie, qui eſt à la gauche du cours de la premiere ; ce qui eſt auſſi prouvé par la direction du cours de l' eau dans cette ſuite de canaux creuſez par les R. main, ſur leſquels, ſelon PLINE, on navigeoit de *Ravenne* juſqu'à *Altino*; l'Itinéraire d' *Antonin* marquoit aux troupes Romaines cette navigation (*b*), que CASSIODORE décrit dans une lettre aux Tribuns de la marine de la Province *Venetia*. Ces canaux étoient fort-importans dans ces tems anterieurs à l' invention de la bouſſole, dans leſquels on craignoit de perdre de vüe les côtes : dans les mois orageux on navigeoit en grande ſûreté ſur ces canaux (*c*); il auroit été fort dangereux de côtoyer le rivage de la mer aux embouchures du Pô, à cauſe du courans & des bancs de ſable, qui varioient beaucoup, & qu'on ne connoiſſoit pas trop. Entre *l'Eridan* & la *Volane* (*voyez la Carte*) continuoit la *Foſſa Auguſta* près d'un lieu de même nom, &

(*a*) Tab. Theod. ſegm. IV. edit. Vindob. 1753.
(*b*) *Ravenna*: *Inde navigantur ſeptem maria Altinum uſque.*
(*c*) *Cum ventis ſævientibus mare fuerit clauſum, via vobis panditur per amœniſſima fluviorum &c.* CASSIOD. *Var.* lib. XII. ep. 24.

& l'eau y couloit de la *Volane* ; car telle étoit la direction d'un *rivus Baderinus* (*a*). Le lit de cette branche étoit donc alors plus élevé que celui de l'*Eridan*. L'eau de la *Fossà Neronia* couloit de l'autre côté de la *Volana* jusque dans la *Fossa Philistina*, & la pente du sol continuoit même au-delà de l'*Adige* ; car Pline assûre, que le Pô mêloit ses eaux avec celles de l'*Adige*, du *Togisonus* & des deux *Medoaci* (*b*). Ce qui arrivoit au moyen du canal appellé *Silvus longus* (*c*), qui depuis *Ariano* les conduisot par *Corbola* dans le *Tartaro*, & delà traversoit l'*Adige* à *Caput Aggeris* (*Cavarzere*), & après avoir reçu le fleuve *Togisonus* (*d*), une partie de ses eaux débouchant dans les *Lagunes* de *Venise*, avoit ouvert la langue de terre opposée & formé le Port de *Brondolo* (*e*); l'autre partie continuoit son cours dans la *Fossa Clodia*, à laquelle venoit se joindre un canal, qui conduisoit une partie de l'eau du *Medoacus major* (*la Brenta*), & du *Medoacus minor* (*f*) : ces eaux avoient rompu la même langue, & forme l'ouverture qu'on appelle *Porto di Chioggia*.

33. Le limon déposé par ces branches & canaux, produisit une grande inégalité d'élevation dans le sol, dont s'ensuivirent des grands changemens dans leurs cours. Dans la partie de la plaine comprise entre la *Volane* & la *Fossa Philistina*, qui se trouva par cette raison moins élevée que le lit de ces deux branches, il s'en forma une nouvelle, qui aujourd'hui est la plus abondante de toutes. Environ l'an 1150. les habitans des lieu voisins de *Ruina*, envieux de la prosperité, dont joüissoient les cultivateurs de son terri-
toire

(*a*) Dipl. an. 1013. in Append. *Difesa della S. Sede per Comacchio.*
(*b*) *His se padus miscet, ac per hæc effunditur* : l. cit.
(*c*) Chron. Ferrar. l. c.
(*d*) Ce fleuve, qui avoit sa source dans le territoire de *Padoue* près des bains d'*Abano*, a changé de cours & de nom.
(*e*) Plin. ibid. V. la Carte du *Padouan* de Magin.
(*f*) Les Padouans en ont beaucoup changé le cours ; entre *Padoue* & *Pieve di Sacco*, on l'appelle *Fiumicello*. V. Magin ibid.

toire très-fertile, couperent au-dessus de cet endroit la rive gauche du Pô, qui submergea cette campagne, & fit des grands ravages en s'ouvrant une issüe dans la mer; enfin les Ferrarois avec bien de travail firent des digues tout le long de son cours, & il se creusa son lit. On appella cette branche *la Rotta di Ficarolo* (*a*). Dès le XIV siécle les eaux y couloient en telle abondance, qu'elles égaloient celles des deux autres branches *Volana*, & *Primaro* (*b*); de nos tems la plus grandes partie des eaux du Pô coule dans la dite branche, qu'on appelle par cette raison le *Pô grande*; elle changea souvent ses embouchures, qui produisirent une telle prolongation de continent, que suivant la Carte des PP. Boscovich & le Maire, il y a aujourd'hui 17. milles de distance entre *Ariano* & la partie la plus avancée du rivage voisin. L'*Adige* dans la derniere partie de son cours, c'est-à-dire après s'être dirigé vers l'Est, réhausse de même beaucoup son lit: delà ces changemens de lit, qu'il a fait entre la *Badia* de *Vangadizza* & *Cavarzere* (*voyez la Carte*), & les fréquentes ruptures qu'il fait à ses rives (*c*). Ce réhaussement de sol a empêché *la Rotta di Ficarolo* de couler dans le lit de ce fleuve, qui est aujourd'hui plus élevé, que la branche du *Pô delle Fornaci* à *Anconetta*; car de cet endroit on remonte à force de chevaux le canal de *Loredo*, qui est assez rapide (*d*); les eaux de l'*Adige* coulent aussi dans le *Tartaro* par le canal qu'on appelle *Scortico*, & celle du *Tartaro* dans le Pô par la *Fossa Polisella* (*e*). Ces canaux, selon Priscien, furent creusés pour décharger au moyen d'une partie de l'eau de l'*Adi-*

(*a*) Alberti pag. 345. b.
(*b*) Chron. Ferrar. l. cit.
(*c*) Cette branche qu'on appelle l'*Adigetto* est l'ancien lit de l'*Adige*; qui dans plusieurs Chartres de cette Abbaye est appellé *Adese veclo*, ou *Flumen veclum*.
(*d*) Voyage d'Europe tom. VI. p. 782.
(*e*) On doit observer que ces canaux font presque un angle droit entre les fleuves *Adige*, *Tartaro* & Pô.

l'*Adige* celles des grands marais, qui ſont dans ces lieux; mais ils ſont ſouvent enflés par les eaux de l' *Adige*, du *Tartaro* & du *Menaco* de telle ſorte, qu'ils inondent une grande étendue de pays (*a*).

34. Toutes ces branches du Pô, & ces canaux trop multipliés ont ſouvent produit des grandes inondations, pour peu que les pluyes ayent été abondantes; celle entr' autres qui arriva l'an 589. fit des terribles ravages (*b*). Le moyen de les empêcher & d' aſſûrer un lit plus conſtant au fleuve eſt de faire en ſorte qu' il ſe diviſe en moins de branche qu'il ſoit poſſible. Cela ſemble un paradoxe ſuivant le préjugé commun, que les eaux doivent baiſſer dans les fleuves à proportion de leur diramation; que, par exemple, ſi l'on dérive d'un fleuve un canal d'une capacité égale à celle de ſon lit, l'eau doive y baiſſer de moitié; & au contraire que ſi on fait confluer dans le lit d'un fleuve une quantité d'eau égale à celle qui y coule ordinairement, l'eau doive s'y élever du double. Mais ceux qui jugent ainſi, n'obſervent pas que c' eſt à la vîteſſe qu' on doit faire le plus d'attention dans le cours des fleuves, & qu'elle croit en raiſon de la maſſe des eaux qu'on y fait confluer. M. GENNETÉ (*c*) a prouvé en dernier lieu par des expériences exactes, que les eaux des fleuves ainſi diviſées ne doivent baiſſer que de peu, & qu' on peut y en faire confluer une aſſez grande quantité ſans craindre des inondations; car après avoir fait couler dans un canal artificiel une quantité d'eau conſtante, & avoir marqué la hauteur qu' elle avoit, il y fit confluer dans une autre canal une quantité d'eau égale, & il obſerva qu' elle ne s' élevoit que d' $\frac{1}{48}$; il joignit un troiſiéme canal, & l'eau ne s'éleva que d' $\frac{1}{24}$, & ainſi de ſuite; & au contraire ayant diviſé l' eau d' un canal commun

(*a*) ALBERTI pag. 351. b.
(*b*) V. Hiſt. Miſcel. lib. XVIII.
(*c*) Réflexions ſur le cours des fleuves.

mun en deux canaux égaux, il obſerva, que l'eau ne baiſſoit dans ces canaux que d' $\frac{1}{48}$, dans trois d' $\frac{1}{24}$, dans quatre d' $\frac{1}{12}$, & ainſi de ſuite. La vîteſſe que les eaux d'un fleuve, qui étoit diviſé, acquierent étant réünies, produit encore cet autre avantage, qu'il ſe fait moins de dépoſition de limon ſur le fond du lit. M. GENNETÉ fait eſpérer un autre ouvrage, dans lequel il donnera entr'autres méthodes celle de nettoyer aiſément lès lits des fleuves: il eſt abſolument neceſſaire de le faire, ſi on veut leur aſſûrer un lit conſtant dans la partie de leur cours, où ils commencent à le réhauſſer.

35. Quant aux autres changemens arrivés au cours du Pô, au-deſſus de l'endroit, où il ſe diviſe, je n'en marquerai auſſi que les plus conſidérables. Dans le ſiécle XI. il couloit entre *Luzzara* & *Suzara* vers *S. Benedetto*, où il recevoit le fleuve *Lirone*; & la partie du cours qu'il a aujourd'hui entre *Borgoforte* & *S. Giacomo*, étoit le lit de l'*Oglio*, dans lequel il coula après avoir rompu à la gauche de *Luzzara*. A *Plaiſance*, dont il baigne les murailles, il couloit à un mille & demi vers le Nord; car telle étoit la diſtance du *Portus* ou *Emporium Placentinum*, qu' ANNIBAL manqua de ſurprendre, & qui étoit ſitué près du fleuvee, du même côté que la Ville; la voye Romaine, qui de *Plaiſance* conduiſoit à ce port, ſubſiſtoit encore dans le moyen âge (*a*); le long des murailles de la Ville couloit dans le Pô un fleuve appellé *Fons Anguſti*, & les ſources qui naiſſoient dans ſon lit étoient ſi abondantes qu'on le navigeoit au grand avantage de la Ville; dans le ſiécle XIV. il y couloit quelquefois dedans une partie des eaux du Pô & de la *Trebia* (*b*); & depuis ce tems le Pô ayant élevé ſon ancien lit au-deſſus de celui de ce fleuve, il y tranſporta

n toutes

(*a*) *Secus viam publicam, quæ ab urbe Placentia ad Placentinum Portum ducit.* Dipl. an. 879. publ. par CAMPI *Storia Eccl. di Piac. tom. I.*

(*b*) Chron. Placent. in tom. XVI. Rer. Italic. p. 561.

toutes ſes eaux. Près de *Pavie* il couloit autrefois dans cet ancien lit, qu'on appelle *la Rotta*, & qui contient encore une partie de ſes eaux; le *Téſin* y confluoit à un demi-mille de *Pavie*; mais le Pô ayant rompu le rivage à ſa droite, fit rengorger le *Téſin*, & inonda la campagne voiſine; enfin ayant fixé ſon cours, le *Téſin* y tranſporta ſon confluent à 4. milles à l'Eſt de *Pavie*, & les marais ſe deſſecherent, & laiſſerent à découvert l'isle appellée *Mezano* (*a*). Entre les confluens de la *Seſia* & de la *Doira Bautia* il a ſouvent changé de lit. La voye Romaine, qui s'étendoit le long de ſa rive gauche entre les Villes de *Quadratæ* & *Rigomagus*, l'empêchoit de ſe jetter ſur la plaine; mais le Pô & les eaux qui couloient au-delà de la voye ayant réhauſſé le ſol, & couvert cette digue, il ſe détacha depuis ces tems des collines du *Montferrat*, rompit ſa rive gauche, ſe creuſa des nouveaux lits & emporta les ruines de *Rigomagus*, rebâti ſur la fin du ſiécle VI. ſous le nom de *Tridinum*, après avoir contraint les abitans à tranſporter leurs abitations plus loin de ſon bord, où il bâtirent l'an 1210. la Ville de *Trin* (*b*). Mais ces nouveaux lits ayant été auſſi réhauſſez, le fleuve reprit ſon cours dans les anciens; ainſi l'an 1297. il avoit quitté ſon lit vers *Palazzolo*, & s'étoit jetté vers la colline, où eſt *la Rocca delle Donne* (*c*). Il l'a ſouvent changé depuis; & aujourd'hui entre la *Doira* & la *Seſia* il coule preſque partout diviſé en deux lits. L'an 1610. quantité de pierres ayant éboulé du rocher de *Verruë*, dont il baignoit le pié, il fut contraint de ſe jetter vers *Creſcentin*, où il ſe creuſa le lit dans lequel il coule depuis ce tems; car il ne ſervit de rien que de lui faire une digue ſans en avoir dégagé le

lit

(*a*) On donnoit dans le moyen âge à ces ſortes d'Isles le nom de *Medianum*. MURATOR. Diſſert. XXI.

(*b*) V. IRIC. Diſſert. de *Rigomago*, & Hiſt. *Tridin.* lib. I. p. 14. 64. 65.

(*c*) *Sommario Comm. Fontaneto, e Gabiano* 1745.

lit de ces pierres: il l'emporta à la prémiere inondation (*a*).

36. Ces changemens, comme j'ai obſervé au §. 13, ſont produits par le peu de pente qu'a le lit du fleuve. A *Turin* il n'eſt élevé que de 100. toiſes ſur le niveau de la mer (*b*). Or à cauſe de tous ſes petits détours, le plan de ſon cours depuis cette Ville eſt long d'environ 300. milles. La déſcente de l'eau ne feroit donc que de $\frac{6}{11}$ de toiſe pour chaque mille s'il coulat ſur un plan ; mais elle eſt plus grande que cette quantité vers *Turin*, & moindre vers l'embouchure ; car comme il dépoſe dans la partie inférieure de ſon cours toûjours plus de limon, il réhauſſe de plus en plus, & rend courbe cette ſuperficie ſur laquelle il coule ; on doit donc la conſidérer comme compoſée d'un grand nombre de plans, dont la hauteur va toûjours en diminuant ; & diſtribuer cette déſcente & la vîteſſe de l'eau en raiſon de leur inclinaiſon ; mais déſtitués d'obſervations dans d'autres parties de ſon cours, on ne peut pas la déterminer : les plus importantes feroient celles de la hauteur de ſa ſource, & du lieu où ſes eaux reparoiſſent vers ſon entrée dans la plaine. En général depuis ce lieu juſqu'à la colline de *Turin*, la vîteſſe qu'il a, & l'inégale réſiſtance qu'il trouve dans les rives, font qu'il varie beaucoup ſon lit, en les rongeant de côté & d'autre ; le long de cette colline, la qualité des rives, & plus encore la quantité de ſa vîteſſe, qu'on peut appeller moyenne, fait qu'il ne creuſe, ni ne réhauſſe pas ſon lit, qui eſt en ce lieu aſſez conſtant. Mais en ſe dirigeant enſuite vers l'Eſt, il commence à le réhauſſer, ce qui l'oblige ſouvent à tranſporter ſes eaux de côté ou d'autre des isles qu'il forme.

37. Après m'être étendu ſur les changemens du cours du Pô autant que peut permettre le plan de ce Mémoire ;

n 2 il

(*a*) *Alleg. per Creſcentino* 1741.

(*b*) M. Needham a déterminé la hauteur de la Ville à 101. toiſes. *Obſerv. Barometr.*

il me reste à ajoûter quelques observations sur sa source, & sur quelques unes des rivières qu'il reçoit; & je finirai par indiquer les effets de la prolongation du continent à l'embouchure des fleuves. Le Mont *Viso*, appellé par les Anciens *Vesulus Mons*, s'éleve fort en pointe, & est entouré de tous côtez de rochers escarpez. Quelques jeunes hommes, qui grimperent sur son sommet, rapportoient à ALBERTI qu'il y a une petite place (*a*). Vers le milieu de la déscente un petit lac, qui au jugement de CLUVIER est très-agréable, & ne déborde jamais, par des conduits souterrains donne l'origine à trois fontaines, qui au-dessous de ce lac sortent du sein de la montagne (*b*). Celle qui sort plus bas que les autres, & vers le pied de la montagne, est la plus abondante en eaux, & a été proprement appellée *Padus* (*c*). PLINE observe, que *Padi fons mediis diebus æstivis, velut interquiescens, semper aret* (*d*). " Elle est „ au milieu d'un pré, proche des ruines d'un Chateau, que „ le Roi CHARLES VIII. avoit fait bâtir pour la commo- „ dité du passage de France en Italie „ (*e*). Ces trois fontaines se réünissent, & le fleuve se précipite des rochers avec un trés-grand bruit, en roulant des grosses pierres, & est si abondant d'eaux, qu'il pourroit faire tourner une meule; sans avoir cependant aucun lit constant dans ce sol pier-

(*a*) Mais il se méprend en disant, que sur ce sommet il y a deux fontaines; dont l'une donne la source à la *Durance* & à la *Doira*, & l'autre plus basse au Pô. Pag. 384. b. 385. Il copie trop à la lettre le texte de STRABON au liv. IV.

(*b*) CLUVER. Ital. Ant. lib. I. c. 35. PLIN. l. c. *Padus e gremio Vesuli montis*

(*c*) MELA l. II. c. 4. CLUVER. ibid.

(*d*) L. II. c. 103.

(*e*) GUICHENON Hist. Généal. de la R. Maison de Savoye. Lib. I. c. 3. C'est le pertuis du M. *Visò*, aujourd'hui comblé de pierres, qui se détacherent de la cave de la montagne. Un Auteur de ce tems le décrit ainsi: " Il y a un nouveau passage bien merveilleux pour entrer au „ pays d'Italie; c'est par un pertuis qu'on a fait à côté du M. *Visol* par „ une montagne qu'on a percé tout outre puis 14. ans ença, & dure en- „ viron un get d'arbalestre. „ JACQ. SIGAULT *Totale déscription des passages des Gaules en Italie*, publiée par CAMUZAT Melang. Hist. p. 162.

pierreux. Enfin après un cours de 21. milles Romains (*a*), dans la Vallée, dont la plus grande largeur n'excede pas un mille, à ſon entrée dans la plaine, il ſe perd entre *Revel* & *Saluces* abſorbé par le gravier qu'il y a porté ; de ſorte qu'en Eté on le paſſe à pieds ſecs, & dans les autres ſaiſons de l'année il coule avec peu d'eaux (*b*). PLINE ne s'eſt pas exprimé avec ſon exactitude ordinaire en ſuppoſant qu'il coule par un conduit ſouterrain (*c*) : *Condenſque ſeſe cuniculo, & in Forovibienſium agro iterum exoriens* ; car on ſent en paſſant ſur ce gravier le bruit de l'eau dont il eſt imbibé. Il coule de nouveau vers la fin du territoire de *Revel*, peu loin de l'Abbaye de *Stapharde* ; où il reçoit ſur ſa droite le torrent *Bronda*, & quatre milles au-deſſous, un canal, qui conduit une partie des eaux de la *Vraita*, creuſé par ordre du Marquis MAINFROY IV. de Saluces pour arroſer la campagne appellée la *Gerbola*, qu'il fit défricher, & enſuite il reçoit cette rivière, & la *Maira*. Les cartes Géographiques marquent un canal de navigation, qui conduit une partie des eaux de la *Stura* dans le Pô peu au-deſſus de *Carignan* ; il avoit été projetté dans le ſiécle dernier par le célébre Marquis de PIANEZZA, & éxecuté dans ſa partie entre *Carmagnole* & le Pô (*d*) ; mais ſa mort interrompit cet ouvrage, qui auroit été fort avantageux au commerce entre *Nice* & *Turin*, ſur tout depuis qu'on fait de ſi grands travaux au Port de *Nice*. Delà juſqu'au *Tanaro*, le Pô ne reçoit que des torrens. La *Trebia* & les rivières ſuivantes inondoient une grande étendue de la plaine avant que les Romains euſſent fondé leur Colonie de *Plaiſance* l'an 218. avant l'Ere vulg. EMILIUS SCAURUS qui fit

(*a*) Ou de 14. milles du Piémont.
(*b*) CHIESA *Cor. Reale*.
(*c*) Cela a lieu dans le *Rhône*, le *Melſe* & le *Negro*, qui coulent ſous des rochers dont la Chaine traverſe leur cours. CÆSAR de bel. Gall. lib. I. GUICHEN. lib. I. c. 3. PLIN. lib. II. c. 103.
(*d*) On l'appelle le *Navilio*.

fit conſtruire la voye *Emilienne* entre *Rimini* & *Plaiſance*, fit écouler ces marais dans le Pô, en creuſant un grand canal navigable ſur le territoire de *Parme* (*e*) ; dont une partie ſubſiſte encore ſous le nom de la *Parmigiana*. Je m' étendrois trop en décrivant les changemens de cours des rivières de la *Lombardie*, & les canaux qu'on a fait en différens tems, ſurtout dans le *Modenois*, le *Bolonois* & le *Ferrarois* ; on peut conſulter les ouvrages, qu'ont fait à cette occaſion MANFREDI & GUGLIELMINI, & ceux que j' indique dans la note (*b*).

38. Entre les rivières que le Pô reçoit à ſa gauche, la petite *Doire* eſt groſſie par le torrent *Ciniſella*, qui coule du lac qui eſt ſur la plaine du Mont *Cenis*. Ce lac étoit autrefois beaucoup plus grand (*c*) ; c' eſt parcequ' il occupoit toute cette plaine, qui a cinq milles de long, ſur un de large, que les Romains ne pratiquerent point une voye ſur cette montagne ; mais une grande partie de ſes eaux ayant écoulé, CHARLEMAGNE y paſſa avec ſon armée en 774. (*d*). Elle porte toutes les marques des volcans ; car il y a autour du lac des cavités en forme de cones renverſés, qu'on ne peut attribuer qu'aux exhalaiſons du feu ; & il ſemble qu'elle ait pris ſon nom (*M. Ceniſius*) des cendres. Les volcans & les tremblemens de terre ont produit des grands changemens dans les montagnes ; PLINE aſſûre que les Alpes & les Apennins en avoient ſouvent éprouvé les ſecouſſes (*e*). La configuration de cette montagne indique, que le *Grand* & le *Petit* Mont *Cenis* n' en faiſoient qu'une ſeule ; & que la voûte qui les joignoit, & couvroit l'abîme d' eau contenu dans ſon ſein, ayant écroulé, laiſſa

à dé-

(*a*) STRAB. lib. V.

(*b*) CORRADI, *Effetti dannoſi delle paludi, ec.* Modena 1717. SILVESTRI, *Deſcr. Paludi Adriatiche.* MURATORI *Antiq. Italic.* Diſſert. XXI.

(*c*) *Superne in cavis quibuſdam locis magnus continetur lacus ; duoque fontes &c.* STRAB. lib. IV.

(*d*) V. EGINHART. *in V. Caroli M.*

à découvert ce Lac formé par le baſſin de la Montagne, qui retint une partie des eaux. (*a*)

39. Petrus Azarius, qui écrivoit vers la fin du xiv ſiécle, donne une curieuſe deſcription de l'*Orgo*, & la *Doira Bautia* (*b*). Il obſerve que ce deux fleuves, quoique peu éloignés, ſont tout-à-fait différens. Le premier rend fort fertiles les terres qu'il arroſe; quoiqu'il inonde, il à des guez bons & ſablonneux; on trouve dans ſon lit un grand nombre de poiſſons excellens, & on y reçueille quantité d'or en des grains ſi gros, qu'il en vit un de la valeur de ſeize florins. „ La *Doira* a ſa ſource dans des Montagnes „ couvertes de glaces éternelles: point d'or dans ſon lit, „ point de poiſſons, & de guez dans le Canavez; s'il „ coule dans les champs, il les détruit, ſi dans la prairies „ il en gâte & brûle les herbes. L'Auteur de la Chronique de *Plaiſance* fait une obſervation ſemblable ſur le riviéres *Nura*, & *Trebia*; & dit que le Pô rend fort fertiles les terres qu'il inonde, quoiqu'il cauſe ſouvent des grands dommages à ſes voiſins. (*c*) Pline obſerve auſſi que le Pô dans ſes inondations, *Agris quamvis torrentior, nil tamen ex rapto ſibi vindicans, atque ubi liquit agros, ubertate largior*: ce qu'il faut entendre de la plus grande partie de ſon cours dans la plaine. Ces differens effets ſont produits par les terres, & les ſels, ou par l'Ocre, & le ſable qu'ils charient dans une partie de leur cours, & dépoſent dans une autre.

40. La *Doira Bautia* mêloit anciennement ſes eaux avec celles d'un Lac, qui étoit formé par le baſſin que font les col-

(*a*) La hauteur de cette Montagne étoit donc plus grande, que celle, qui a été obſervée à la *Glaciére* (v. §. 2. Nota *a*), & qui ſeroit trop petite à l'égard de la diſtance, où elle eſt du Mont *Tourné*.

(*b*) *Lib. de Bello Canepic. in princ. Rer. Ital.* tom. xvi.

(*c*) *Flumen Nuriæ, quod diſtat a civitate per quatuor milliaria, eſt optimus Fluvius pro terris impinguandis, & pro pannis laborandis; non eſt enim terra ita mala, ſi irrigetur ab aqua iſta, quod non efficiatur optima, & eſt Fluvius ſatis magnus. Fluminis Treviæ aqua mala eſt pro terris; nam eas facit macras. Rer. Ital. T.* xvi. *p.* 561.

collines, qui s'élargissent à *Ivrée*, & se retrécissent de nouveau à *Massé*. Les Lacs de *Viverone*, & de *Candia* en sont des parties, qui ayant une plus grande profondité, ne laisserent point écouler toutes leurs eaux. La partie à la gauche de la riviére étoit plus grande que celle de la droite. AZARIUS, qui le décrit, assure qu'on voyoit dans le Comté de *Mazin*, & près de *Viverone* les murailles des Ports qu'il y avoit sur ce Lac, & les anneaux de fer, auxquels on attachoit les bateaux. L'eau de la *Duria*, qui couloit dans le Pô, ayant élargi le détroit de *Massé*, entraina avec elle la plus grande partie des eaux du Lac. La Table Théodosienne en marque un considérable à la source de cette riviére; PTOLÉMÉE l'appelle le Lac *Poenin*, & dit que la *Doria* avoit sa source à côté de ce Lac. (*a*) Ils ne marquent pas des Lacs si petits que celui de *Ruto*, duquel coule une de ses deux sources. Il semble donc qu'on en puisse conclure que la Vallée de *Courmajeur* dans laquelle coule l'autre source ait été occupée par un Lac dont les eaux se soient de même écoulées. Cette table marque aussi un *Lacus Cusius* à la source d'une riviére sans nom, qui ne peut être autre que la *Sésia*. Il est assez vraisemblable que le Lac, dont coule cette riviére, ait été beaucoup plus grand; un Auteur, qui décrit exactement le Diocése de *Novare* (*b*), assure que les Villages qui sont dans le fond de la Vallée de *Sésia* sont assez nouveaux. Le même Auteur décrit un autre Lac de quelques trois milles de long & de large, qui étoit près de la *Sesia*, entre *Prà*, & *Grinasco*, dont l'eau a écoulé avec celle de cette riviére; & une partie du Lac *Majeur*, qui a été remplie par le limon porté par la riviére Tosa. Quoique les trois grands Lacs (*c*) n'ayent pas été depuis plusieurs siécles retrécis dans leur longueur par les

(*a*) Geogr. l. III. c. 1.
(*b*) CAROL. a BASILICAPETRI, *Novaria*.
(*c*) *Majeur*, *de Come*, & *de Garda*.

les fleuves qui les traversent: les mesures qu' en donnent les anciens, & les modernes étant à peu près égales; (*a*) cependant les pierres, & le sable qu'ils y portent, & que leur courant roule bien avant dans le Lac, en rehaussent nécéssairement le fond; ce qui fait que l' eau s' y soutient encore à une hauteur à peu près égale à celle qu'ils avoient il y a deux milles ans; quoique il en écoule par les riviéres, qui en sortent, plus qu' il n' y en entre.

Tant de fleuves qui prolongent le continent à leurs embouchures, comme j'ai prouvé à l' égard du Pô, & qui rehaussent de leur limon le fond de la Mer, tandis qu' ils la resserrent de tous côtés, doivent contraindre ses eaux de s' élevér sensiblement, & de submerger les Terres qu' elles baignoient, qui deviennent toujours plus basses que le niveau de la Mer. Quelques Naturalistes, qui ont tâché d'établir le contraire, c'est-à-dire, que la Mer s' éloigne toujours plus des côtes, & que les eaux se retirant continuellement dans les cavités de la Terre, laisseront enfin le fond de la Mer en sec: qu' au commencement la Terre séche ne consistoit que dans un' Isle, dont les bornes s'étendirent jusqu' à former les vastes Continens, qui sont aujord'hui découverts, ont tiré cette conséquence d' observations trop bornées. M. LINNEUS (*b*) entr' autres, la déduit de celles qu' il à faites dans le Golphe *Bothnique*. Ce Golphe long & étroit, dans lequel se décharge un grand nombre de fleuves, qui y portent beaucoup de pierres, & de limon, deviendra toujours plus retréci; & ces fleuves qui déscendent de Montagnes fort hautes, & qui après un cours peu long, mais d' autant plus rapide, déchargent leurs eaux dans la Mer, se creusent dans plaine qu'ils parcourent des lits toujours plus profonds (*c*) mais

O il en

(*a*) POLYB. apud STRAB. lib. IV. in fine, Itin. ANTON., VAGLIANO *le Rive del Verbano*, PAULI JOVII *Larii Lac. descr.*

(*b*) *Differt. de Tellure habitabili* in vol. II. *Amoenit.*

(*c*) Les Lacs, qui sont si nécessaires dans ce Pays, y sont fort étendus & en grand nombre.

il en auroit déduit tout le contraire s' il eut obſervé que même dans la Mer *Baltique* l' Isle de *Rugen* étoit autrefois une partie du continent; que la Mer a beaucoup gagné ſur les côtés Occidentales du *Dannemark*, & ſur celles de la *Friſe*; que dans les *Pays-Bas* l' eau du *Rhin* ayant ceſſé de couler par l' embouchure du Lac *Flevo* la Mer y entra, & ſubmergea une grande étendüe de Pays (*a*); &, ſans chercher plus loin des exemples, qu' elle entra de même par l' embouchure du Pô *Vergeneſe*, y forma un Lac, qui n' avoit encore dans le XVI ſiécle que 12 milles de circuit, mais qui ſubmergeant de plus en plus les terres voiſines, en a aujourd'hui 60.; qu'on voit le long des côtes de la Méditerranée les ruines de pluſieurs Villes au milieu de ſes eaux &c. La ſurface de la Terre doit enfin plus perdre que gagner (*b*); & ſi la Révélation ne nous enſeignoit pas qu'elle ne doit plus éprouver un déluge (*c*), mais un embraſement (*d*), on en devroit conclure que dans la ſuite d' un grand nombre de ſiécles elle ſeroit toute couverte par les eaux.

(*a*) Occupé aujourd'hui par le Golphe appellé *Zuider-zée*.

(*b*) *Mons cadens defluit, & ſaxum transfertur de loco ſuo. Lapides excavant aquæ, & alluvione paullatim terra conſumitur*, JOB. XIV. 18. 19.

(*c*) Geneſ. IX. v. 11. ec.

(*d*) PETR. epiſt. II. v. 7. 10. 12.

Pag. 28. *ligne* 7 quarrée, *lisés* quarré.
Pag. 8. *ligne* 22. démontrent, *lisés* démontrant.

ĊƆ ĊƆ
Pag. 47. *linea* 3. CƆ < *lege* CƆ <
CƆ CƆ

Pag. 51. *linea* 6. *in nota* ſubtiliori *ſupple* acumini.
Pag. 53. Poſt Sciagraphiam *adde* titulum progreſſus gradualis combinatorius.
Pag. 54. *linea* 25. Iſquierdo, *lege* Izquierdo
~~57. *linea* 2. ⊙, (⊙).~~
61. *linea* 1.

S & Ꮡ, Ꮃ S S
Ꮡ< Hinc *lege* Ꮡ< Hinc & Ꮡ, Ꮃ
CƆ CƆ CƆ CƆ
C C C

linea 2. < ergo Ꮡ inter & nulla Ꮃ, *lege*
Ɔ Ɔ Ɔ

C C C Ɔ
< ergo Ꮡ inter & nulla Ꮃ.
Ɔ Ɔ Ɔ C

Obſervandum indiſcriminatim a Typothetis appoſitum fuiſſe τo < pro *&*, & *vel*.

Ṡ S
Loco Ṡ < *lege* Ṡ < ubicumque recurrit.
Ṡ S

τo a, τo non a curſivis litteris pingendum erat.

Pag. 69.	*lign.*	7.	Are . .	Ere
72.		26.	des fleuves	du fleuve
78.		15.	da . . .	de
90.		1.	les fleuves	ces fleuves
91.		30.	ce . . .	de
92.		11.	tous . .	ſous
100.		8.	place . .	plaine
102.	*Note* (*e*)			(*e*) Plin. lib. II. c. 80.

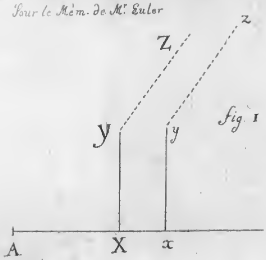
Imprimatur. Piselli Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

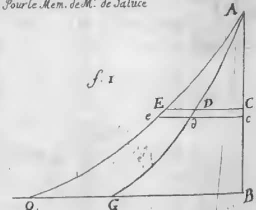
Galli per la Gran Cancellería.

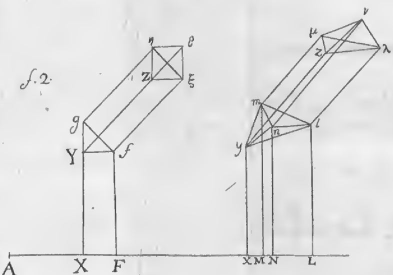
Planche I.e

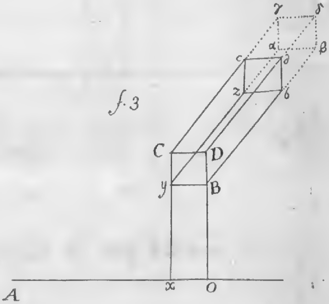
Pour le Mém. de Mr. Euler

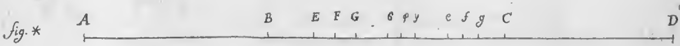


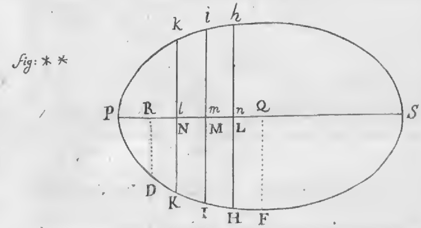
Pour le Mém. de Mr. de Saluce











Pour les Recherches sur le Son

Planche 2e

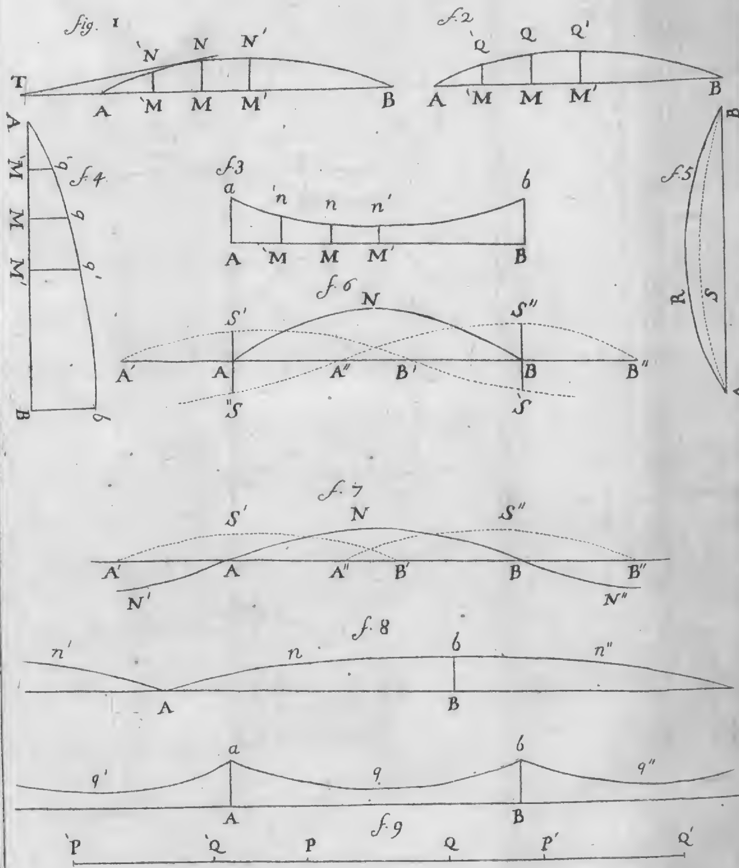
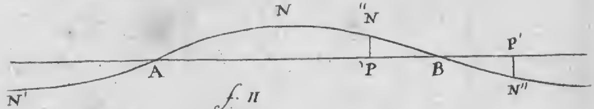


Planche 3.e

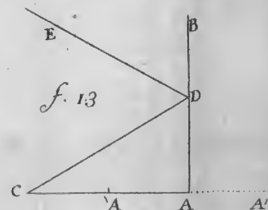
f. 10



f. 11



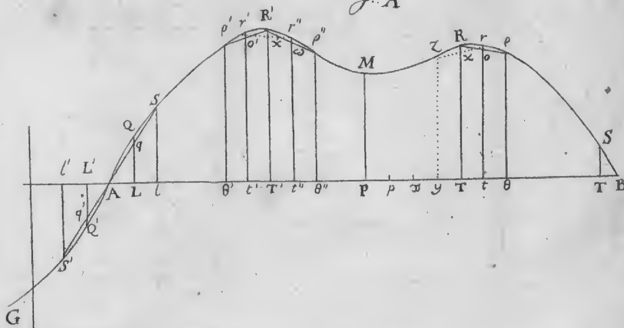
f. 13



f. 12

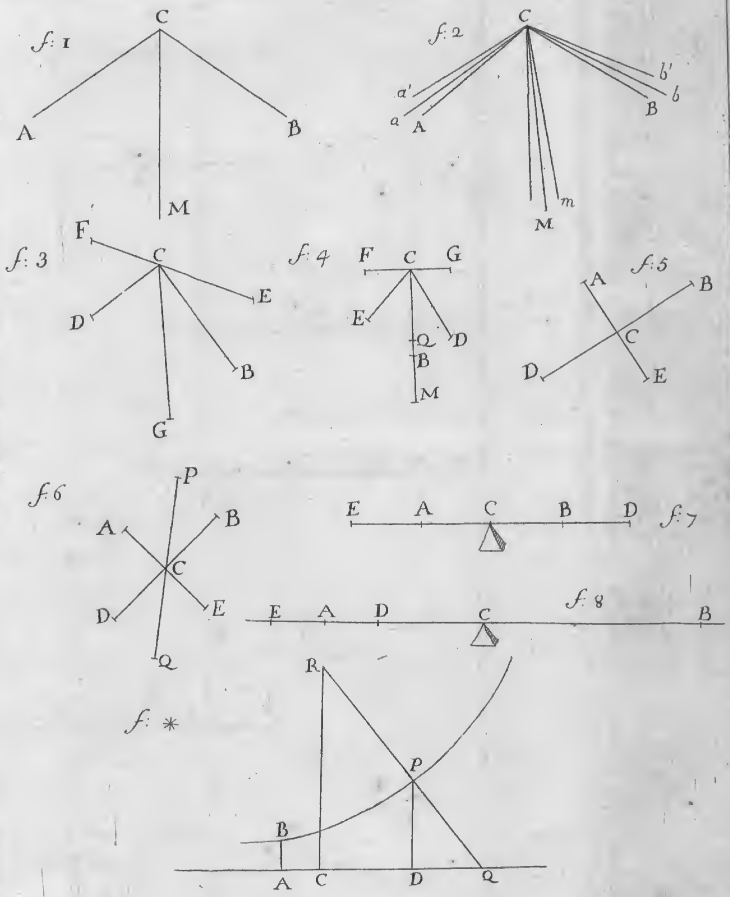


f. A



Pour le Mem: de Mr de Foncenex

Planche 4e



Pour le Memoire du Pere Gerdil

Planche 5.e

Fig. 1.

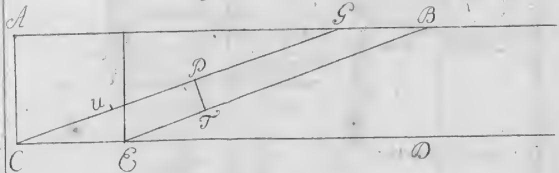


Fig. 2.

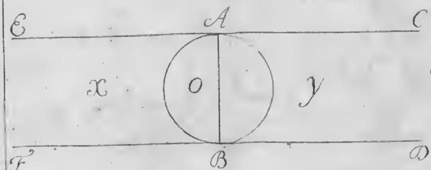


Fig. 4.

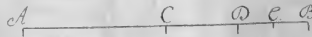


Fig. 5.

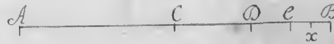
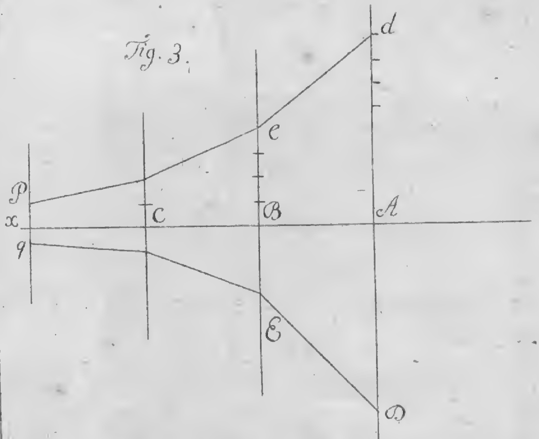


Fig. 3.




CARTE
DU COURS DU PO
ANCIEN ET MODERNE
Par M. Carena 1761
Milles Romains anciens
Adige F.
Athesis Fl.
Petra postea
Vangaditia
Adigetto F.
Bonus Vicus p. Rhodigium
Tartarus
Tartarus Fl.
Fossa Canda
Tartaro
Fossa Philistina
ATRIA p. ADRIA
Lauretum
Fossiones Philistinæ seu Ostia Tartari
Portus Adriæ
Porto del Po, o delle Fornaci
Ramo di Levante
Carbonaria Fossa
Maria
M. ad VII
Corbula
Longus
Hostilia
Romanus
Padus Fl.
Fossa Philistina
Terecenta
Seriana
Balneolum
Fossa Alta
Lano Fl.
Gabellus Fl.
Gabellum
Colicaria
Burana
Aqualonga
Via Mutinensis
Ulmus Formosa
Vicus Aureolus
Golotrasa
Rupta Ficaroli
Ad Flexum
Po Grande
di Venezia
Rupina
Septem Pollicinia
Bondeno
Ansa Regina
Ostium
Lacus Vitreus
Lucus obs.
FERRARA
Vicus Magnus
Vicus Varianus
Agger Antianus
Forum Alieni
Pons Ducis
Fossa Munda
Rheni Ostia
Maletum
Madrasia
Fossa
Vicus Iria
Eridanus Fl.
Contrapassum
Caput Eridani
Vicus Aventinus
Medelana
Finis
Vicus Area
Ecubaria
Salectum
Tamara
Po di
Hadrianum
Taglio di Portoviro
Bocca dell'Asino
Sbocco dell'Asinino
Busa delle Tole
Bocca del Camello
Bocca della Scovetta
Bocca della Gnocca
Porto del Goro
Baratofano
Conca Agathe
Paludes et Piscaria
Ostia Plena
Portus Gauri
Caput Gauri
Volane Ostium
Porto di Volana
Silva Ducarissa
Sagis Ostium
Lacus I.
Olane Ostium
Ustulatus
Hellia
I. COMACLIA
Augusta
Caprasiæ Ostium
Porto di Magnavacca
Porto di Primaro
Argenta
Spinus Fl.
Paludes et Piscariæ
Bocletum
Caput Sandali
Villa Magna
Minervium
Nonantula
Scultenna Fl.
Gallicus Fl.
Gena Fl.
Agger
Galeria
Canal di S. Giovanni
Persicetum
Lavinus Fl.
Triumvirium
Forum Cellarum seu Gallorum
Mutia
Via Æmilia
Medias
Palus
Rhenus
Sapina
Savena Fl.
Zena F.
Idex Fl.
Budrio
Centonara F.
Claterna Fl.
Galliana
CLATERNA
Canale di Medicina
Silarus Fl.
Correcchio F.
Caput Silicis
Ad Sextum
FORUM CORNELII vel SYLLÆ postea IMOLA
BONONIA
Vatrenus Fl.
Lucus
Fanum Iovis obsc.
C. Tiberiacum
Santerno
SPINA
MELISA
CÆSAREA
Via Faventina
Vitis Fl.
BUTRIUM
Padus Renus
Palatium ad Blachernas
Monasterium ad Memoriam Regis Teuderici, Seu ad Pharum.
Portus Eridani
RAVENNA
Portus Classis
CLASSIS
Pinetum
Candiani
S. Apollinaris
45
30
40
29
10
20

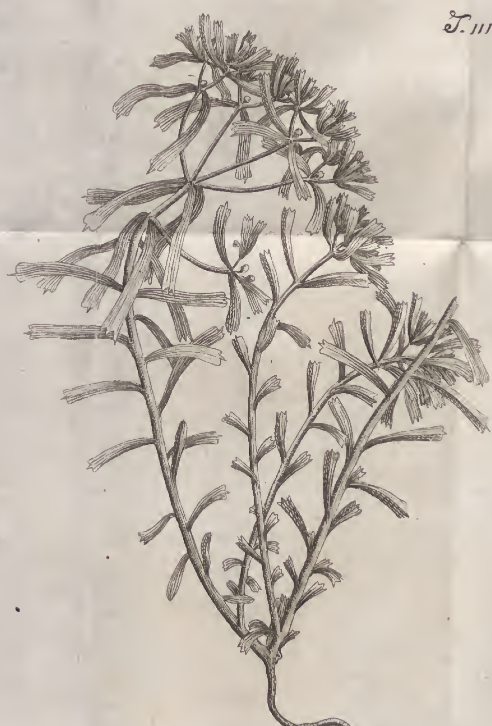
T. I.



T. II.



T. III.



T. IV.

